Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 2

2.1 Erinnnerung: Eine Abbildung $f\colon G \to H$ zwischen Gruppen heißt Homomorphismus, falls $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in G$.

- Zeigen Sie: $f(e_G) = e_H$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ für alle $x \in G$.
- $\ker(f)$ and $f(G)$ sind Untergruppen, jeweils von G und H.
- f ist injektiv gdw. $\ker(f) = \{e_G\}$.
- falls f ist injektiv dann G und $f(G)$ isomorph sind.

2.2 Sei $K = \mathbb{Z}/p$, wobei p eine Primzahl ist, und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dass die Untervektorräume von K^n sind genau die Untergruppen von K^n. Gilt dies für beliebige Körper?

2.3 • Sei $f\colon G \to H$ ein Isomorpshismus zwischen Gruppen. Dann f^{-1} ist auch ein Isomorphismus.

- Die Automorphismen einer Gruppe G bilden mit Komposition eine Gruppe.

2.4 Sei $(\mathbb{Z}/d)^*$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}/d$. D.h. die Elemente von $(\mathbb{Z}/d)^*$ sind die Klassen $[x]$ sodass $[y]$ existiert mit $[x][y] = [1]$. Überprüfen Sie dass dies eine Gruppe ist und zeigen Sie: $[k] \in (\mathbb{Z}/d)^*$ gdw $\gcd(k, d) = 1$ (es folgt darus dass die Ordnung dieser Gruppe ist $\varphi(d)$) Ist diese Gruppe immer zyklisch?

2.5 **[10]**

• Sei $G = \langle S \rangle$, and sei $\varphi\colon G \to G$ ein Automorphismus. Zeigen Sie dass $\varphi(S)$ ein Erzeugendsystem von G ist.

- Sei G wieder eine Zyklische Gruppe der endlichen Ordnung d. Was ist $\mathrm{Aut}(G)$?

2.6 Wir haben $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ so definiert: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) := \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = \pm 1\}$. Zeigen Sie: $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ gdw. $A \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det(A) \neq 0$ und die inverse Matrix A^{-1} die Eigenschaft $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ hat.

2.7 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$.

2.8 **[10]**

- $|A_n| = n!/2$
- $A_n = \langle (1\,2\,3), (1\,2\,4), \ldots, (1\,2\,n) \rangle$.

2.9 Sei G eine Gruppe, $g, x \in G$. Häufig schreibt man: $x^g := g^{-1}xg$. Zeigen Sie die "Potenzgesetze": $(xy)^g = x^g y^g$, $(x^g)^h = x^{gh}$.

2.10 Sei G eine endliche Gruppe und $H \leqslant G$. Zeigen Sie dass die Definition der Index $(G : H)$ unabhängig davon ist, ob wir die Links- oder Rechtsnebenklassen verwenden.

2.11

- Zeigen Sie: eine Untergruppe mit Index 2 ist ein Normalteiler.
- Bestimmen Sie die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2)$.
- Beweisen Sie dass eine Gruppe der ORdnung 4 ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ oder $\mathbb{Z}/4$.

2.12 **[10]**

Sei $n \geqslant 3$. Die Gruppe aller Isometrien der Ebene, die ein regelmäßiges n-Eck auf sich selbst abbilden, heißt die *Diedergruppe* D_n.

Sei r die Drehung um $2\pi/n$ und s eine Spiegelung an einer Symmetrieachse des n-Ecks, die durch mindestens eine Ecke verläuft.

- Bestimmen Sie den Index $(D_n : \langle r \rangle)$.
- Zeigen Sie, dass jedes Element von D_n eindeutig als r^k oder sr^k mit $0 \leqslant k < n$ geschrieben werden kann. (Hinweis: identifizieren Sie r und s mit geeigneten Bijektionen von $\mathbb{Z}/n$)
- Zeigen Sie, dass sr^k eine Spiegelung ist.
- Zeigen Sie, dass $srs = r^{-1}$.

2.13 Zeigen Sie, dass D_n von zwei Elementen s, t der Ordnung 2 erzeugt wird.

Schreiben Sie alle Elemente von D_n als Produkte von s und t.

2.14 Sei P einer der fünf platonischen Körper und G seine Isometriegruppe (einschließlich der orientierungsumkehrenden Isometrien).

Wählen Sie eine Ecke v, eine Kante E und eine Fläche F von P. Wir definieren ihre *Stabilisatoren*:

$$A := \{g \in G \mid g(v) = v\}, \qquad B := \{g \in G \mid g(E) = E\}, \qquad C := \{g \in G \mid g(F) = F\}.$$

Dabei werden Kanten und Flächen als Mengen stabilisiert, nicht notwendigerweise punktweise.

Zeigen Sie, dass A, B, C Untergruppen von G sind. Bestimmen Sie für jeden der fünf Körper die Ordnungen $|A|, |B|, |C|$ und identifizieren Sie diese Gruppen bis auf Isomorphie.

2.15 Seien $\sigma, g \in S_n$. Die Permutation σ beschreibt eine Umordnung von n Objekten, die mit $1, \ldots, n$ nummeriert sind.

Nun ändern wir die Nummerierung: Das bisher mit i bezeichnete Objekt erhält die neue Nummer $g(i)$.

Welche Permutation beschreibt dieselbe Umordnung in der neuen Nummerierung?

2.16 Sei P ein Polyeder und G seine Isometriegruppe. Für zwei Ecken v, w definieren wir die Stabilisatoren

$$A := \{g \in G \mid g(v) = v\}, \qquad B := \{g \in G \mid g(w) = w\}.$$

Zeigen Sie: Falls es ein $h \in G$ mit $h(v) = w$ gibt, dann gilt $B = hAh^{-1}$.

Gilt auch die Umkehrung?

2.17 (während Übungseinheiten - nur eine Skizze) Zeigen Sie, dass die Isometriegruppe des Standardsimplex $\Delta_n := \mathrm{conv}(e_1, \ldots, e_{n+1}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ isomorph zu S_{n+1} ist.

2.18 (während Übungseinheiten - nur eine Skizze) Für eine endliche Gruppe G heißt die Tabelle, deren Zeilen und Spalten mit den Elementen von G beschriftet sind und deren Eintrag in Zeile g und Spalte h das Element gh ist, die *Cayley-Tafel* von G.

Beispiel: Die Cayley-Tafel von $(\mathbb{Z}/4, +)$ ist

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$

- Erstellen Sie die Cayley-Tafel von S_3.

- Zeigen Sie: Zwei endliche Gruppen sind genau dann isomorph, wenn ihre Cayley-Tafeln durch Umbenennung der Elemente ineinander überführt werden können.