Algebra 1 (WS 2026-27) - Problem sheet 1

1.1 In einem abelschem Monoid gilt: $x^n y^n = (xy)^n$.

1.2 Sei S eine Halbgruppe und seien $a_1, \ldots, a_n \in S$. Dann ist das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ unabhängig davon, wie die Klammern gesetzt werden.

1.3 Sei M ein Monoid, und sei $x \in M$ invertierbar.

- x^n ist invertierbar für alle $n \in \mathbb{Z}$, und es gilt: $(x^n)^{-1} = x^{-n}$.
- die Potenzgesetze $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ und $(x^m)^n = x^{mn}$ gelten für alle $m, n \in \mathbb{Z}$

1.4 Zeigen Sie: Ein Monoid G ist genau dann eine Gruppe, wenn für alle $a, b \in G$ jede der Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ genau eine Lösung in G hat.

1.5 Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir eine Verknüpfung durch $n{*}m := (1{+}n)(1{+}m){-}1 = n{+}m{+}nm$.

- Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, *)$ ein kommutatives Monoid ist.
- Bestimmen Sie das neutrale Element und alle invertierbaren Elemente.

1.6 Bestimmen Sie für jeden der fünf platonischen Körper die Ordnung der Isometriegruppe diese Körpers.

1.7 $|S_n| = n!$

1.8 **[10]**

Sei G eine Gruppe. Für $S \subseteq G$ besteht die von S erzeugte Untergruppe $\langle S \rangle$ aus allen Produkten $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_k^{\varepsilon_k}$ mit $s_i \in S$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ und $k \geqslant 0$ (für $k = 0$ erhalten wir e).

Zeigen Sie, dass $\langle S \rangle$ die kleinste Untergruppe von G ist, die S enthält. D.h. falls $H \leqslant G$ und $S \subseteq H$, dann $\langle S \rangle \subset H$.

1.9 **[10]**

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, seien $a, b \in G$ mit $ab = ba.$ und $\mathrm{ggT}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b)) = 1$. Zeigen Sie dass die Untergruppe $\langle a, b \rangle$ zyklisch ist.

1.10 Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

1.11 Sei $K = \mathbb{Z}/p$, wobei p eine Primzahl ist. Zeigen Sie dass Untergruppen von K^n sind genau die K-lineare Untervektorräume von K^n. Bestimmen Sie dia Anzahl der Untegruppen von K^n.

1.12 Wie viele verschiedene Erzeuger hat eine zyklische Gruppe der Ordnung n?

1.13 • Sei $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem von G und sei $T \subseteq G$. Zeigen Sie: Falls $S \subseteq \langle T \rangle$, dann ist auch T ein Erzeugendensystem von G.

• Zeigen Sie dass die Transpositionen $(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n)$ die Gruppe S_n erzeugen. Benutzen Sie dabei die obige Aussage und die Tatsache dass wir schon wissen, dass die Transpositionen $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$ die Gruppe S_n erzeugen.

1.14 In $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ haben die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ die Ordnungen 4 bzw. 3. Zeigen Sie, dass $\langle AB \rangle$ eine unendliche zyklische Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ist. Das Produkt zweier Elemente endlicher Ordnung muss also nicht wieder endliche Ordnung haben. Was gilt in abelschen Gruppen?

1.15 **[10]**

Zeigen Sie, dass jede Gruppe G gerader Ordnung $|G| = 2n$ ein Element $g \neq e$ der Ordnung 2 enthält.

Hinweis: Betrachten Sie die Paare g, g^{-1}.

1.16 Sei H eine nichtleere Teilmenge einer endlichen Gruppe G, die unter Multiplikation abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist. Insbesondere müssen wir die Existenz eines neutralen Elements und der inversen Elemente nicht gesondert überprüfen. Gilt dies auch für unendliche Gruppen?

1.17 Bestimmen Sie ein minimales Erzeugendensystem der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$. (D.h. kein echtes Teilsystem soll die Gruppe erzeugen.)

1.18 Sei $\pi = (1\,2\,\ldots\,n) \in S_n$ und $k \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass π^k ein Produkt von $d := \mathrm{ggT}(n,k)$ paarweise disjunkten Zyklen ist, die alle die Länge n/d haben.

1.19 Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ und $(AB)^m = I_n$ für ein $m \geqslant 1$. Gilt dann notwendigerweise auch $(BA)^m = I_n$?