Vorlesung Mathematik für Physiker | Hans-Peter Gittel
Lineare Algebra 1 | Universität Leipzig
Wintersemester 2019/2020 | Mathematisches Institut

Übungsaufgaben (6. Serie)

Abgabetermin: 04.12.2019

21. Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne, falls es möglich ist, AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^T, B^T, C^T, ABC, CBA.

22. Aus der Vorlesung ist bekannt: Die Menge $\mathbb{R}^{m\times n}$ der reellen $m \times n$-Matrizen bildet mit den dort eingeführten Verknüpfungen Addition und skalare Vielfachbildung mit reellen Zahlen einen Vektorraum.

a) Zeige, dass $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Dimension $m \cdot n$ besitzt, und gib eine Basis dieses Vektorraums an.

b) Bildet die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft, dass die Summe der Elemente in jeder Zeile gleich Null ist, einen Unterraum von $\mathbb{R}^{m\times n}$? Wenn ja, was ist dessen Dimension.

23. Beweise die folgenden Rechenregeln:

a) $A(B+C) = AB + AC$, b) $A(BC) = (AB)C$, c) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
d) $(AB)^T = B^T A^T$, e) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, f) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dabei wird stets vorausgesetzt, dass alle aufgeführten Matrizen auch existieren.

24. Die Vektoren $b_1 = (1,2,1)$, $b_2 = (2,9,0)$ und $b_3 = (3,3,4)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(b_1) = (1,0), \quad f(b_2) = (-1,1), \quad f(b_3) = (0,1).$$

a) Bestimme $f(7,13,7)$ und allgemein $f(x_1,x_2,x_3)$.

b) Was ist die Darstellungsmatrix von f bez. der Standardbasen (kanonische Basen) von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$?