Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 3

3.1 Zeigen Sie dass die orientierungspreservierende Isometriegruppe des 3-dimensionalen Würfels ist isomorph zu S_4. Hinweis: betrachten Sie die Wirkung auf die 4 Hauptdiagonalen des Würfels.

3.2 Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Platonischer Körper, außer Tetraedron. Sei A die orientierungspreservierende Isometriegruppe, und sei B die volle Isometriegruppe. Zeigen Sie: B ist isomorph zu $A \times \mathbb{Z}/2$.

Was ist A wenn M ist der Tetraedron?

3.3 Das *abbgestumpfte Ikosaeder* A entsteht aus dem Ikosaeder B durch die Abstumpfung der Ecken des Ikosaeders, wie auf deiser Animation gezeigt: `https://de.wikipedia.org/wiki/Ikosaederstumpf#/media/Datei:Anim_troncature_icosa%C3%A8dre_rotated.gif` Zeigen Sie dass die Isometriegruppen von A und B gleich sind. Beschreiben Sie alle Bahnen und Stabilisatoren der Wirkung dieser Gruppe aud die Echen, Kanten und Flächen von A.

3.4 **[10]**

Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X wirkt. Für $g \in G$ sei

$$\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \mid g.x = x\}.$$

Zeigen Sie das *Lemma von Burnside*: Die Anzahl der Bahnen der Wirkung ist gleich

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\,\mathrm{Fix}(g)|.$$

(Hinweis: Zählen Sie die Paare $(g, x) \in G \times X$ mit $g.x = x$ auf zwei verschiedene Arten.)

3.5 **[10]**

Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper mit q Elementen und $n \geqslant 2$.

- Bestimmen Sie die Ordnung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. (Hinweis: Die Spalten einer invertierbaren Matrix bilden eine Basis von $\mathbb{K}^n$.)

- Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ wirkt auf $\mathbb{K}^n$ durch $A.v := Av$. Bestimmen Sie die Bahnen dieser Wirkung.

- Bestimmen Sie die Stabilisatoren von 0 und $e_1 := (1, 0, \ldots, 0)^T$ und ihre Ordnungen.

3.6 Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper mit q Elementen und $n \geqslant 2$. Der *projektive Raum* $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ ist die Menge der eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{K}^n$. Für $v \neq 0$ schreiben wir $[v] := \mathbb{K}v$.

- Wie viele Elemente hat $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$?
- Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ durch

$$A.[v] := [Av]$$

auf $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ wirkt. Bestimmen Sie die Bahnen.

- Bestimmen Sie den Stabilisator von $[e_1]$ und seine Ordnung.
- Der *Kern* einer Wirkung von G auf X ist

$$\{g \in G \mid g.x = x \text{ für alle } x \in X\}.$$

Bestimmen Sie den Kern der obigen Wirkung.

3.7 Die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ ist die Menge

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- Finden Sie eine Untergruppe $N \leqslant \mathrm{SO}(3)$, sodass S^2 mit dem Nebenklassenraum $\mathrm{SO}(3)/N$ identifiziert werden kann. Beschreiben Sie diese Identifikation.
- Finden Sie eine Abbildung $f\colon \mathrm{SO}(3) \to S^2$, sodass das Urbild jedes Punktes ein Kreis ist.

3.8 Seien A und B Gruppen. Zeigen Sie: $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$.

3.9 Zeigen Sie $Aut(D_4) \cong D_4$.

3.10 Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$. Wir definieren eine Relation auf G durch

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad a^{-1}b \in N.$$

- Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

- Sei $X := G/\!\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, und sei $[a]$ die Klasse von $a \in G$. Zeigen Sie, dass durch

$$[a] \cdot [b] := [ab]$$

eine wohldefinierte Gruppenstruktur auf X entsteht.

- Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon X \to G/N, \qquad [a] \mapsto aN$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist.