Hans-Peter Gittel

# Analysis 1

## (für Physiker)

## Wintersemester 2015/2016
## und Sommersemester 2016

Universität Leipzig, Institut für Mathematik

Version vom 2. Juni 2016

Es wird keinerlei Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit der hier vorliegenden Mitschrift gegeben.

Diese Mitschrift wurde ursprünglich von Felix Dietzsch mit Hilfe von LaTeX $2_\varepsilon$ im Wintersemester 2007/2008 gesetzt. Die jeweils aktuellste Version der Mitschrift ist erhältlich unter:

`http://www.math.uni-leipzig.de/~gittel/ma2phys16.html`

# Inhaltsübersicht


**1 Die reellen Zahlen** **1**

**2 Folgen und Reihen** **17**

**3 Stetigkeit reeller Funktionen** **59**

**4 Differenzierbarkeit reeller Funktionen** **77**

**5 Integrierbarkeit reeller Funktionen** **99**

# Inhaltsverzeichnis


**1 Die reellen Zahlen** **1**

1.1 Einführung . . . 1

1.1.1 Warum braucht man reelle Zahlen? . . . 1

1.1.1.1 Beispiel: Flächeninhalt eines Halbkreises . . . 1

1.1.1.2 Beispiel: Längenbestimmung von Strecken . . . 2

1.2 Ordnungsstruktur . . . 3

1.2.1 Einige Rechenregeln für Ungleichungen . . . 3

1.2.1.1 Bezeichnungen . . . 4

1.2.1.1.1 Folgerung: . . . 5

1.2.1.1.2 Satz: . . . 6

1.2.1.1.3 Beispiel: . . . 6

1.2.2 Weitere nützliche Ungleichungen und Gleichungen . . . 6

1.2.2.1 CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für Summen . . . 6

1.2.2.2 Binomische Formel . . . 7

1.2.2.2.1 Beispiel: . . . 7

1.2.2.2.2 Eigenschaften: . . . 7

1.2.2.2.3 Beweis der binomischen Formel . . . 7

1.2.2.2.4 Folgerung: . . . 8

1.2.2.3 BERNOULLIsche Ungleichung . . . 8

1.3 Vollständigkeitseigenschaften der reellen Zahlen . . . 9

1.3.1 Definitionen . . . 9

1.3.2 Beispiele . . . 10

1.3.2.0.1 Analytische Charakterisierung von $\sup M$: . . . 10

1.3.3 Vollständigkeitsaxiom . . . 10

1.3.3.0.1 Bemerkungen: . . . 11

1.3.4 Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom . . . 11

1.3.4.0.1 Definition: . . . 11

1.3.4.0.2 Beispiele: . . . 12

1.3.4.1 Intervallschachtelung . . . 12

1.3.4.1.1 Beispiel: . . . 12

1.3.4.1.2 Gegenbeispiel: . . . 12

1.3.4.1.3 Prinzip der Intervallschachtelung: . . . 13

1.3.5 Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen . . . . . 13
1.3.5.0.1 Bemerkung: . . . . . 14
1.3.5.1 Anwendung: Nachweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ . . . 14
1.3.5.1.1 Bemerkung: . . . . . 14
1.3.5.1.2 Behauptung: . . . . . 14
1.3.5.1.3 Behauptung: . . . . . 15

**2 Folgen und Reihen** **17**
2.1 Der Grenzwertbegriff . . . . . 17
2.1.1 Definition: Zahlenfolge . . . . . 17
2.1.1.0.1 Bemerkung: . . . . . 17
2.1.1.1 Beispiele . . . . . 17
2.1.2 Definition: Konvergenz . . . . . 18
2.1.2.0.1 Interpretation: . . . . . 19
2.1.2.0.2 Folgerung: . . . . . 19
2.1.2.1 Beispiele . . . . . 19
2.1.2.2 Eigenschaften konvergenter Folgen . . . . . 20
2.1.2.2.1 Anwendung: . . . . . 21
2.1.2.3 Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen . . . . . 21
2.1.2.4 Bemerkungen . . . . . 23
2.1.2.5 Weitere Beispiele . . . . . 23
2.2 Konvergenzkriterien für Folgen . . . . . 24
2.2.1 Monotone Zahlenfolgen . . . . . 24
2.2.1.1 Definition . . . . . 24
2.2.1.1.1 Beispiel: . . . . . 24
2.2.1.2 Monotonieprinzip . . . . . 25
2.2.1.3 Anwendung . . . . . 26
2.2.2 Teilfolgen . . . . . 27
2.2.2.0.1 Definition: . . . . . 27
2.2.2.1 Teilfolgenprinzip . . . . . 27
2.2.2.1.1 Beispiel: . . . . . 27
2.2.2.1.2 Bemerkung: . . . . . 28
2.2.2.1.3 Beispiel: . . . . . 28
2.2.3 Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß . . . . . 28
2.2.4 Cauchy-Folgen . . . . . 29
2.2.4.0.1 Beobachtung: . . . . . 29
2.2.4.0.2 Definition: . . . . . 29
2.2.4.1 Cauchysches Konvergenzprinzip . . . . . 30
2.2.4.1.1 Beispiel: . . . . . 30
2.3 Häufungswerte und Häufungspunkte . . . . . 31
2.3.1 Häufungswerte von Zahlenfolgen . . . . . 31
2.3.1.0.1 Definition: . . . . . 31
2.3.1.1 Folgerungen . . . . . 31

2.3.1.1.1 Beispiele: . . . 32
2.3.1.1.2 Bezeichnungen: . . . 32
2.3.1.1.3 Beispiel: . . . 32
2.3.1.1.4 Satz: . . . 32
2.3.2 Erweiterungen der Begriffe . . . 32
2.3.2.1 Uneigentlichte Grenzwerte . . . 32
2.3.2.1.1 Definition: . . . 32
2.3.2.1.2 Bemerkung: . . . 33
2.3.2.2 Rechenregeln . . . 33
2.3.2.3 Gegenbeispiele . . . 34
2.3.2.4 Uneigentliche Häufungswerte . . . 35
2.3.2.4.1 Beispiel: . . . 35
2.3.3 Punktfolgen im $\mathbb{R}^k$ . . . 35
2.3.3.0.1 Definition: . . . 35
2.3.3.1 Beispiele . . . 35
2.3.3.1.1 Satz: . . . 36
2.3.3.1.2 Folgerung: . . . 36
2.3.3.2 Beispiele . . . 36
2.3.4 Häufungspunkte für Mengen . . . 37
2.3.4.1 Definition . . . 37
2.3.4.2 Beispiele . . . 37
2.3.4.3 Bemerkungen . . . 37
2.3.4.3.1 Satz von Bolzano-Weierstraß für Mengen: . . . 38
2.4 Unendliche Reihen . . . 38
2.4.1 Definitionen . . . 38
2.4.2 Bemerkungen . . . 39
2.4.3 Beispiele . . . 39
2.4.4 Konvergenzkriterien . . . 40
2.4.4.0.1 Monotoniekriterium: . . . 40
2.4.4.0.2 Cauchy-Kriterium: . . . 40
2.4.4.1 Folgerungen . . . 41
2.4.4.1.1 Majorantenkriterium und Minorantenkriterium . 42
2.4.4.2 Beispiele . . . 42
2.4.4.2.1 Wurzelkriterium: . . . 43
2.4.4.3 Bemerkungen . . . 43
2.4.4.3.1 Beispiel: . . . 44
2.4.4.3.2 Quotientenkriterium: . . . 44
2.4.4.3.3 Beispiel . . . 44
2.4.4.4 Alternierenden Reihen . . . 45
2.4.4.4.1 Leibniz-Kriterium . . . 45
2.4.4.4.2 Beispiel: . . . 46
2.4.5 Rechnen mit Reihen . . . 46
2.4.5.0.1 Definition: . . . 47

2.4.5.0.2 Satz: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.4.5.0.3 Beispiel: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.4.5.0.4 Folgerung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.4.6 Zusammenstellung wichtiger Reihen . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.5 Potenzreihen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.5.1 Definitionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.5.1.1 Bemerkungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.5.1.2 Beispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.5.2 Konvergenzradius . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.5.2.0.1 Satz: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.5.2.0.2 Definition: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.5.2.0.3 Berechnungsformel für $\varrho(P)$: . . . . . . . . . . . . 50
2.5.2.1 Beispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.5.2.1.1 Bemerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.5.2.2 Rechenregeln für Potenzreihen . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.5.3 Elementare Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.5.3.1 Exponentialfunktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.5.3.1.1 Eigenschaften: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.5.3.1.2 Darstellung der Exponentialfunktion: . . . . . . . 54
2.5.3.2 Trignonometrische Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . 56
2.5.3.2.1 Eigenschaften: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
2.5.3.2.2 Anmerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
2.5.3.2.3 Abgeleitete Funktionen: . . . . . . . . . . . . . . . 57
2.5.3.3 Hyperbelfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
2.5.3.3.1 Eigenschaften: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
2.5.3.3.2 Abgeleitete Funktionen: . . . . . . . . . . . . . . . 58
2.5.3.4 Weitere wichtige Potenzreihen . . . . . . . . . . . . . . . 58

**3 Stetigkeit reeller Funktionen** **59**
3.1 Grenzwerte und Stetigkeit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
3.1.0.0.1 Beispiel: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
3.1.1 Grenzwert-Definition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
3.1.1.1 Beispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
3.1.1.1.1 $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium für Grenzwert einer Funktion $f$: . . 61
3.1.1.2 Bemerkungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
3.1.1.2.1 Beispiel: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
3.1.2 Definition der Stetigkeit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
3.1.2.0.1 $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium für Stetigkeit einer Funktion $f$: . . 63
3.1.2.0.2 Bemerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
3.1.2.1 Beispiele stetiger Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . 64
3.1.2.2 Unstetigkeiten reeller Funktionen . . . . . . . . . . . . . 64
3.2 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
3.2.1 Satz über den Vorzeichenerhalt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

3.2.2 Extremalsatz von Weierstraß . . . 68
3.2.2.0.1 Bemerkung: . . . 69
3.2.3 Nullstellensatz von BOLZANO . . . 69
3.2.4 Folgerungen . . . 70
3.2.4.1 Zwischenwertsatz von BOLZANO: . . . 70
3.2.4.2 Bisektionsverfahren zu Nullstellenbestimmung . . . 70
3.2.5 Stetigkeit der Umkehrfunktion (der inversen Funktion) $f^{-1}$ . . . 72
3.2.5.1 Definition (Monotonie) . . . 72
3.2.5.1.1 Beispiel: . . . 72
3.2.5.1.2 Satz über Umkehrfunktion: . . . 72
3.2.5.1.3 Anwendung: . . . 73
3.3 Weitere Klassen stetiger Funktionen . . . 73
3.3.1 Potenzreihen . . . 73
3.3.1.1 Satz über die Stetigkeit von Potenzreihen . . . 73
3.3.1.1.1 Hilfssatz: . . . 74
3.3.1.2 Anwendungen . . . 74
3.3.2 Zusammengesetzte (oder mittelbare oder verkettete) Funktionen . . . 76
3.3.2.0.1 Satz: . . . 76
3.3.2.0.2 Beispiele: . . . 76

**4 Differenzierbarkeit reeller Funktionen 77**
4.1 Differentialquotient und Differentiationsregeln . . . 77
4.1.0.1 Geometrische Motivation . . . 77
4.1.0.2 Physikalische Motivation . . . 77
4.1.1 Definition der Ableitung . . . 78
4.1.1.0.1 Folgerung: . . . 78
4.1.1.0.2 Beispiel: . . . 78
4.1.1.1 Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit 78
4.1.2 Differentiationsregeln . . . 79
4.1.2.1 Anwendungen . . . 80
4.1.2.2 Differentiation von Potenzreihen . . . 80
4.1.2.2.1 Satz: . . . 80
4.1.2.2.2 Beispiele: . . . 81
4.1.2.3 Differentiation von verketteten oder zusammengesetzten Funktionen 82
4.1.2.3.1 Beispiele: . . . 82
4.1.3 Höhere Ableitungen . . . 83
4.1.3.1 Beispiele . . . 83
4.2 Mittelwertsätze . . . 83
4.2.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . 83
4.2.1.0.1 Geometrische Deutung: . . . 84
4.2.2 Satz von ROLLE (Sonderfall des Mittelwertsatzes) . . . 84
4.2.2.0.1 Bemerkung: . . . 85
4.2.2.0.2 Beweis des Mittelwertsatzes: . . . 85

4.2.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes . . . . . 85
4.2.4 Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion . . . . . 86
4.2.4.0.1 Bemerkung: . . . . . 87
4.2.4.1 Beispiele . . . . . 87
4.2.5 Verallgemeinerter Mittelwertsatz (Quotientenmittelwertsatz) . . . . . 88
4.2.6 Folgerung (Grenzwertregel von l'Hospital) . . . . . 88
4.2.6.1 Bemerkungen . . . . . 89
4.2.6.2 Beispiele . . . . . 89
4.3 TAYLORscher Lehrsatz . . . . . 90
4.3.1 TAYLORsche Formel . . . . . 90
4.3.1.1 Bemerkungen . . . . . 90
4.3.1.2 Beweis der TAYLORschen Formel . . . . . 90
4.3.1.3 Beispiel . . . . . 91
4.3.2 Anwendungen des TAYLORschen Lehrsatzes . . . . . 92
4.3.2.1 Taylorentwicklung . . . . . 92
4.3.2.1.1 Beispiel: . . . . . 92
4.3.2.1.2 Spezialfall: . . . . . 93
4.3.2.2 Extremwertbetrachtungen . . . . . 93
4.3.2.2.1 Definitionen: . . . . . 93
4.3.2.2.2 Satz: . . . . . 94
4.3.2.2.3 Bemerkungen: . . . . . 95
4.3.2.2.4 Beispiel: . . . . . 95
4.3.2.3 Krümmungsverhalten . . . . . 96
4.3.2.3.1 Definition . . . . . 96
4.3.2.3.2 Geometrische Deutung . . . . . 96
4.3.2.3.3 Bemerkung . . . . . 96
4.3.2.3.4 Beispiel . . . . . 97

**5 Integrierbarkeit reeller Funktionen** **99**
5.1 Stammfunktionen und Integrationsregeln . . . . . 99
5.1.1 Definition . . . . . 99
5.1.2 Grundintegrale . . . . . 100
5.1.3 Folgerung . . . . . 100
5.1.3.0.1 Anwendung von 3): . . . . . 101
5.1.3.1 Beispiele . . . . . 102
5.1.3.1.1 Bemerkung: . . . . . 103
5.1.4 Integration von Potenzreihen . . . . . 103
5.1.4.1 Beispiel . . . . . 104
5.2 Integration rationaler Funktionen . . . . . 104
5.2.1 Umformung rationaler Funktionen . . . . . 104
5.2.2 Grundlegendes über Polynome . . . . . 104
5.2.3 Satz über die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen . . . . . 105
5.2.3.1 Beispiel . . . . . 106

5.2.4 Spezialisierung auf reelle rationale Funktionen . . . . . . . . . . . . 107
5.2.4.0.1 Bemerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
5.2.4.1 Beispiel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
5.3 Das RIEMANNsche Integral . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
5.3.0.2 Geometrische Motivation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
5.3.0.3 Physikalische Motivation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
5.3.1 Definitionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
5.3.1.1 Beispiele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
5.3.2 Integrierbarkeitskriterien . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
5.3.2.1 Cauchysches Integrierbarkeitskriterium . . . . . . . . . . . 112
5.3.2.1.1 Satz: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
5.3.3 Eigenschaften des RIEMANNschen Integrals . . . . . . . . . . . . . . 113
5.3.3.0.1 Bemerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114
5.3.3.1 Weitere Klassen RIEMANN-integrierbarer Funktionen . . . 114
5.3.3.2 Festlegungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114
5.4 Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung . . . . . . . . . . . . . . . . 114
5.4.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114
5.4.1.0.1 Geometrische Deutung: . . . . . . . . . . . . . . . . 114
5.4.2 Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung . . . . . . . . . . . . . 115
5.4.2.1 Kommentar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
5.4.2.2 Beweis des Hauptsatzes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
5.4.2.3 Folgerungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116
5.5 Anwendung: Elementare Integrationsmethoden . . . . . . . . . . . . . . . 116
5.5.1 Definitionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116
5.5.1.0.1 Beispiel für das Auftreten von gewöhnlichen Differentialgleichungen
5.5.1.1 Geometrische Deutung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
5.5.1.1.1 Beispiel: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
5.5.2 Differentialgleichung mit getrennten Variablen . . . . . . . . . . . . 119
5.5.2.0.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz: . . . . . . . . . . 119
5.5.2.0.2 Schematischer Lösungsweg (formal!) . . . . . . . 120
5.5.2.0.3 Beispiel: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120
5.5.3 EULER-homogene Differentialgleichung . . . . . . . . . . . . . . . . 121
5.5.3.0.1 Bemerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
5.5.3.0.2 Bemerkung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
5.5.3.0.3 Beispiel: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122
5.5.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . . . . . . . . . . . 122
5.5.4.1 Superpositionsprinzip . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122
5.5.4.1.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichung 1.
5.5.4.1.2 Bemerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123
5.5.4.1.3 Beispiel: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124
5.5.5 Reduzierbare Typen von Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . 125
5.5.5.1 Definition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125
5.5.5.2 1. Fall . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125

5.5.5.3 2. Fall . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125
5.5.5.3.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz: . . . . . . . . . . 125
5.5.5.3.2 Bemerkung: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126

# Literaturverzeichnis


[1] Fischer, H. und H. Kaul: Mathematik für Physiker 1. Teubner 1990

[2] Forster, O.: Analysis 1. Teubner 1989

[3] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis I. Teubner 1990

[4] Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure. Springer 1990

[5] Kerner, H. und W. von Wahl: Mathematik für Physiker. Springer 2006

[6] Königsberger, K.: Analysis 1. Springer 1990

[7] Wolff, M., Gloor, O. und C. Richard: Analysis alive, Birkhäuser 1998

# Kapitel 1

# Die reellen Zahlen

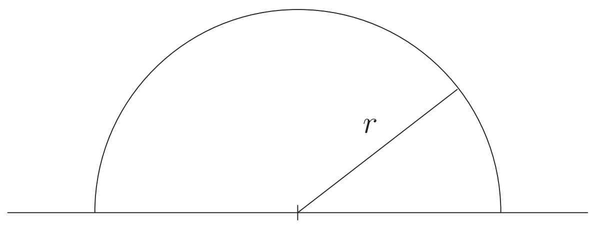
## 1.1 Einführung

In der (linearen) Algebra standen strukturelle Untersuchungen im Mittelpunkt, z.B. die Abgeschlossenheit von Mengen bezüglich der Operationen (s. Unterraum). Bei der Betrachtung von Vektorräumen ist es aus Sicht der linearen Algebra egal, welcher Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ etc. zu Grunde gelegt wird.[I]

### 1.1.1 Warum braucht man reelle Zahlen?

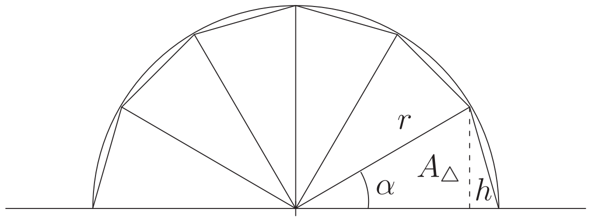
Bei vielen Problemen in Mathematik, Physik, Naturwissenschaften usw. stößt man auf Grenzprozesse, z.B. bei der Bestimmung der Momentangeschwindigkeit eines Autos, bei der Berechnung von Flächeninhalten und Volumen krummlinig begrenzter Figuren oder Körper u.ä.

#### 1.1.1.1 Beispiel: Flächeninhalt eines Halbkreises




Bestimmung mittels *Ausschöpfungsmethode* (Archimedes 287-212 v. Chr.).

[I] Nur bei der Behandlung von Polynomen zeichnet sich $\mathbb{C}$ aus.




Unterteilung des Halbkreises in Teildreiecke.

$$\text{Fläche } A_{\frown} \approx \text{ Summe der Flächen der Teildreiecke}$$

$$A_\triangle = \frac{1}{2} r h = \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha$$

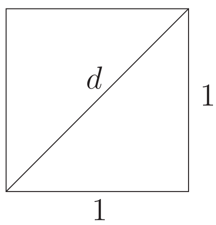
Wählt man die Unterteilung des gestreckten Winkels gleichmäßig, so ist

$$\alpha = \frac{1}{n} 180^\circ \quad \Rightarrow \quad A_{\frown} \approx \frac{n}{2} r^2 \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Für großes $n$ nähert sich anschaulich die Fläche der Teildreiecke der Fläche des Halbkreises an. In welchem Sinn ist der Grenzprozess mathematisch zu verstehen? Dabei kommt man mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht aus, weil $A_{\frown} = \pi \frac{r^2}{2}$ *nicht rational* ist.

### 1.1.1.2 Beispiel: Längenbestimmung von Strecken

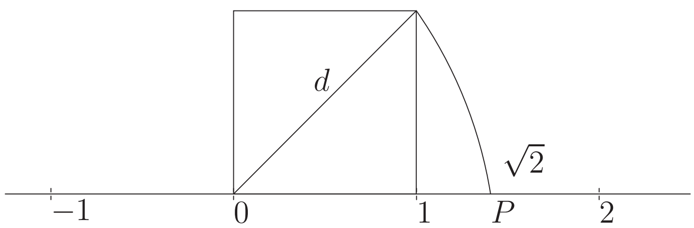
Das Problem, dass $\mathbb{Q}$ „zu klein“ ist, tritt auch bei der Längenbestimmung von Strecken auf, z.B. Länge der Diagonalen eines Quadrats mit Seitenlänge 1:




Satz des Pythagoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2, \quad d = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Die Entdeckung von Strecken mit nichtrationalen Längenmaßzahlen führte zur 1. Grundlagenkrise in der Mathematik (Lösung durch Eudoxos, 408-355 v. Chr.).



Dreht man $d$ um 0 auf die Zahlengerade, so muss die rationale Zahlengerade an der Stelle $P$ eine Lücke haben. Die rationale Zahlengerade ist lückenhaft, obwohl die rationalen Zahlen dicht liegen. [II] Genauer: Diese Zahlengerade enthält mehr Lücken als Punkte, was wir später noch präzis erklären werden. Wir werden deshalb die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ benutzen, wobei $\mathbb{R}$ neben den uns geläufigen Eigenschaften noch zusätzlichen *Axiomen* genügen muss (Axiomatischer Zugang nach David Hilbert 1862-1943).
Damit gelingt es, den Grenzübergang exakt zu erfassen. Gleichzeitig entsteht eine Vielfalt von Möglichkeiten, das Änderungsverhalten von abhängigen Größen (Funktionen) mathematisch zu beschreiben.

## 1.2 Ordnungsstruktur

Die algebraische Struktur von $\mathbb{R}$ ist gegeben durch die Körperaxiome (s. Vorlesung „Lineare Algebra"). Wir gehen davon aus, dass außerdem auf $\mathbb{R}$ eine „Kleiner-Beziehung" $a < b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ erklärt ist. „$<$" ist eine Relation, welche den folgenden Axiomen genügt.

**(O1)** *Trichotomie*

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der 3 Beziehungen: $\quad a < b, \quad a = b, \quad a > b.$[III]

**(O2)** *Transitivität*

Aus $a < b, b < c$ folgt $a < c$.

**(O3)** *Monotonie*

Ist $a < b$, so folgt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $a \cdot c < b \cdot c$ für alle $c > 0$.

Aus diesen *Ordnungsaxiomen* folgen die bekannten Rechenregeln für Ungleichungen, z.B.:

### 1.2.1 Einige Rechenregeln für Ungleichungen

I)

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad b - a > 0$$

denn

$$a < b \quad \underset{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{a + (-a)}_{=0} < b + (-a) = b - a$$

II) Addition gleichsinniger Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$$

[II] Zwischen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ liegt stets eine weitere Zahl $r_3 \in \mathbb{Q}$, z.B. $r_3 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.
[III] $a > b$ ist eine andere Schreibweise für $b < a$.

denn aus

$$\left.\begin{array}{ccc} a<b & \underset{(O3)}{\Rightarrow} & a+c<b+c \\ c<d & \Rightarrow & c+b<d+b \end{array}\right\} \underset{(O2)}{\Rightarrow} \quad a+c<b+d$$

III)

$$a \cdot b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{beide Faktoren } a, b \text{ sind entweder positiv oder negativ}$$

*Beweis:*

($\Leftarrow$) Ist $a, b > 0 \underset{(O3)}{\Rightarrow} a \cdot b > 0 \cdot b = 0.$

Ist $a, b < 0 \underset{I)}{\Rightarrow} \begin{array}{c} 0-a=-a>0 \\ 0-b=-b>0 \end{array}.$

Nach oben Bewiesenem ist

$$\underbrace{(-a)(-b)}_{=(-1)(-1)ab=ab} > 0$$

($\Rightarrow$) indirekt:

Sei

$$a > 0, b < 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0, -b > 0 \quad \underset{a)}{\Rightarrow} \quad \underbrace{a(-b)}_{-ab} > 0 \quad \Rightarrow \quad ab < 0.$$

(Analog: $a < 0, b > 0$)

IV)

$$a < b, c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc$$

denn aus $a < b$ folgt mit I):

$$b - a > 0, \quad -c > 0$$

$$\underset{III)}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(b-a)(-c)}_{=-bc+ac} > 0 \quad \underset{(O3)}{\Rightarrow} \quad ac = (ac - bc) + bc > bc$$

#### 1.2.1.1 Bezeichnungen

1) $a \leq b$ bedeutet $a < b$ oder $a = b$.

2) - abgeschlossenes Intervall

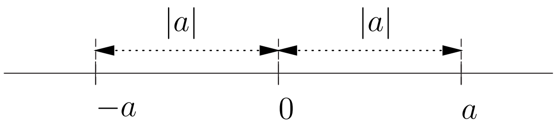
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

   - offenes Intervall

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- halboffenes Intervall (rechtsseitig offen)
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
halboffenes Intervall (linksseitig offen)
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$
- $b-a$ heißt die *Intervalllänge.*
- unendliche Intervalle
$$\begin{aligned}(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}\\ (-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}\\ [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}\\ (-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}\end{aligned}$$
- $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$, weil $\mathbb{R} = (-\infty,a] \cup (a,\infty)$

3)
$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \qquad \text{war der Betrag von } a \in \mathbb{R}\ .$$




$|a|$ ist der Abstand von $a \in \mathbb{R}$ zu 0.

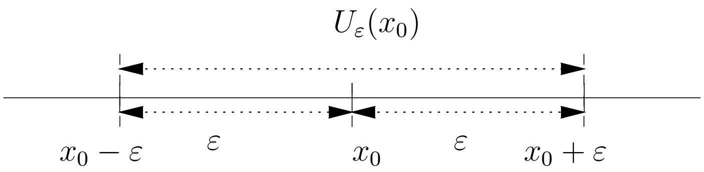
Aus der Tatsache, dass $|a|$ die euklidische Norm des Vektorraums $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ist, folgt unmittelbar:
$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a||b|, \quad |a| \geq 0, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$
Weiterhin gilt die *Dreiecksungleichung*:
$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{1.2.1.1}$$

**1.2.1.1.1 Folgerung:**
$$|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

*Beweis:*
$$|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \underset{(1.2.1.1)}{\leq} |a-b| + |b|$$
$$|a| - |b| \leq |a-b|$$
Vertauschung von $a$ und $b$ liefert
$$|b| - |a| \leq |b-a| = |-(b-a)| = |a-b|$$

**1.2.1.1.2 Satz:** Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

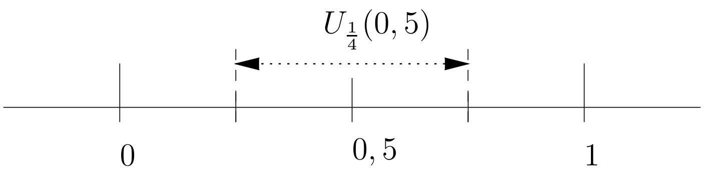
$$|x - x_0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x \in \underbrace{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)}_{\substack{=: U_\varepsilon(x_0) \\ (\varepsilon\text{-}\textit{Umgebung} \text{ von } x_0)}}$$




*Beweis:* Nach Definition von $|x - x_0|$ bedeutet $|x - x_0| < \varepsilon$ die Gültigkeit der beiden Ungleichungen $x - x_0 < \varepsilon$ und $-(x - x_0) < \varepsilon$. Nach Rechenregeln ist das äquivalent zu $x < x_0 + \varepsilon$ und $x > x_0 - \varepsilon$ .

**1.2.1.1.3 Beispiel:**

$$\begin{aligned} M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 0,5| < \varepsilon\} &\underset{(1.2.1.1.2)}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0,5 - \varepsilon < x < 0,5 + \varepsilon\} \\ &= (0,5 - \varepsilon, 0,5 + \varepsilon) = U_\varepsilon(0,5) \end{aligned}$$




## 1.2.2 Weitere nützliche Ungleichungen und Gleichungen

### 1.2.2.1 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Summen[IV]

Als unmittelbare Folgerung aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ und $z_j, w_j \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j w_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2}, \tag{1.2.2.2}$$

denn für die Vektoren $x := (|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)$, $y := (|w_1|, |w_2|, \ldots, |w_n|) \in \mathbb{R}^n$ gilt $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

[IV] Cauchy 1789-1857, Schwarz 1843-1921

#### 1.2.2.2 Binomische Formel

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k
\end{aligned}
\tag{1.2.2.3}
$$

Dabei ist $\binom{n}{k}$ der *Binomialkoeffizient* definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots, n$$

mit $\quad k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k = \prod_{j=1}^{k} j \quad$ (*k Fakultät*), $\quad 0! := 1$.

##### 1.2.2.2.1 Beispiel:

$$\binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13!} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

##### 1.2.2.2.2 Eigenschaften:

a) *Symmetrie*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(folgt aus Definition)

b) *Additionsgesetz*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(Beweis s. Übungsaufgabe, Formel bietet Möglichkeit zur rekursiven Berechnung der Binomialkoeffizienten)

##### 1.2.2.2.3 Beweis der binomischen Formel durch vollständige Induktion:

- *Induktionsanfang*

  $n = 1$:

$$(a+b)^1 = a + b = \underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} a^1 + \underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} b^1$$

- *Induktionsschluss*

  Sei (1.2.2.3) für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) \underset{\text{(IV)}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\right)(a+b)$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k}^{\text{Umbennung } k=l} + \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1}}^{\text{Indexverschiebung: } k+1=l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^{n+1-l}b^l + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l}b^l \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}} a^{n+1}b^0 + \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{l} + \binom{n}{l-1}\right]}_{=\binom{n+1}{l} \text{ nach b)}} a^{n+1-l}b^l + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1=\binom{n+1}{n+1}} a^0 b^{n+1} \\
\Rightarrow \quad (a+b)^{n+1} &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} a^{n+1-l}b^l
\end{aligned}$$

#### 1.2.2.2.4 Folgerung:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + n \cdot x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n \quad > \quad 1 + n \cdot x$$

für $n \geq 2$ und $x > 0$

Allgemeiner gilt:

### 1.2.2.3 Bernoullische Ungleichung[V]

$$(1+x)^n \quad > \quad 1 + n \cdot x \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ und } x > -1, x \neq 0 \tag{1.2.2.4}$$

*Beweis:* (durch vollständige Induktion)

- *Induktionsanfang*

  $n = 2$:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0 \text{ für } x \neq 0} \quad > \quad 1 + 2x$$

[V]Jakob Bernoulli, 1654-1705

- *Induktionsschluss* Sei (1.2.2.4) für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig.

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{>0}(1+x)^n \underset{(IV)}{>} \underbrace{(1+x)(1+n\cdot x)}_{=1+(n+1)x+nx^2}$$

Weil

$$1+(n+1)x+n\cdot x^2 > 1+(n+1)x$$

gilt, folgt aus (O2)

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$$

## 1.3 Vollständigkeitseigenschaften der reellen Zahlen

Die Vorstellung von der „Lückenlosigkeit“ der *reellen* Zahlengerade wurde von R. Dedekind (1831-1916) axiomatisch gefasst *(Axiom vom Dedekindschen Schnitt)*. Wir verwenden hier eine äquivalente Fassung dieses Axioms.

### 1.3.1 Definitionen

a) $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $x \leq c$ für alle $x \in M$.

b) Ein solches $c$ heißt *obere Schranke* von $M$.

c) Eine obere Schranke $c$ von $M$ heißt *obere Grenze* oder *Supremum* von $M$ ($c = \sup M$), falls jedes $c' < c$ *keine* obere Schranke ist.

d) Gehört $c = \sup M$ zu $M$, so heißt $c$ *Maximum* ($c = \max M$).

e) $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt*, falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $x \geq c$ für alle $x \in M$.

f) Ein solches $c$ heißt *untere Schranke* von $M$.

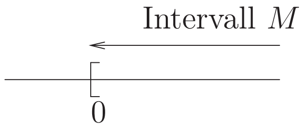
g) Eine untere Schranke $c$ von $M$ heißt *untere Grenze* oder *Infinum* von $M$ ($c = \inf M$), falls jedes $c' > c$ *keine* untere Schranke ist.

h) Gehört $c = \inf M$ zu $M$, so heißt $c$ *Minimum* ($c = \min M$).

i) $M$ heißt *beschränkt*, falls $M$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h. es gibt $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 \leq x \leq c_2$ für alle $x \in M$.

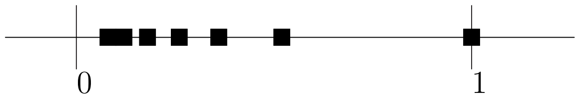
### 1.3.2 Beispiele

1. $M = [0, \infty)$



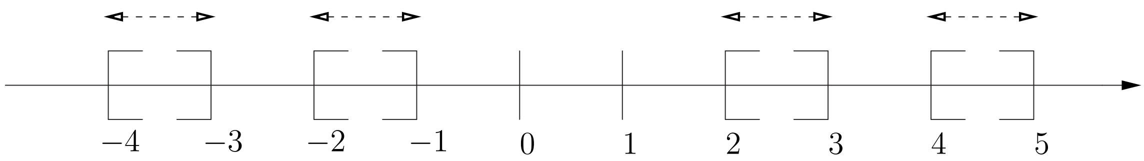

   - keine obere Schranken
   - untere Schranke: $-1, -\pi, -2^{10}, \ldots, 0$
   - $0 = \inf M = \min M$, da $0 \in M$

2. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$




   - obere Schranken: $2, 42, 678, \pi^2, \ldots, 1$
   - $1 = \sup M = \max M$, da $1 \in M$
   - untere Schranken: $-10, -4, \ldots, 0$
   - $0 = \inf M$, aber es gibt kein $\min M$, weil $0 \notin M$. 0 ist die größte aller unteren Schranken von $M$, weil für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für $n$ „genügend groß", d.h. $n > \frac{1}{\varepsilon}$

3. $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-2n, -2n+1) \cup [2n, 2n+1))$




   $M$ ist unbeschränkt.

##### 1.3.2.0.1 Analytische Charakterisierung von $\sup M$:

$$c = \sup M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i)} & x \leq c \text{ für alle } x \in M \\ \text{ii)} & \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } y \in M \text{ mit } c - \varepsilon < y \end{cases}$$

### 1.3.3 Vollständigkeitsaxiom

Es gilt das *Supremumprinzip*, d.h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

**1.3.3.0.1 Bemerkungen:**

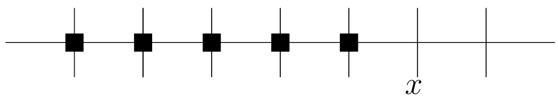
1) Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt auch das *Infimumprinzip*, denn für eine nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist die Menge $\tilde{M} := \{x \in \mathbb{R} | -x \in M\}$ nach oben beschränkt. Somit existiert $s = \sup \tilde{M}$ und $\inf M = -s$.

2) Das Supremum einer nach oben beschränkte Menge ist eindeutig bestimmt, was sich unmittelbar aus der Definition ergibt.

3) Durch die Körper-, Ordnungs- und Vollständigkeitsaxiome wird $\mathbb{R}$ eindeutig definiert. $\mathbb{R}$ bildet einen *vollständigen angeordneten Körper*, $\mathbb{Q}$ dagegen nur einen *angeordneten Körper*.

### 1.3.4 Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom

**1.3.4.0.1 Definition:** Sei $M = M(x) := \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$




zu gegebenem $x \in \mathbb{R}$. Nach 1.3.3 existiert

$$\sup M(x) =: [x] \ .$$

**Behauptung:** Dabei ist $[x]$ charakterisiert durch:

i) $[x] \in \mathbb{Z}$

ii) $[x] \leq x < [x] + 1$

$[x]$ heißt *größter ganzer Anteil* der reellen Zahl $x$ und ist eine Abbildung $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

*Beweis:*

Sei $x \geq 0$. Dann ist

$$\sup M(x) = \sup \underbrace{\{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq x\}}_{=:M_0}$$

Da $M_0$ endlich viele Elemente hat, gibt es ein größtes Element $n_0 \in M_0$:

$$n_0 = \max M_0 = \sup M(x) = [x] \leq x$$

$n_0 + 1$ ist obere Schranke von $M$, $n_0 + 1 \notin M$, d.h. $n_0 + 1 > x$.

(Fall $x < 0$ lässt sich durch Verschiebung lösen.)

#### 1.3.4.0.2 Beispiele:

1) $[\frac{16}{13}] = 1$

2) $[405,8] = 405$

3) $[-0,62] = -1$

4) $[-24] = -24$

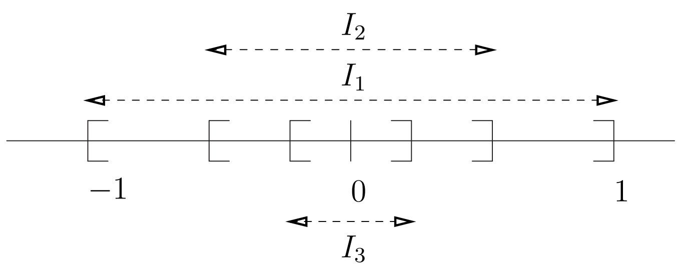
### 1.3.4.1 Intervallschachtelung

Sei $I_n = [a_n, b_n]$ und $L_n := b_n - a_n$ (Länge von $I_n$) für $n \in \mathbb{N}$. $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ heißt *Intervallschachtelung*, wenn

a) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so dass $L_{n_0} < \varepsilon$.

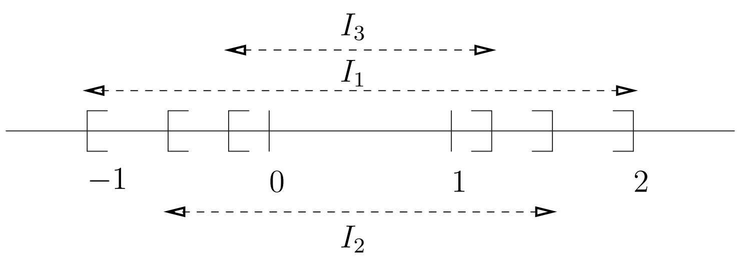
#### 1.3.4.1.1 Beispiel:




$$I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \quad n \in \mathbb{N}$$

ist Intervallschachtelung, denn a) ist offensichtlich, und b) gilt, weil $L_n = \frac{2}{n} < \varepsilon$ für $n > \frac{2}{\varepsilon}$ Es ist $0 \in I_n$ für jedes $n$, mit anderen Worten $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

#### 1.3.4.1.2 Gegenbeispiel:




$$I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

Hier liegt *keine* Intervallschachtelung vor, obwohl a) erfüllt ist. Jedoch gilt Bedingung b) nicht ($L_n > 1$).

**1.3.4.1.3 Prinzip der Intervallschachtelung:** Jede Intervallschachtelung $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zieht sich auf einen Punkt zusammen, d.h. es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
*Beweis:*

i) Nach Definition gilt wegen a)

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$$

Damit ist $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt durch jedes $b_m$. Nach Supremumprinzip gibt es $\sup A$ mit

$$a_m \leq \sup A \leq b_m \quad \Leftrightarrow \quad \sup A \in I_m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

ii) Zur Eindeutigkeit *(indirekt)*:
Sei $x, x' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ mit $x \neq x'$. Setze $\varepsilon = |x - x'|$. Nach b) gibt es $n_0$ mit $L_{n_0} < \varepsilon$. Wegen $x, x' \in I_{n_0}$ ist $L_{n_0} \geq |x - x'| = \varepsilon$. Das führt auf $\varepsilon \leq L_{n_0} < \varepsilon$ und damit auf einen Widerspruch.

### 1.3.5 Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen

Ein Symbol der Form

$$z_1\, z_2 \ldots z_h, z_{h+1} \ldots$$

mit

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

heißt *Dezimalbruch* mit den *Ziffern* $z_i$. Jedem solchen Bruch wird durch die Festlegungen

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} z_i 10^{h-i}, \quad b_n = a_n + 10^{h-n}$$

und

$$I_n = [a_n, b_n], \quad L_n = 10^{h-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

eine Intervallschachtelung zugeordnet. Ist $x$ die gemäß 1.3.4.1.3 eindeutig bestimmte reelle Zahl, die allen Intervallen angehört, dann schreiben wir

$$x = z_1\, z_2 \ldots z_h, z_{h+1} \ldots .$$

Umgekehrt existiert zu jeder positiven reellen Zahl $x$ ein eindeutig bestimmter Dezimalbruch, so dass $x$ in allen Intervallen $I_n$ enthalten und dabei *nie rechter Endpunkt*[VI] ist. Bei der Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl wird vereinbart, führende Nullen bei $h > 1$ wegzulassen (o.B.d.A. sei $z_1 \neq 0$) und ebenfalls Nullperioden $\overline{0}$ am Ende.

[VI] Das entspricht dem Verbot des Auftretens von 9-Perioden.

**1.3.5.0.1 Bemerkung:** Wählt man eine andere Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ anstelle von $b = 10$, d.h. man unterteilt ein Intervall nicht in 10 sondern in $b$ Teilintervalle, so erhält man allgemeiner die $b$-Bruchentwicklung einer reellen Zahl mit

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, \quad a_n = \sum_{i=1}^{n} z_i b^{h-i}, \quad b_n = a_n + b^{h-n},$$

Wichtige Fälle: $b = 2$ *(Dualbruchentwicklung)*, $b = 16$ *(Hexadezimalbruchentwicklung)*.

### 1.3.5.1 Anwendung: Nachweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

**1.3.5.1.1 Bemerkung:** Um eine gewisse Klassifizierung von unendlichen Mengen zu erhalten, verwendet man die Menge der natürlichen Zahlen und führt folgenden Begriff ein: Eine Menge $M$ heißt *abzählbar (unendlich)*, falls es eine bijektive Abbildung von $M$ auf $\mathbb{N}$ gibt, d.h. man kann die Elemente von $M$ durchnummerieren.

**1.3.5.1.2 Behauptung:** Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist ist abzählbar.

*Beweis:* (durch erstes CANTORsches Diagonalverfahren)[VII]
Die Menge $\mathbb{Q}_p$ aller positiven rationalen Zahlen kann in folgendes unendliches rechteckiges Schema geschrieben werden:

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \boxed{\frac{2}{2}} & & \frac{3}{2} & & \boxed{\frac{4}{2}} & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \boxed{\frac{3}{3}} & & \frac{4}{3} & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{4} & & \boxed{\frac{2}{4}} & & \frac{3}{4} & & \boxed{\frac{4}{4}} & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Nummeriert man die Zahlen dieses Schemas entlang der Pfeile, so erhält jedes Element aus $\mathbb{Q}_p$ genau eine Nummer. Dabei wird jede rationale Zahl nur bei ihrem ersten Auftreten berücksichtigt, d.h. die Zahlen in $\boxed{\phantom{x}}$ werden übergangen. Somit ist $\mathbb{Q}_p = \{r_k \,|k \in \mathbb{N}\}$. abzählbar.

---

[VII] G. Cantor, 1845-1918

Da $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_p \cup \{0\} \cup \{x = -r_k \,|\, r_k \in \mathbb{Q}_p\}$, lassen sich die Elemente von $\mathbb{Q}$ in folgender Weise bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden:

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{Q}: & 0 & r_1 & -r_1 & r_2 & -r_2 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Es gibt jedoch unendliche Mengen, welche nicht abzählbar sind. Diese heißen *überabzählbar*, z.B. ist $\mathbb{R}$ überabzählbar. Den Beweis führen wir durch Verwendung von Dezimalbrüchen zur Darstellung der Elemente von $\mathbb{R}$ und zeigen

**1.3.5.1.3 Behauptung:** $[0, 1)$ ist nicht abzählbar.

*Beweis:* (indirekt, mittels zweitem CANTORschen Diagonalverfahren)
Wäre $[0, 1)$ abzählbar, so $[0, 1) = \{c_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ und alle Elemente von $[0, 1)$ lassen sich darstellen in dem unendlichen Schema

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots \\ c_2 &= 0, x_{21}x_{22}x_{23}\dots \\ c_3 &= 0, x_{31}x_{32}x_{33}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

mit $x_{kl} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Bilden wir nun die relle Zahl

$$y := 0, y_1y_2y_3\dots \quad \text{mit den Ziffern} \quad y_n := \begin{cases} x_{nn} - 1 & \text{für } x_{nn} \geq 1 \\ 8 & \text{für } x_{nn} = 0 \end{cases}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist $y \in [0, 1)$. Andererseits kann dieses $y$ nach Konstruktion in keiner Zeile des obigen Schemas auftreten, denn $c_n$ hat an der $n$-ten Nachkommastelle die Ziffer $x_{nn}$, während $y$ dort die Ziffer $y_n \neq x_{nn}$ hat. Damit ergibt sich der Widerspruch.

# Kapitel 2

# Folgen und Reihen

## 2.1 Der Grenzwertbegriff

### 2.1.1 Definition: Zahlenfolge

Eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

heißt *(reelle) Zahlenfolge* und wird mit

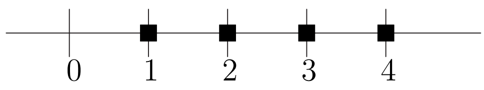
$$(a_n) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

bezeichnet.

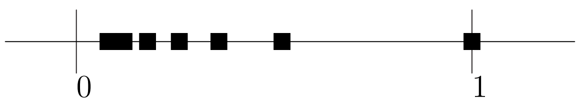
**2.1.1.0.1 Bemerkung:** $(a_n)$ heißt für das *geordnete* unendliche Tupel reeller Zahlen $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

#### 2.1.1.1 Beispiele

1) $(a_n) = (n)$




2) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$




3) $(a_n) = (c) = (c, c, c, \ldots)$

4) $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, +1, -1, +1, \ldots)$

5) Radioaktiver Zerfall

   Wir betrachten den Zerfallsprozess einer radioaktiven Substanz mit der Masse $m(t)$ zur Zeit $t \in [0, T]$.
   Mathematisches Modell: In einem hinreichend kleinen Zeitintervall $\Delta t > 0$ ist die Massenänderung $\Delta m$ proportional zu $m(t)$ und $\Delta t$, d.h.

$$m(t + \Delta t) = m(t) - \Delta m = m(t) - \lambda m(t)\Delta t$$

   mit einer *Zerfallskonstanten* $\lambda > 0$. Wir beobachten in gleichen Zeitabständen $\Delta t = \frac{T}{n}$ $n \in \mathbb{N}$ zu den Zeitpunkten $t_k = \frac{k}{T}$, $k = 0, \ldots, n$ und erhalten die Werte:

$$m_0 = m(t_0) = m(0),\ m_{1,n} = m(t_1) = m_0 - \Delta m(t_0) = m_0 \left(1 - \lambda \frac{T}{n}\right)^1,$$

$$m_{2,n} = m(t_2) = m_{1,n} - \Delta m(t_1) = m_{1,n} \left(1 - \lambda \frac{T}{n}\right) = m_0 \left(1 - \lambda \frac{T}{n}\right)^2,$$

$$\vdots$$

$$m_{k,n} = m(t_k) = m_0 \left(1 - \lambda \frac{T}{n}\right)^k,$$

$$\text{mit dem Endwert} \quad m_{n,n} = m(t_n) = m(T) = m_0 \left(1 - \lambda \frac{T}{n}\right)^n =: a_n.$$

   Die Beschreibungung wird um so genauer werden, je kleiner $\Delta t$ bzw. je größer $n$ wird. Nachteil: Endwert hängt ab von $n$. Deshalb sucht man einen von $n$ unabhängigen Wert $a$, so dass für genügend große $n$ die Werte $a_n$ um weniger als eine vorgegebene Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ von $a$ abweichen, also $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a)$ gilt.

### 2.1.2 Definition: Konvergenz

Eine Zahlenfolge $(a_n)$ *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \qquad (\varepsilon\text{-}n_0\text{-}\textit{Abschätzung}) \tag{2.1.2.1}$$

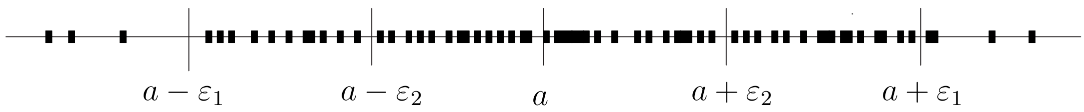
$a$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* von $(a_n)$.

*Symbolisch:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ (für } n \to \infty)$$

Eine Zahlenfolge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

**2.1.2.0.1 Interpretation:** (2.1.2.1) besagt, dass *fast alle* $a_n$, d.h. alle bis endlich viele Ausnahmeglieder der Zahlenfolge $(a_n)$, in einer $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von $a$ liegen.




**2.1.2.0.2 Folgerung:** Ändert man *endlich viele* Glieder von $(a_n)$ ab, so verändert sich das Konvergenzverhalten von $(a_n)$ nicht.

### 2.1.2.1 Beispiele

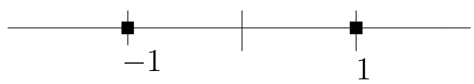
1) $(a_n) = (c)$. Wähle

$$a = c \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| = |c - c| = 0 \quad < \quad \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, also $n_0(\varepsilon) = 1$. d.h.

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

2) $(a_n) = ((-1)^n)$ konvergiert nicht, denn $a_{2k} = 1$ und $a_{2k-1} = -1$ $(k \in \mathbb{N})$).




$$\Rightarrow \quad |a_{2k} - 1| = 0, \text{ aber } |a_{2k-1} - 1| = 2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

(analog für $-1$)

3) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

denn

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $n_0(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Ungleichung (2.1.2.1).

*Genauer:*

$$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

4) $(a_n) = (q^n)$.
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ für } 0 < |q| < 1$$
denn $\frac{1}{|q|} > 1$, somit $\frac{1}{|q|} = 1 + x$ mit $x > 0$.
$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+x)^n \underset{(1.2.2.4)}{>} 1 + nx \text{ für } n \geq 2$$
Damit ist
$$|q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} < \varepsilon \quad \text{für } n > \frac{1}{\varepsilon x} = \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}$$
*Genauer:* Wähle zu $\varepsilon > 0$ den Index
$$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}\right] + 1$$
Dann ist für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Ungleichung (2.1.2.1) richtig.

#### 2.1.2.2 Eigenschaften konvergenter Folgen

1) Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge $(a_n)$ ist eindeutig bestimmt.

*Beweis:*

Seien $a, a'$ Grenzwerte von $(a_n)$ mit $|a - a'| > 0$. Nach Definition gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon), n_0'(\varepsilon)$:
$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |a_n - a'| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0'(\varepsilon)$$
Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - a'|$ und $n \geq \max\{n_0(\varepsilon), n_0'(\varepsilon)\}$. Dann ist
$$|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a') \leq \underbrace{|a - a_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a'|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = |a - a'|$$
$\Rightarrow$ Widerspruch
$$\Rightarrow \quad a = a'$$

2) Jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)$ ist beschränkt, d.h. $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben und unten beschränkt.

*Beweis:*

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gilt $a_n \in U_1(a)$ ($\Leftrightarrow |a_n - a| < 1$) für alle $n \geq n_0(1)$, d.h.
$$a - 1 \leq a_n \leq a + 1$$
Die restlichen Glieder $a_1, \ldots, a_{n_0(1)-1}$ bilden eine endliche Menge, welche ein Maximum $M$ und ein Minimum $m$ hat.
$$\min\{m, a-1\} \leq a_n \leq \max\{M, a+1\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

**Achtung:** Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht, so zum Beispiel: $(a_n) = ((-1)^n)$.

##### 2.1.2.2.1 Anwendung: $(a_n) = (n)$ ist unbeschränkt und damit divergent.

#### 2.1.2.3 Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen

Sei $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:

1. *Summensatz*

$$a_n \pm b_n \to a \pm b$$

(Der „–“-Fall ergibt sich als Folgerung mit 2.)

*Beweis:*

Nach Definition ist:

$$\begin{aligned} |a_n - a| < \varepsilon \quad &\text{für} \quad n \geq n_0(\varepsilon) \\ |b_n - b| < \varepsilon \quad &\text{für} \quad n \geq \hat{n}_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$
$$\text{für } n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon) := \max\{n_0(\varepsilon), \hat{n}_0(\varepsilon)\}$$

2. *Produktsatz*

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$$

(Spezialfall: $\alpha \cdot a_n \to \alpha \cdot a$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$)

*Beweis:*

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| &\leq |a_n - a| \overbrace{|b_n|}^{\leq K} + |b_n - b||a| \\ &< \varepsilon K + \varepsilon|a| \quad \text{für } n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

3. *Quotientensatz*

$$\text{Ist } b \neq 0, \text{ so ist } b_n \neq 0 \text{ für } n \geq n_1 \text{ und } \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

*Beweis:*

Nach 6. ist $|b_n| \to |b| \neq 0$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}|b|$, dann ist

$$|b| + \varepsilon > |b_n| > |b| - \varepsilon = \tfrac{1}{2}|b| \text{ für } n \geq \hat{n}_0\left(\tfrac{1}{2}|b|\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{c}_n := \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b \cdot b_n|} < \frac{2}{|b|^2}|b - b_n|$$

Mit 5. ist

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \tilde{c}_n < \underbrace{\frac{2}{|b|^2}|b - b_n|}_{\to 0} \Rightarrow \tilde{c}_n \to 0, \quad \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$$

Produktregel ergibt Behauptung.

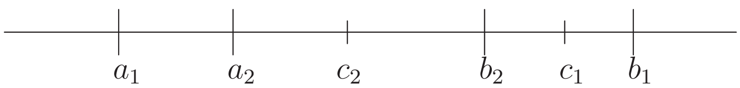
4. *Vergleichssatz*

$$\text{Ist } a_n \leq b_n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \text{ so} \qquad a \leq b.$$

*Beweis:* (s. Übungsaufgabe)

5. *Einschnürungssatz* (Polizistenregel, Sandwichsatz)

$$\text{Ist } a = b \text{ und } a_n \leq c_n \leq b_n, \text{ so} \qquad c_n \to a.$$




*Beweis:*

Nach Definition gilt $a - \varepsilon < a_n, b_n < a + \varepsilon$ für $n \geq \tilde{n}_0(\varepsilon)$.

$$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

d.h. $c_n \to a$.

6. *Betragssatz*

$$|a_n| \to |a|$$

*Beweis:*

Nach Definition gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0(\varepsilon)$. Wegen Dreiecksungleichung ist

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon \text{ für dieselben } n \in \mathbb{N}.$$

#### 2.1.2.4 Bemerkungen

i) Regeln 1.-3. schreibt man in der Form

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

(Gleichungen sind von rechts nach links zu verstehen!)

ii)

$$a_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad a_n - a \to 0 \quad \underset{\underset{\text{Def.}}{\Leftarrow}}{\overset{6.}{\Rightarrow}} \quad |a_n - a| \to 0$$

#### 2.1.2.5 Weitere Beispiele

i)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)}_{k\text{-Faktoren}} = 0$$

nach $k$-facher Anwendung der Produktregel, $k \in \mathbb{N}$.

ii)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

Denn setzen wir $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$, so müssen wir zeigen $a_n \to 0$. Dazu benutzen wir den Einschnürungssatz.

$$n = (a_n+1)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \binom{n}{1}a_n + \binom{n}{2}a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n}a_n^n \quad \geq \quad 1 + \binom{n}{2}a_n^2$$

weil $a_n > 0$ für $n \geq 2$.

$$\Rightarrow \quad a_n^2 \leq \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}_{\to 0}$$

weil

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}} = 0 \qquad \text{(s. Übungsaufgabe)}$$

$$\Rightarrow a_n \to 0$$

iii) Wogegen konvergiert $\left(\sqrt[n]{q}\right)$ für $q > 0$?

1. Fall: $q > 1$
Da es $n_1 \in \mathbb{N}$ gibt mit $n_1 > q$, folgt für alle $n \geq n_1$:

$$n \geq n_1 > q \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\substack{\to 1 \\ \text{ii)}}} > \sqrt[n]{q} > 1 \quad \underset{5.}{\Rightarrow} \quad \sqrt[n]{q} \to 1$$

2. Fall: $0 < q < 1$
$a := \frac{1}{q}$, so ist $a > 1$. Nach 1. Fall

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$$

nach Quotientenregel.

## 2.2 Konvergenzkriterien für Folgen

Kann man Rechenregeln auf eine gegebenene Zahlenfolge nicht direkt anwenden, so bleibt nur die $\varepsilon$-$n_0$-Abschätzung und das Erraten des Grenzwerts.
*Frage:* Kann man aus den inneren Eigenschaften einer Zahlenfolge (d.h. ohne Kenntnis des Grenzwerts) auf deren Konvergenz schließen?

### 2.2.1 Monotone Zahlenfolgen

#### 2.2.1.1 Definition

- Zahlenfolge $(a_n)$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Zahlenfolge $(a_n)$ heißt *monoton fallend*, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Wird „=“ nicht zugelassen, so spricht man von *strenger Monotonie*.

**2.2.1.1.1 Beispiel:** In Anlehnung an die Folge $\left(m_0 \left(1 - \lambda \frac{T}{n}\right)^n\right)$ aus dem Beispiel des radioaktiven Zerfalls betrachten wir $(a_n)$ gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. $(a_n)$ ist streng monoton wachsend:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \quad < \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

denn

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} < \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\frac{1}{(n+1)^k}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n^k}{(n+1)^k} > \frac{n+1-k}{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k > 1-\frac{k}{n+1}$$

Die letze Relation gilt für $k \geq 2$ wegen Bernoullischer Ungleichung (1.2.2.4).

2. $(a_n)$ ist beschränkt.

$$a_1 = 2,\ a_2 = 2,25, \ldots$$

Wegen 1. ist $a_n > a_1 = 2$ für $n \geq 2$.

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{k!} \quad \leq \quad 1\cdot\frac{1}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} \quad \leq \quad \frac{1}{2^{k-1}}$$

für $k \geq 2$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \quad \leq \quad \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} + 1 + 1 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}} + 1$$

$$a_n \leq 2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1 < 3$$

*Frage:* Konvergiert $(a_n)$?
Allgemein gilt das *Monotonieprinzip.*

### 2.2.1.2 Monotonieprinzip

- Ist $(a_n)$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so

$$a_n \to \sup a_n := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- Ist $(a_n)$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so

$$a_n \to \inf a_n := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

*Beweis:*
Sei $(a_n)$ beschränkt und monoton wachsend und $a := \sup a_n$. Nach Definition gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0}$$

Wegen Monotonie ist $a_n \geq a_{n_0}$ für $n \geq n_0$.

$$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_n \leq a$$

d.h. $a_n \in U_\varepsilon(a)$.

Das Monotonieprinzip kann auch umformuliert werden zu:

Eine monotone Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist.

(*Beachte!*: Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.)

#### 2.2.1.3 Anwendung

1) Definition der Eulerschen Zahl $e$

   $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ konvergiert gegen $\sup\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$ , mit anderen Worten:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \ .$$

2) *Dichtheit* von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

   Sei $x \in \mathbb{R}$, so existiert die Dezimalbruchentwicklung von $x$. Dabei ist

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ , \ \ I_n = [a_n, b_n].$$

   d.h. $a_n \leq x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist $a_{n+1} \geq a_n$, also $(a_n)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt (z.B. durch $x$). Nach dem Monotonieprinzip gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = x$$

   (s. Beweis zum Intervallschachtelungsprinzip)

   Da $a_n \in \mathbb{Q}$ ist, lässt sich somit jedes reelle $x$ (auch falls $x \notin \mathbb{Q}$) als Grenzwert einer Folge *rationaler* Zahlen erhalten, d.h. beliebig gut durch rationale Zahlen approximieren (annähern).

## 2.2.2 Teilfolgen

**2.2.2.0.1 Definition:** Sei $(n_k)_{k=1}^{\infty} = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so ist $(a_{n_k})$ eine *Teilfolge* von $(a_n)$,
in Zeichen: $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$

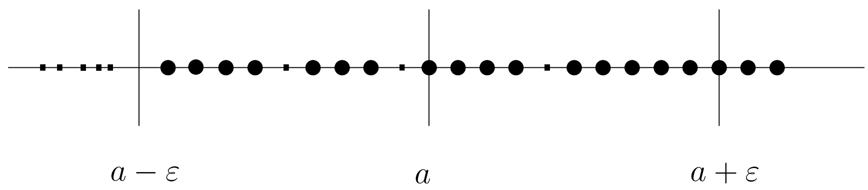
### 2.2.2.1 Teilfolgenprinzip

Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn jede ihrer Teilfolgen gegen $a$ konvergiert.

*Beweis:*

a) $(\Leftarrow)$ Da $(a_n)$ selbst eine Teilfolge von $(a_n)$ ist, folgt $a_n \to a$.

b) $(\Rightarrow)$ Sei jetzt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$.




Dann ist wegen

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

$n_k \geq k$ für $k \in \mathbb{N}$ und folglich

$$a_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ für alle } k \geq n_0(\varepsilon)$$

(Beachte: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0(\varepsilon)$.)

**2.2.2.1.1 Beispiel:** Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Damit ist auch

- mit $n_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} = e$$

- mit $n_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^{k^2} = e$$

**2.2.2.1.2 Bemerkung:** Logische Negation liefert Kriterium für Divergenz einer Zahlenfolge.

**2.2.2.1.3 Beispiel:**

$$(a_n) = ((-1)^n)$$

$$\begin{array}{rll} n_k = 2k: & (a_{2k}) = (1) = (1, 1, \ldots) & \text{(Konvergenz gegen } +1) \\ n_k = 2k-1: & (a_{2k-1}) = (-1) = (-1, -1, \ldots) & \text{(Konvergenz gegen } -1) \end{array}$$

Teilfolgen spielen wichtige Rolle beim Studium des Verhältnisses von Beschränktheit und Konvergenz von Zahlenfolgen.

Bekannt ist: Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, aber:

### 2.2.3 Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß

(Bolzano 1781-1848, Weierstraß 1815-1897)

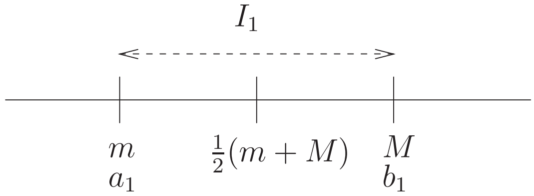
Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

*Beweis:*

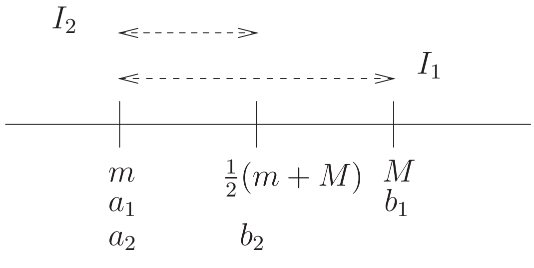
Wir verwenden die *Intervallhalbierungsmethode* (*Bisektion*).

i) Sei $(c_n)$ eine beschränkte Zahlenfolge, d.h. $m \leq c_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

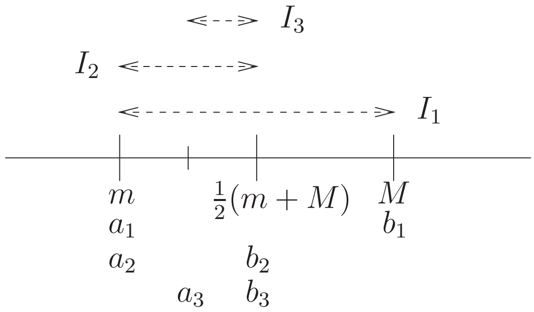
Setze $I_1 := [m, M] = [a_1, b_1]$.




Halbiere $I_1$ und wähle als $I_2 = [a_2, b_2]$ dasjenige Halbintervall, in dem unendlich viele $c_n$ liegen.



Halbiere $I_2$ und wähle als $I_3 = [a_3, b_3]$ dasjenige Halbintervall, in dem unendlichviele $c_n$ liegen, usw.




Damit entsteht eine Intervallschachtelung: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ ,

$$L_{n+1} = \frac{1}{2}L_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}L_{n-1} = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n L_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (M-m) \quad \to \quad 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung gibt es $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, genauer

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

ii) Auswahl von $(c_{n_k}) \subseteq (c_n)$ nach folgendem Schema:
Sei $c_{n_k} \in I_k$ gewählt, dann gibt es $c_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ mit $n_{k+1} > n_k$, weil in $I_{k+1}$ unendlich viele $c_n$ liegen.

$$c_{n_k} \in I_k \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{a_k}_{\to x} \leq c_{n_k} \leq \underbrace{b_k}_{\to x} \qquad \text{für } k \to \infty$$

Nach dem Einschnürungssatz folgt

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_k} = x \ .$$

### 2.2.4 CAUCHY-Folgen

**2.2.4.0.1 Beobachtung:** Verdichtungseigenschaft konvergenter Folgen:
Nach Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es $\tilde{n}_0 := n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \geq \tilde{n}_0$$

$$\Rightarrow \quad |a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ falls } n, m \geq \tilde{n}_0$$

d.h.: „Späte“ Glieder einer konvergenten Zahlenfolge liegen beliebig dicht beieinander.

**2.2.4.0.2 Definition:** Die Zahlenfolge $(a_n)$ heißt CAUCHY-*Folge* oder *Fundamentalfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$.

#### 2.2.4.1 CAUCHYsches Konvergenzprinzip

Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist.

*Beweis:*

i) $(\Rightarrow)$ s. o.

ii) $(\Leftarrow)$ Erfülle $(a_n)$ die Bedingung von 2.2.4.0.2.

1. Schritt: $(a_n)$ ist beschränkt. Wähle in 2.2.4.0.2 $\varepsilon = 1$. Dann gilt mit $n_1 = n_0(1)$:

$$\begin{aligned} & |a_n - a_{n_1}| < 1 \text{ für } n \geq n_1 \\ \Rightarrow \quad & |a_n| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1}| \leq 1 + |a_{n_1}| \text{ für dieselben } n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad & |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_1-1}|, 1 + |a_{n_1}|\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Nach 2.2.3 gibt $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

2. Schritt: Wir zeigen $a_n \to a$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für $k \geq k_0(\varepsilon)$.

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{<\varepsilon (\text{wegen } 2.2.4.0.2)} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

für $n \geq n_0(\varepsilon)$ und $k \geq \max\{k_0(\varepsilon), n_0(\varepsilon)\}$. $(n_k \geq k)$

**2.2.4.1.1 Beispiel:** Wir definieren eine Zahlenfolge $(a_n)$ rekursiv durch

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} := \frac{2 + a_n}{1 + a_n}$$

Gesucht: $\lim_{n\to\infty} a_n$

*Idee:* Grenzübergang $n \to \infty$ in Bildungsvorschrift, falls $(a_n)$ konvergiert.[I]

Nachweis, dass $(a_n)$ eine CAUCHY-Folge ist: Mittels vollständiger Induktion ergibt sich $1 \leq a_n \leq 2$. (Übung!)

[I]Daher muss die Zahlenfolge zunächst immer auf Konvergenz untersucht werden.

$m > n$:

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \left|1 + \frac{1}{1 + a_{m-1}} - \left(1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}\right)\right| = \frac{|a_{n-1} - a_{m-1}|}{|(1 + a_{m-1})(1 + a_{n-1})|} \\
&\leq \frac{|a_{m-1} - a_{n-1}|}{4} \leq \frac{|a_{m-2} - a_{n-2}|}{4^2} \\
&\leq \ldots \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |a_{m-n+1} - a_1| \\
&\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\underbrace{|a_{m-n+1}|}_{\leq 2} + \underbrace{|a_1|}_{\leq 2}) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot 16
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ gibt es $n_0(\varepsilon)$:

$$|a_m - a_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 16 = \left|\left(\frac{1}{4}\right)^n - 0\right| \cdot 16 < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon)$$

d.h. 2.2.4.0.2 ist erfüllt. Nach 2.2.4.1 existiert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ mit } a \in [1, 2]$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{=a} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + a_n}{1 + a_n} = \frac{2 + a}{1 + a} \quad \Rightarrow \quad a(1 + a) = 2 + a$$

$$a^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

# 2.3 Häufungswerte und Häufungspunkte

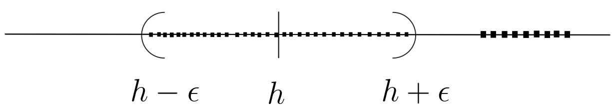
## 2.3.1 Häufungswerte von Zahlenfolgen

**2.3.1.0.1 Definition:** Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert* einer Zahlenfolge $(a_n)$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k}) \subseteq (a_n)$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = h$.

### 2.3.1.1 Folgerungen

1. Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so hat $(a_n)$ nur den einen Häufungswert (wegen Teilfolgenprinzip 2.2.2.1).

2. $h$ ist Häufungswert von $(a_n)$. $\Leftrightarrow$ Für jedes $\epsilon > 0$ liegen unendlich viele $a_n$ in $U_\varepsilon(h)$.



Beachte: Unendlich viele der $a_n$ können auch außerhalb von $U_\varepsilon(h)$ sein.

Zum Beispiel: $(a_n) = (-1)^n$ hat die Häufungswerte $+1$ und $-1$.

3. Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß 2.2.3 lautet jetzt:

   Jede beschränkte Zahlenfolge hat mindestens einen Häufungswert.

Die Menge der Häufungswerte von $(a_n)$ heißt oft *Limesmenge* und sei mit $\mathcal{L}(a_n)$ bezeichnet.

**2.3.1.1.1 Beispiele:**

a) $(a_n) = ((-1)^n) \Rightarrow \mathcal{L}\left((-1)^n\right) = \{-1, 1\}$,

b) $(a_n) = (\sqrt[n]{n}) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\sqrt[n]{n}\right) = \{1\}$,

c) $(a_n) = (n) \Rightarrow \mathcal{L}(n) = \emptyset$.

**2.3.1.1.2 Bezeichnungen:**

$$\begin{aligned} \inf \mathcal{L}(a_n) &=: \liminf a_n = \underline{\lim}\, a_n \\ \sup \mathcal{L}(a_n) &=: \limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n \end{aligned}$$

**2.3.1.1.3 Beispiel:** $\liminf (-1)^n = -1, \quad \limsup (-1)^n = 1$

Die bisherigen Resultate ergeben folgenden

**2.3.1.1.4 Satz:** Eine Zahlenfolge $(a_n)$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungswert besitzt.

$$\text{In diesem Fall ist} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \liminf a_n.$$

## 2.3.2 Erweiterungen der Begriffe

### 2.3.2.1 Uneigentlichte Grenzwerte

**2.3.2.1.1 Definition:** Die Zahlenfolge $(a_n)$ *divergiert bestimmt* gegen $+\infty$ (in Zeichen: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oder $a_n \to +\infty$), falls für jedes $K > 0$ ein $n_0(K) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n > K \text{ für alle } n \geq n_0(K)$$

Die Zahlenfolge $(a_n)$ *divergiert bestimmt* gegen $-\infty$ (in Zeichen: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$), falls für jedes $K > 0$ ein $n_0(K) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n < -K \text{ für alle } n \geq n_0(K)$$

**2.3.2.1.2 Bemerkung:** $(a_n) = ((-1)^n)$ und $(b_n) = (n)$ divergieren, aber nur $(b_n) = (n)$ divergiert bestimmt ($\lim_{n\to\infty} n = \infty$).

#### 2.3.2.2 Rechenregeln

Sei $a_n \to \infty, b_n \to \infty$ und $c_n \to c$. Dann gilt:

1. *Summenregel*

$$a_n + b_n \to \infty, \quad a_n + c_n \to \infty$$

*Beweis:*

Laut Definition gibt es $n_1 : b_n \geq 1$ für alle $n \geq n_1$. ($c_n \geq \frac{c}{2}$ im Fall $c > 0$)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a_n + b_n > K + 1 \text{ falls } n \geq \max\{n_0(K), n_1\} \\ &(\Rightarrow \quad a_n + c_n > K + \frac{c}{2} \text{ falls } n \geq \max\{n_0(K), n_1\}) \end{aligned}$$

2. *Produktregel*

$$a_n \cdot b_n \to \infty, \quad a_n \cdot c_n \to +\infty, \text{ falls } c > 0, \quad a_n \cdot c_n \to -\infty, \text{ falls } c < 0$$

*Beweis:* (s. Übungsaufgabe)

3.

$$\frac{1}{a_n} \to 0$$

*Beweis:*

Sei $\varepsilon > 0$. Setze $K = \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt:

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ für alle } n \geq n_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon \text{ für dieselben } n$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Aus dem Beweis von 3. folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \text{ und } a_n > 0 \text{ für } n \geq n_2$$

#### 2.3.2.3 Gegenbeispiele

i) Die Differenzenregel gilt nicht!

*Beispiele:*

a)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

In diesem Beispiel gilt offensichtlich die Differenzenregel nicht.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 8n} = +\infty \text{ (s. Übungsaufgabe)}, \quad \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+8n} - n \underset{\text{II}}{=} \frac{(\sqrt{n^2+8n} - n)(\sqrt{n^2+8n} + n)}{\sqrt{n^2+8n} + n} &= \frac{(\sqrt{n^2+8n})^2 - n^2}{n\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}} + 1\right)} \\ &= \frac{8n}{n\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}} + 1\right)} = \frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{n}} + 1},\end{aligned}$$

$$\frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{n}} + 1} \to \frac{8}{\sqrt{1+0}+1} = 4 \quad \text{für} \quad n \to \infty\ .$$

In diesem Beispiel gilt offensichtlich die Differenzenregel nicht.

ii) Quotientenregel gilt nicht! (s. Übungsaufgabe)

iii) Produktregel gilt nicht mit $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ !

*Beispiel:*

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

wegen Einschnürungssatz und

$$-\frac{1}{n} \leq c_n \leq \frac{1}{n}$$

Die Folge

$$n^2 \cdot \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \cdot n$$

divergiert weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$.

[II] Erweiterung mit der „konjugierten“ Zahl (zweite binomische Formel)

#### 2.3.2.4 Uneigentliche Häufungswerte

Wir setzen

- $\sup a_n = +\infty$ und $\limsup a_n = +\infty$, falls $(a_n)$ nach oben unbeschränkt ist.
- $\inf a_n = -\infty$ und $\liminf a_n = -\infty$, falls $(a_n)$ nach unten unbeschränkt ist.

**2.3.2.4.1 Beispiel:**

$$\liminf (-1)^n n = \inf (-1)^n n = -\infty, \qquad \limsup (-1)^n n = \sup (-1)^n n = +\infty.$$

### 2.3.3 Punktfolgen im $\mathbb{R}^k$

**2.3.3.0.1 Definition:** Eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ heißt *Punktfolge* $\left(x^{(n)}\right)$ mit

$$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}\right), \quad x_j^{(n)} \in \mathbb{R}$$

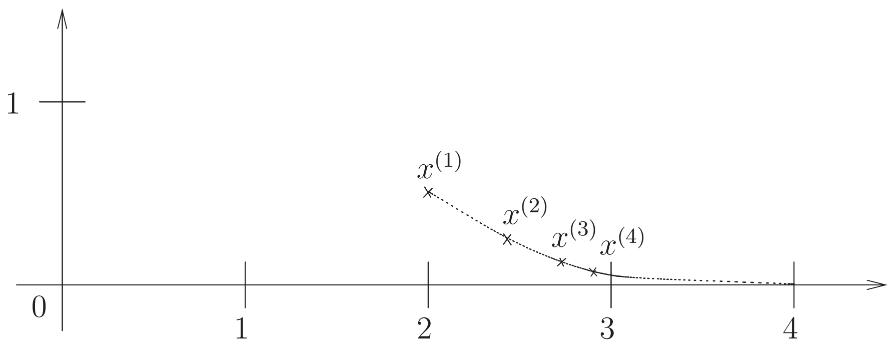
Die Punktfolge $\left(x^{(n)}\right)$ konvergiert gegen $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, wenn für jedes $j = 1, \dots, k$ gilt $\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = x_j$ (koordinatenweise Konvergenz).

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}, \dots, \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}\right)$$

#### 2.3.3.1 Beispiele

a)

$$\left(x^{(n)}\right) = \left(\sqrt{n^2+8n} - n, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \in \mathbb{R}^2$$




$$\left(\sqrt{n^2+8n} - n, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \to (4,0) \quad \text{für} \quad n \to \infty\ .$$

b)

$$\left(x^{(n)}\right) = \left(10, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{1}{n}, \sqrt[n]{4}\right) \in \mathbb{R}^4$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = (10, e, 0, 1)$$

**2.3.3.1.1 Satz:**

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim ||x^{(n)} - x|| = 0$$

*Beweis:*

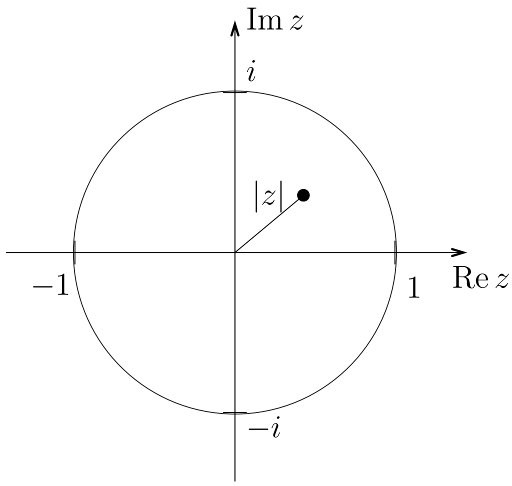
$$x^{(n)} \to x \quad \Leftrightarrow \quad x_j^{(n)} \to x_j \quad \Leftrightarrow \quad |x_j^{(n)} - x| \to 0 \text{ für } j = 1, \ldots, k$$

$$\Rightarrow \quad d_n := \sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j|^2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{d_n} = ||x^{(n)} - x|| \to 0$$

Umkehrrichtung gilt ebenfalls, weil $0 \le |x_j^{(n)} - x_j|^2 \le d_n$.

**2.3.3.1.2 Folgerung:** Da beim Übergang zu Punktfolgen (bzw. komplexen Zahlenfolgen) $|\cdot|$ nur durch die euklidische Norm $\|\cdot\|$ (bzw. durch den Betrag komplexer Zahlen) zu ersetzen ist, übertragen sich entsprechende Rechenregeln und Konvergenzkriterien wörtlich mit Ausnahme solcher, in denen Ordnungsrelationen zwischen den Folgegliedern eine Rolle spielen (z.B. keine Monotonie!).

$$z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$$
$$a = \mathrm{Re}\, z, b = \mathrm{Im}\, z$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = ||(a, b)||$$




### 2.3.3.2 Beispiele

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4n + 2in^2 + i^n}{n^2 - 3i} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{4}{n} + 2i + \frac{i^n}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{3i}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} + 2i + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n^2}}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3i}{n^2}} = \frac{0 + 2i + 0}{1 - 0} = 2i,$$

weil $\left|\frac{i^n}{n^2} - 0\right| = \frac{|i|^n}{n^2} = \frac{|i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \to 0$ für $n \to \infty$.

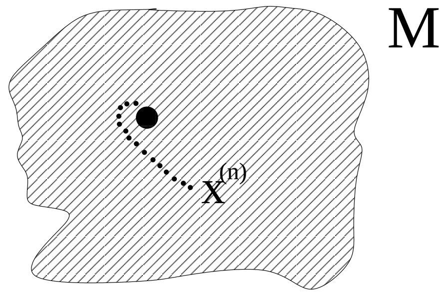
b) $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ für $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{|z|}^{\in\mathbb{R}}{}^n = 0 \quad \text{und} \quad |z|^n = |z^n| = |z^n - 0|.$$

## 2.3.4 Häufungspunkte für Mengen

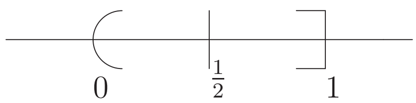
### 2.3.4.1 Definition

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^k$ heißt *Häufungspunkt* der Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn es eine Punktfolge $\left(x^{(n)}\right) \subseteq M$ mit $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ und $x^{(n)} \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.




### 2.3.4.2 Beispiele

1) $M = (0,1]$ hat zum Beispiel die Häufungspunkte $0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$, denn

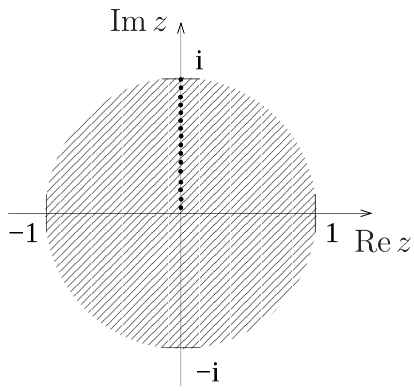



$$M \ni \frac{1}{n} \to 0, M \ni \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$$
$$n \geq 2$$
$$M \ni 1 - \frac{1}{n} \to 1$$

2)

$M = \{z \in \mathbb{R} \mid |z| < 1\}$ hat zum Beispiel den Häufungspunkt $i$, denn

$$\underbrace{i - \frac{i}{n}}_{\in M} \to i$$

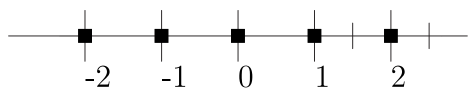



3)

$M = \mathbb{Z}$ hat *keine* Häufungspunkte, denn

$$|m - n| \geq 1$$

für $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$.




### 2.3.4.3 Bemerkungen

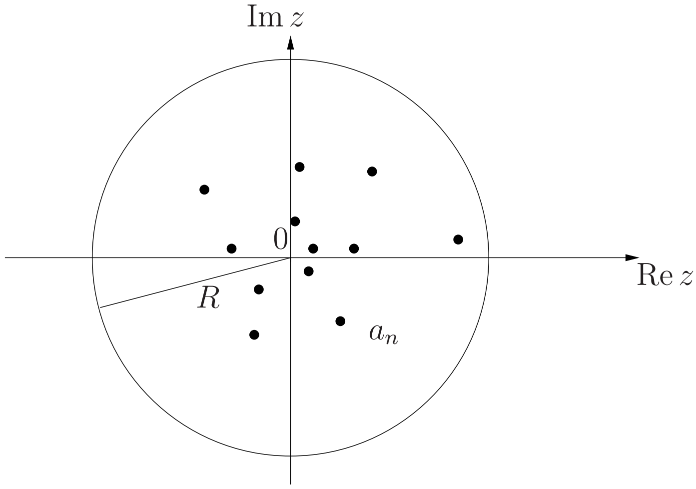
i) Ein Häufungspunkt von $M$ kann zu $M$ gehören oder auch nicht, s. Beispiel 1).

ii) Punkte aus $M$, welche selbst keine Häufungspunkte von $M$ sind, heißen *isolierte Punkte*. Zum Beispiel besteht $M = \mathbb{Z}$ nur aus isolierten Punkten.

iii) Beachte Unterschied zwischen *Häufungspunkt* einer Menge und *Häufungswert* einer Folge.

**2.3.4.3.1 Satz von Bolzano-Weierstraß für Mengen:** Jede beschränkte, unendliche Teilmenge des $M \subset \mathbb{R}^k$ (d.h. $\|x\| \leq R$ für alle $x \in M$) besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beispiel einer beschränkten Zahlenfolge $(a_n) \subset \mathbb{C}$




## 2.4 Unendliche Reihen

### 2.4.1 Definitionen

i) Die *unendliche Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

bedeutet die Folge der *Partialsummen* (*Teilsummen*)

$$(s_n)_{n=0}^{\infty} \quad \text{mit } s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{bzw. } s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (= \sum a_k)$ heißt *konvergent* gegen $s$, falls $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ist.

*Schreibweise:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s \left( = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k \right) \right)$$

$s$ heißt auch *Summe* der Reihe $\sum a_k$. Eine nichtkonvergente Reihe heißt *divergent.*

iii) $\sum a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |a_k|$ konvergiert.

### 2.4.2 Bemerkungen

1) Auf *endlich* viele Glieder kommt es bei Reihen nicht an, d.h. Konvergenzverhalten von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ mit $N \in \mathbb{N}$ ist dasselbe.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ wird in zwei Bedeutungen verwendet:

   a) Zahlenfolge $(s_n)$

   b) Summe der Reihe

### 2.4.3 Beispiele

1. Eine unendliche Reihe ergibt sich unmittelbar aus der Dezimalbruchentwicklung einer positiven reellen Zahl $x$. Sei

$$z_1\, z_2 \ldots z_h, z_{h+1} \ldots$$

eine solche Entwicklung, so bildet die Folge der linken Intervallenden der zugehörigen Intervallschachtelung $(I_n)$ eine Partialsummenfolge $(s_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k 10^{h-k}\right)$ zur Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = z_k 10^{h-k}$, $z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $h \in \mathbb{N}$. Dabei galt $\lim_{n\to\infty} s_n = x$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k 10^{h-k} = x\ .$$

2. Wir definieren rekursiv eine Zahlenfolge durch:

$$s_0 = 1,\ s_n = s_{n-1} + z^n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt die explizite Bildungsvorschrift: $s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ , und $(s_n)$ konvergiert für $|z| < 1$, also

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right) = \frac{1 - 0}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Diese Reihe heißt *geometrische Reihe* und konvergiert auch absolut für $|z| < 1$, da $\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \dfrac{1}{1 - |z|}$.

3.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+(k+1)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+k+1)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

$\left(\sum \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right.$ konvergiert absolut.$\left.\right)$

### 2.4.4 Konvergenzkriterien

Durch unmittelbare Anwendung der Konvergenzkritierien für Zahlenfolgen auf $(s_n)$ folgt:

**2.4.4.0.1 Monotoniekriterium:** $\sum a_k$ mit $a_k \geq 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ konvergiert genau dann, wenn $(s_n)$ beschränkt ist, denn

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n + 0 = s_n$$

d.h. $(s_n)$ monoton wachsend.

**2.4.4.0.2 Cauchy-Kriterium:** $\sum a_k$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k\right| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0(\varepsilon) \text{ und alle } p \in \mathbb{N} \tag{2.4.4.2}$$

denn $(s_n)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(s_n)$ Cauchy-Folge, d.h.

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq n_0(\varepsilon)$$

Setze $m = n + p$, dann ist

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|$$

#### 2.4.4.1 Folgerungen

1. Konvergiert $\sum a_k$, so muss $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ mit

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \qquad \textit{(Reihenrest)}$$

denn setzen wir in (2.4.4.2) $p = 1$, so ist

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon)$$

d.h. $a_{n+1} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Andererseits ergibt Grenzübergang $p \to \infty$ in (2.4.4.2):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq \varepsilon$$

d.h. $r_n \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$ für dieselben $n$.

*Aber!:* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist *nicht hinreichend* für Konvergenz von $\sum a_k$, z.B.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \qquad \textit{(harmonische Reihe).}$$

Obwohl $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist, divergiert $\sum \frac{1}{k}$, denn $(s_n)$ ist unbeschränkt.

Sei $n > 2^{m+1}$, so

$$\begin{aligned}
s_n > s_{2^{m+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\Bigg) + \Bigg(\underbrace{\frac{1}{5}}_{>\frac{1}{2^3}} + \ldots + \frac{1}{2^3}\Bigg) + \ldots + \Bigg(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2^m+1}}_{>\frac{1}{2^{m+1}}} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}}}^{2^m \text{ Summanden}}\Bigg) \\
&> 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \ldots + \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}(m+1) \\
&> G \qquad \text{falls} \qquad m > 2G - 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty\ .$$

2. Absolute Konvergenz von $\sum a_k \quad \Rightarrow \quad$ Konvergenz von $\sum a_k$,
denn $\sum |a_k|$ konvergiert heißt: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $n_0(\varepsilon)$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \underset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\Rightarrow} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon), p \in \mathbb{N}$$

$$\underset{(2.4.4.2)}{\Rightarrow} \quad \sum a_k \text{ konv.}$$

*Bemerkung:* Bei absoluter Konvergenz gilt verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

(Herleitung durch Grenzübergang aus Dreiecksungleichung für $n$ Summanden)

#### 2.4.4.1.1 Majorantenkriterium und Minorantenkriterium

- *Majorantenkriterium*

  Konvergiert $\sum c_k$ mit $c_k \geq 0$ und gilt $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq k_0$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut. ($\sum c_k$ ist *konvergente Majorante* zu $\sum a_k$.)

  *Beweis:*

  $$\sum c_k \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow$$

  $$\text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert } n_0(\varepsilon) : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| = c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots+c_{n+p} < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0, p \in \mathbb{N}$$

  $$\Rightarrow \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} \underbrace{|a_k|}_{\leq c_k} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \text{ für } n \geq \max\{n_0, k_0 - 1\}, p \in \mathbb{N}$$

  $$\underset{(2.4.4.2)}{\Rightarrow} \quad \text{abs. Konv. von } \sum a_k$$

- *Minorantenkriterium*

  Divergiert $\sum d_k$ mit $d_k \geq 0$ und $a_k \geq d_k$ für alle $k \geq k_0$, so divergiert $\sum a_k$. ($\sum d_k$ ist *divergente Minorante* zu $\sum a_k$.)

  *Beweis* (durch Widerspruch aus Majorantenkriterium)

### 2.4.4.2 Beispiele

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

konvergiert (absolut), weil

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \text{ konv.}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergiert, weil

$$\sqrt{n} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div.}$$

Wichtige Spezialfälle entstehen aus 2.4.4.1.1 durch Verwendung der geometrischen Reihe als Vergleichreihe.

**2.4.4.2.1 Wurzelkriterium:** Konvergiert $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ und ist

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

#### 2.4.4.3 Bemerkungen

i) Ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, so ist Konvergenz oder Divergenz von $\sum a_k$ möglich.

Zum Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert , aber } \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Dagegen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert, aber } \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \to 1 \cdot 1 = 1$$

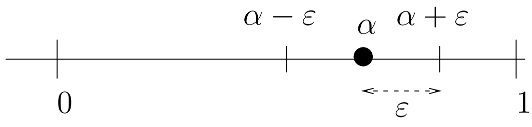
ii) Existiert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ nicht, so gilt allgemeiner:

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{Konvergenz von } \sum a_n \\ \liminf \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{Divergenz von } \sum a_n \end{aligned}$$

*Beweis von* 2.4.4.2.1:

a) Sei $\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, so gilt

$$\alpha - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon), \varepsilon > 0$$




Bei $\alpha \in [0,1)$, wähle $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} (> 0)$, so ist

$$0 < \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon = \frac{\alpha+1}{2} < 1$$

$$|a_n| < \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^n \text{ für } n \geq n_0\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n$ konvergiert, ergibt sich Behauptung aus dem Majorantenkriterium.

b) Bei $\alpha > 1$ setze $\varepsilon = \frac{\alpha-1}{2} > 0$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} > 1$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| > 1 \text{ für } n \geq n_0\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$$

Somit kann $(a_n)$ nicht gegen 0 konvergieren. $\Rightarrow$ Divergenz von $\sum a_n$.

#### 2.4.4.3.1 Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}, \quad a_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \to \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert (absolut).

#### 2.4.4.3.2 Quotientenkriterium: 

Konvergiert $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ und ist

- $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert $\sum a_n$ absolut.
- $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so divergiert $\sum a_n$ absolut.

*Beweis:* (s. Übungsaufgabe)

(Bemerkungen i), ii) analog zu denen des Wurzelkriteriums 2.4.4.2.1.)

#### 2.4.4.3.3 Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}, \quad a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert.

Die Kriterien 2.4.4.1.1 bis 2.4.4.3.2 lieferten die *absolute* Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Solche Reihen besitzen die bemerkenswerte Eigenschaft, dass jede *Umordnung* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$ von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (dabei muss die Abbildung $k \mapsto n_k$ eine Bijektion von $\mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{N}_0$ sein) ebenfalls konvergiert und zwar gegen dieselben Summe. Diese Eigenschaft ist für endliche Summen bekannt, ist jedoch für nicht absolut konvergente Reihen falsch.

#### 2.4.4.4 Alternierenden Reihen

Reihen, welche nicht notwendigerweise absolut konvergieren, sind z.B. *alternierende Reihen*:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots \text{ mit } b_k > 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Für diese alternierenden Reihen gilt:

**2.4.4.4.1 Leibniz-Kriterium (1676):** Sei $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und $b_n \le b_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$.

*Beweis:*

a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^k b_k &= (-1)^{n+1}\Big(\underbrace{(b_{n+1} - b_{n+2})}_{\ge 0} + \underbrace{(b_{n+3} - b_{n+4})}_{\ge 0} + \dots + (-1)^{p-1} b_{n+p}\Big)\\ &= (-1)^{n+1} R_{n+1,p}\end{aligned}$$

Dabei ist $R_{n+1,p} \ge 0$, denn nur bei ungeradem $p$ bleibt $(-1)^{p-1} b_{n+p} \ge 0$ unbeklammert.

b)

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^k b_k = (-1)^{n+1}\left(b_{n+1} - R_{n+2,p}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^k b_k\right| = +R_{n+1,p} = b_{n+1} - \underbrace{R_{n+2,p}}_{\ge 0} \le b_{n+1} \tag{2.4.4.3}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ist $0 \le b_n < \varepsilon$ für $n \ge n_0(\varepsilon)$. Mit (2.4.4.2) folgt die Konvergenz von $\sum(-1)^k b_k$.

**Zusatz:** Für solche Reihen gilt die *Fehlerabschätzung* für die Summe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k, \quad |s - s_n| = \left|\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^k b_k\right| \le b_{n+1}$$

(nach Grenzübergang $p \to \infty$ in (2.4.4.3))

**2.4.4.4.2 Beispiel:** LEIBNIZ*sche Reihe:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

LEIBNIZsche Reihe konvergiert nach LEIBNIZ-Kriterium 2.4.4.4.1, weil $(b_k) = \left(\frac{1}{k+1}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge bildet.
*Aber!:* Sie konvergiert nicht absolut, denn $\left|(-1)^k b_k\right| = \frac{1}{k+1}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ divergiert (harmonische Reihe).

Die Summe $s$ der LEIBNIZschen Reihe kann annähernd durch die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

berechnet werden, z.B. bis $\frac{1}{1000}$ genau, durch $s_n$ mit einem $n$ gemäß

$$|s - s_n| \leq \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{1000}$$

d.h. $n \geq 998$.

$$\Rightarrow \quad s \approx s_{998} = 0,694$$

Umordnung der LEIBNIZschen Reihe:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{=\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{=\frac{1}{14}} - \dots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots\right) \\
&= \frac{1}{2}s
\end{aligned}$$

### 2.4.5 Rechnen mit Reihen

Unmittelbar aus den Rechenregeln für Folgen angewendet auf $(s_n)$ ergibt sich: Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert, subtrahiert und mit einem Faktor multipliziert werden, genauer:

Sei $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Bezüglich dieser Operation verhalten sich konvergente Reihen wie endliche Summen.
*Problem:* Multiplikation von Reihen, genauer: Wie muss man die Produkte $a_k b_l$ anordnen, so dass Produktreihe konvergiert?

**2.4.5.0.1 Definition:** Die CAUCHY*sche Produktreihe* der Reihen $\sum a_k, \sum b_k$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)}_{= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} =: c_n}$$

**2.4.5.0.2 Satz:** Sind $\sum a_k, \sum b_k$ absolut konvergent, dann konvergiert auch ihre CAUCHYsche Produktreihe wieder absolut (und somit auch jede andere Produktreihe) und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

*Beweis* (über großen Umordnungssatz, s. Literatur)

**2.4.5.0.3 Beispiel:** $\left(a_k = b_k = z^k\right)$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \underbrace{z^0 z^n}_{=z^n} + \underbrace{z^1 z^{n-1}}_{=z^n} + \ldots + \underbrace{z^{n-1} z}_{=z^n} + \underbrace{z^n z^0}_{=z^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad \text{für } |z| < 1$$

mit Summe

$$\left( \frac{1}{1-z} \right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}$$

**2.4.5.0.4 Folgerung:** Da $\sum (n+1) z^n$ konvergiert, muss $\lim_{n\to\infty} (n+1) z^n = 0$ sein.

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n z^n = 0 \quad \text{für } |z| < 1, z \in \mathbb{C}$$

### 2.4.6 Zusammenstellung wichtiger Reihen

- *Geometrische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{abs. konv. für } |z| < 1$$

- *Harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergent}$$

- LEIBNIZ*sche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (= \ln 2) \qquad \text{konvergent, aber nicht abs. konv.}$$

-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{6}\right) \qquad \text{konvergent}$$

-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{konvergent für } \alpha > 1, \text{ divergent für } \alpha \leq 1$$

## 2.5 Potenzreihen

Eine wichtige Klasse von Reihen sind die Potenzreihen, welche eine Verallgemeinerung der Polynome darstellen.

### 2.5.1 Definitionen

Sei $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

*Potenzreihe* in $(z - z_0)$ mit dem *Entwicklungspunkt* $z_0$ und *Koeffizienten* $a_n$.

#### 2.5.1.1 Bemerkungen

1) Konvergiert die Potenzreihe $P(z)$ für alle $z \in M \subseteq \mathbb{C}$, so vermittelt $P$ eine Abbildung $M \to \mathbb{C}$ *(komplexe Funktion)*.

2) Durch die Transformation $\zeta := z - z_0$ erhält man den Standardfall einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0.

$$P(z) = P(\zeta + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

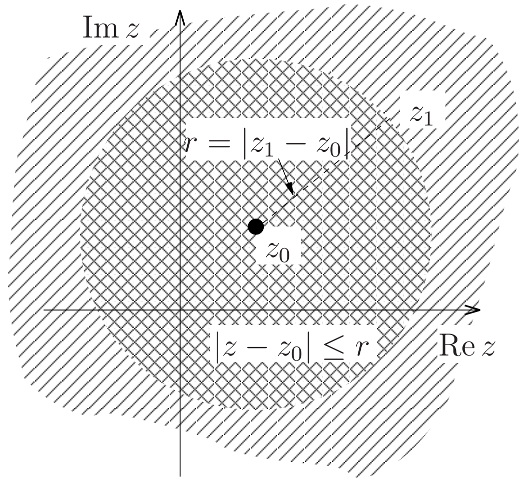
#### 2.5.1.2 Beispiele

a) geometrische Reihe: $z_0 = 0$, $a_n = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$, absolut konvergent für $|z| < 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$ ist Potenzreihe mit $z_0 = -1$, $a_n = 1$. Wegen a) konvergiert diese Potenzreihe für $|z+1| < 1$ gegen $\frac{1}{1-(z+1)} = -\frac{1}{z}$.

### 2.5.2 Konvergenzradius

Jede Potenzreihe $P(z)$ ist für $z = z_0$ konvergent, wobei auch in diesem Fall $(z - z_0)^0 = 1$ gesetzt wird ($\Rightarrow P(z_0) = a_0$).




Wenn $P(z)$ für ein $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ absolut konvergiert, dann konvergiert $P(z)$ auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$$

absolut nach Majorantenkriterium.

denn es ist $|a_n(z - z_0)^n| = |a_n|\,|z - z_0|^n \leq |a_n|\,|z_1 - z_0|^n$, und $\sum |a_n\,(z_1 - z_0)^n|$ konvergiert.

Sei $A = \{r > 0 \mid P(z) \text{ konvergiert für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < r\}$. Dann ist $A \neq \emptyset$, weil $|z_1 - z_0| \in A$. Setze $\varrho(P) := \sup A \in (0, \infty) \cup \{\infty\} = (0, \infty]$. Nach Definition von $\sup A$ ist somit die Potenzreihe $P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > \varrho(P)$ divergent.

*Ergänzung:* Konvergiert $P(z)$ nur für $z = z_0$, so setze $\varrho(P) := 0$.

**2.5.2.0.1 Satz:** Zu jeder Potenzreihe $P(z)$ gibt es genau ein $\varrho(P) \in [0, \infty]$, so dass $P(z)$ absolut konvergiert für alle $z$ mit $|z - z_0| < \varrho(P)$ und divergiert für $|z - z_0| > \varrho(P)$.

*Beweis:*

a) Existenz von $\varrho(P)$ s. oben.

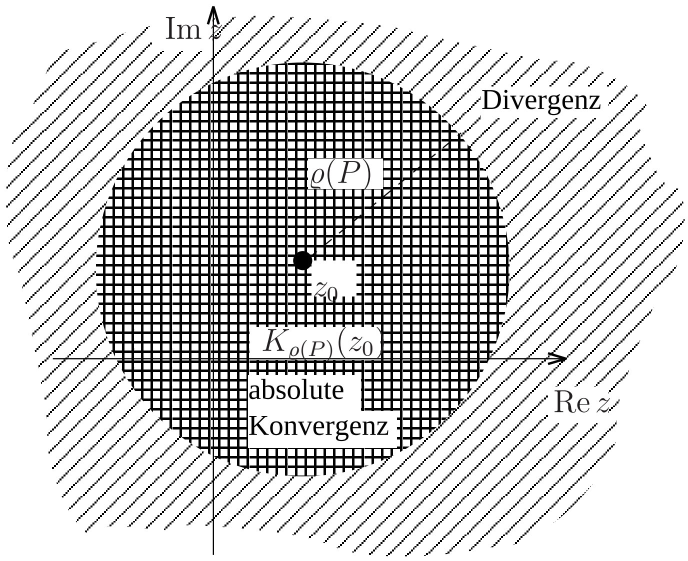
b) Eindeutigkeit:

Sei $\varrho_1, \varrho_2$ zwei Zahlen mit den genannten Eigenschaften und $\varrho_1 < \varrho_2$. Dann wähle $x \in \mathbb{R}$ so, dass $\varrho_1 < x < \varrho_2$. Wegen der Eigenschaften von $\varrho_2$ ist die Potenzreihe $P(z_0 + x)$ konvergent, wegen der Eigenschaften von $\varrho_1$ jedoch divergent. $\Rightarrow$ Widerspruch.

**2.5.2.0.2 Definition:** $\varrho(P)$ heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

$$U_{\varrho(P)}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varrho(P)\}$$

heißt *Konvergenzkreis* zu $P(z)$.




**2.5.2.0.3 Berechnungsformel für $\varrho(P)$:** Konvergiert die Zahlenfolge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, so ist

$$\varrho(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \ ,$$

denn nach Wurzelkriterium 2.4.4.2.1 ist $P(z)$

- konvergent, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)|z-z_0| < 1$$

- divergent, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)|z-z_0| > 1$$

$$\Rightarrow \quad \varrho(P) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

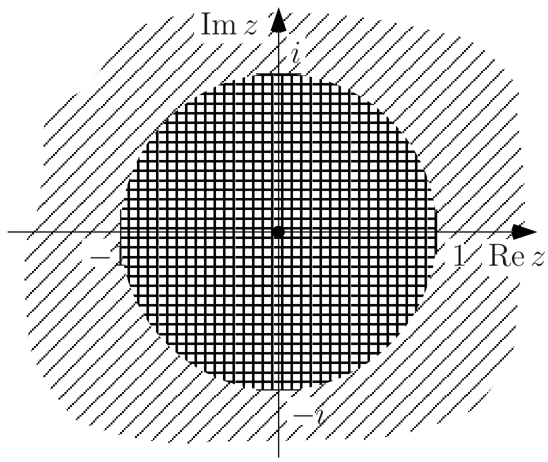
Allgemeiner gilt mit $r := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$:

$$\varrho(P) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{falls } r \in (0,\infty) \\ 0 & \text{falls } r = \infty \\ \infty & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

#### 2.5.2.1 Beispiele

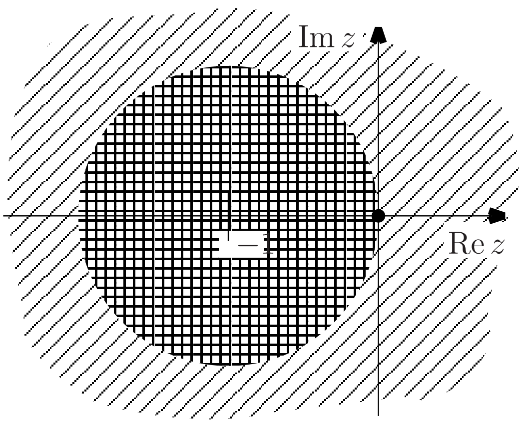
a)

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$: $z_0 = 0$, $a_n = 1$, $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, Konvergenzradius: 1
Für $|z| = 1$: $|z^n| = |z|^n = 1 \to 1 \neq 0$, Divergenz der geometrischen Reihe



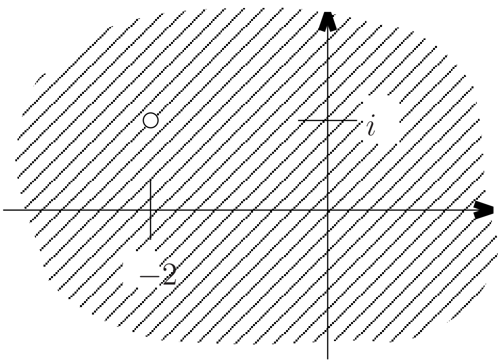

b)

$\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$, $z_0 = -1$, $a_n = 1$, Konvergenzradius: 1




c)

$\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+2-i)^n$: $z_0 = -2+i$, $a_n = n^n$, $\sqrt[n]{|a_n|} = n \to \infty$, Konvergenzradius: 0
d.h. Potenzreihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2+i\}$




d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$: $z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$, Konvergenzradius: 1

- Für $z = 1$: Divergenz (harmonische Reihe)
- Für $z = -1$: Konvergenz (Leibnizsche Reihe)

**2.5.2.1.1 Bemerkung:** Auf dem Rand des Konvergenzintervalles $U_{\varrho(P)}(z_0)$, d.h. für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = \varrho(P)$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.

#### 2.5.2.2 Rechenregeln für Potenzreihen

Besitzen die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die Konvergenzradien $\varrho_1$ und $\varrho_2$, so gilt zumindest für $|z| < \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$:

i)
$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ii)
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

denn CAUCHYsche Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

### 2.5.3 Elementare Funktionen

#### 2.5.3.1 Exponentialfunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) = e^z \qquad (\textit{Exponentialreihe})$$

*Berechnung des Konvergenzradius:*
Bequemer als die Formel ist hier die Anwendung des Quotientenkriteriums 2.4.4.3.2:
$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|^{n+1} n!}{|z|^n (n+1) n!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \varrho(\exp) = \infty$, also: $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (komplexe Funktion).

**2.5.3.1.1 Eigenschaften:**

1) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$, denn:
$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} n! \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\ &\underset{1.2.2.3}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w)\end{aligned}$$

2) $\exp(0) = \frac{1}{0!} = 1$

3) $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, denn

$$1 \underset{2)}{=} \exp(0) = \exp\big(z + (-z)\big) \underset{1)}{=} \exp(z)\exp(-z) \quad \Rightarrow \quad \exp(z) \neq 0$$

4) $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ (Rechnung wie in 3)

5) $\exp(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$, genauer:

- $\exp(x) > 1$ für $x > 0$, denn

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1 + x > 1$$

- $0 < \exp(x) < 1$ für $x < 0$, denn

$$\exp(x) \underset{4)}{=} \frac{1}{\exp(-x)} \in (0,1), \text{ weil } -x > 0$$

6) $\exp(1) = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, denn:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \big(\exp(1)\big)^{\frac{1}{n}}$$

weil

$$\exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ Summanden}}\right) \underset{1)}{=} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Andererseits ist

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \exp(1) \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\to e \text{ für } n\to\infty} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}_{\to 1 \text{ für } n\to\infty}$$

Nach Grenzübergang $n \to \infty$ folgt $e \leq \exp(1) \leq e \cdot 1$.

7) $\exp(r) = e^r$ für $r \in \mathbb{Q}$, denn:

$$\exp(\tfrac{m}{n}) = \exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}}_{m\text{-mal}}\Big) \underset{1)}{=} \big(\exp(\tfrac{1}{n})\big)^m \underset{6)}{=} \Big(\exp(1)^{\frac{1}{n}}\Big)^m \underset{6)}{=} e^{\frac{m}{n}} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N},$$

$$\exp(0) \underset{2)}{=} 1 = e^0 \,, \qquad \exp\left(-\tfrac{m}{n}\right) \underset{4)}{=} \frac{1}{\exp(\frac{m}{n})} = \frac{1}{e^{\frac{m}{n}}} = e^{-\frac{m}{n}} \,.$$

8) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ für $z \in \mathbb{C}$, denn

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$$

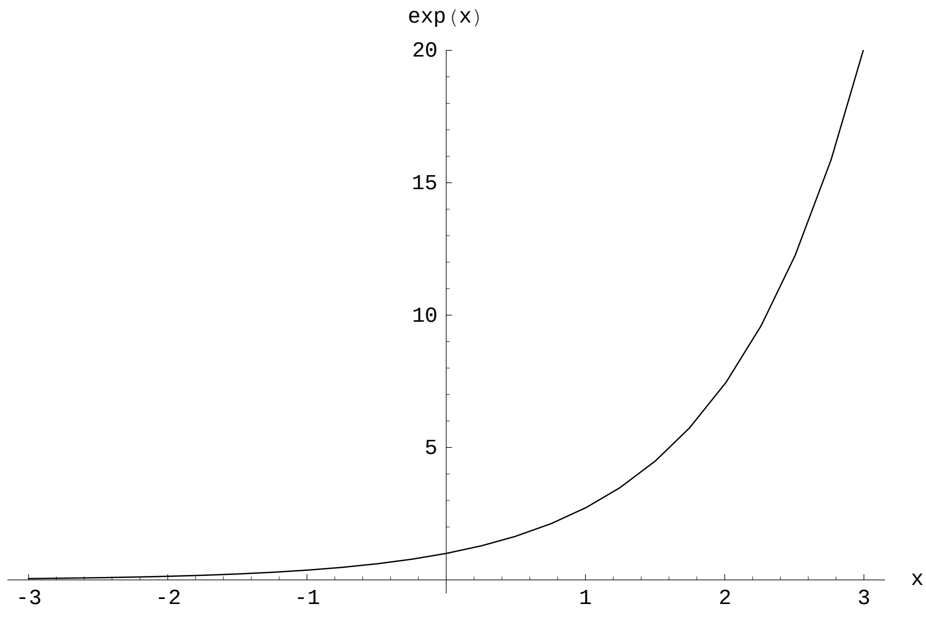
Beachte:

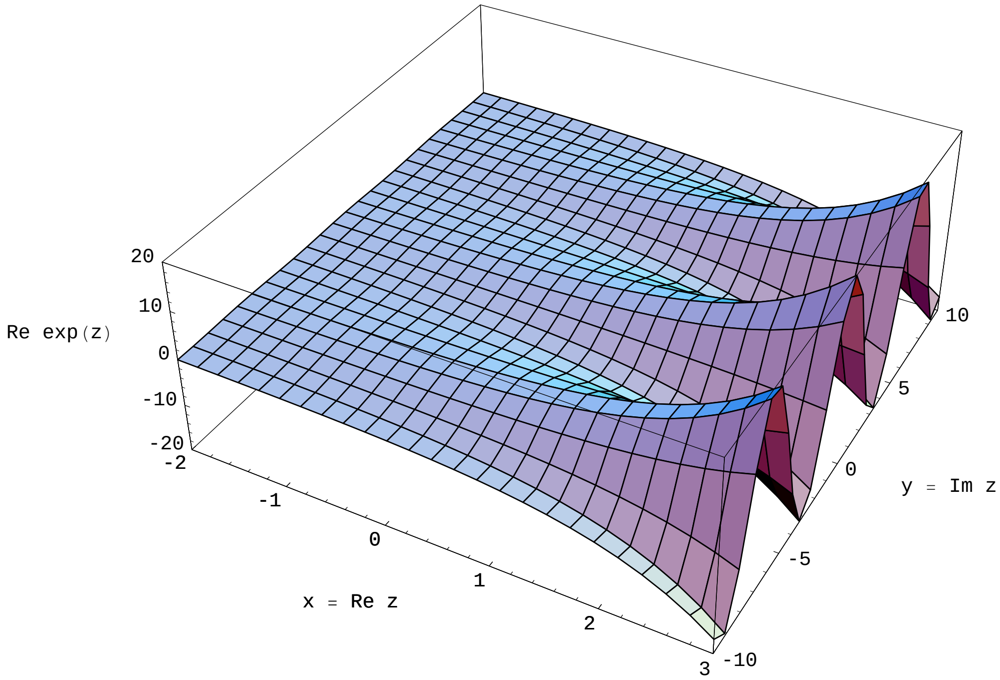
$$\begin{aligned} z_n = a_n + ib_n \to z_0 = a_0 + ib_0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n \to a_0 \text{ und } b_n \to b_0 \\ &\Leftrightarrow \quad a_n \to a_0 \text{ und } -b_n \to -b_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{z}_n = a_n - ib_n \to \overline{z}_0 = a_0 - ib_0 \end{aligned}$$

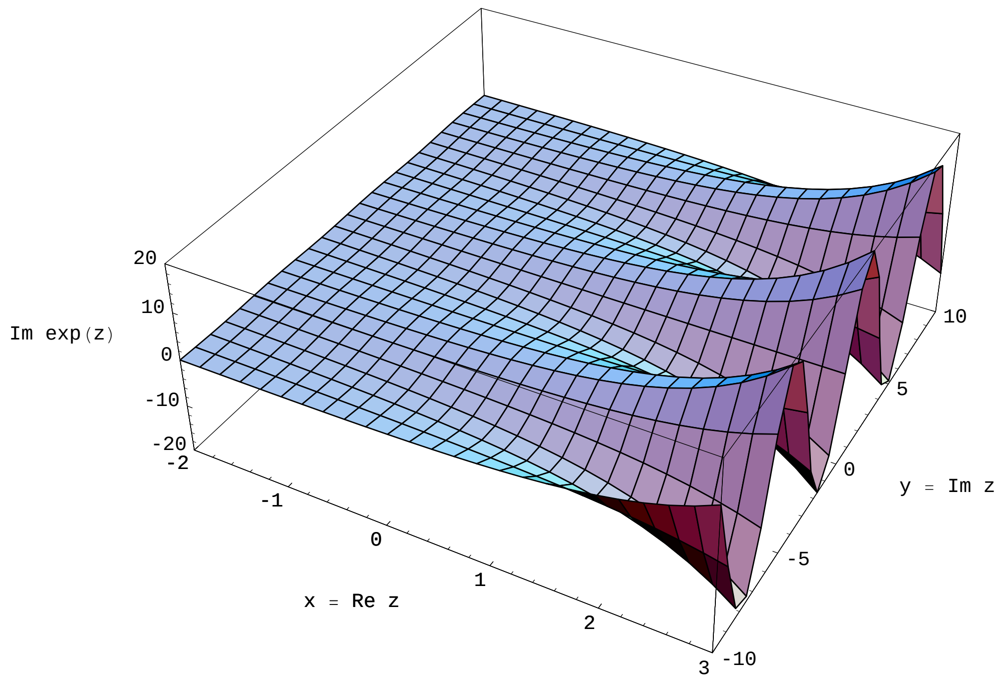
9) $|\exp(ix)| = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ (s. Übungsaufgabe)

#### 2.5.3.1.2 Darstellung der Exponentialfunktion:

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \text{(absolut konvergent für alle } z \in \mathbb{C})$$




20
10
Re exp(z)
0
-10
-20
-2
-1
0
1
2
3
x = Re z
-10
-5
0
5
10
y = Im z


20
10
Im exp(z)
0
-10
-20
-2
-1
0
1
2
3
x = Re z
-10
-5
0
5
10
y = Im z

#### 2.5.3.2 Trignonometrische Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} =: \sin z \qquad (\textit{Sinusreihe})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} =: \cos z \qquad (\textit{Kosinusreihe})$$

Konvergenzradius ist für beide Reihen $\infty$, denn bei Anwendung des Quotientenkriteriums 2.4.4.3.2 ergibt sich z.B.

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} z^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \frac{|z|^2}{(2n+3)(2n+2)} \to 0 \text{ für } n \to \infty \ .$$

##### 2.5.3.2.1 Eigenschaften:

1)

$$e^{iz} = \exp(iz) = \cos z + i \sin z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

denn

$$\begin{aligned} \exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k}{(2k)!} z^{2k} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i^2)^l}{(2l+1)!} z^{2l+1} = \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

Mit der Spezialisierung $z = x \in \mathbb{R}$ ist somit die EULERsche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ bewiesen.

2)

$$\cos^2 x + \sin^2 x \underset{\text{(Eulersche Formel)}}{=} \left(\operatorname{Re} e^{ix}\right)^2 + \left(\operatorname{Im} e^{ix}\right)^2 = \left|e^{ix}\right|^2 \underset{2.5.3.1,9)}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad |\cos x|\,, |\sin x| \le 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

3)

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = \frac{(-1)^0}{2 \cdot 0!} = 1$$

4)

$$\begin{aligned} \sin(-z) &= -\sin z \qquad (\textit{ungerade Funktion}) \\ \cos(-z) &= \cos z \qquad (\textit{gerade Funktion}) \end{aligned}$$

5) *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x \sin y\\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (x, y \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}&\cos(x+y) + i\sin(x+y)\\ \underset{2.5.3.2,1)\mathrm{i})}{=}\ & \exp(i(x+y)) = \exp(ix)\cdot\exp(iy) = e^{ix}e^{iy}\\ \underset{2.5.3.2,1)\mathrm{i})}{=}\ & (\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y)\\ =\ & (\cos x\cos y + \underbrace{i^2}_{=-1}\sin x\sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x\cos y)\end{aligned}$$

**2.5.3.2.2 Anmerkung:** Alle aufgeführten Eigenschaften wurden aus den Potenzreihen-Darstellungen zu $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ abgeleitet, d.h. *ohne* Rückgriff auf die Funktionen gleichen Namens aus der Schule.

Es bleibt der Nachweis, dass die Potenzreihen für $z \in \mathbb{R}$ mit den elementargeometrischen Ausdrücken zusammenfallen, insbesondere, dass $\frac{\pi}{2}$ die Nullstelle von cos in $(0, 2)$ ist, d.h. das diese Nullstelle die Hälfte der Kreiszahl $\pi$ ist (über Integralrechnung, s. Literatur).

#### 2.5.3.2.3 Abgeleitete Funktionen:

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

(Potenzreihen-Entwicklung später)

### 2.5.3.3 Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} \qquad &(\textit{sinus hyperbolicus})\\ \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n} \qquad &(\textit{cosinus hyperbolicus})\end{aligned}$$

(Konvergenzradius: $\infty$)

#### 2.5.3.3.1 Eigenschaften:

1)

$$\sinh z = -i\sin(iz), \qquad \cosh z = \cos(iz)$$

denn

$$\sin(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(iz)^{2n+1} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \underbrace{(-1)^n \big(\underbrace{i^2}_{=-1}\big)^n}_{=1} z^{2n+1} = i \sinh z$$

(analog für $\cos(iz)$)

2)

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right), \qquad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$$

(s. Übungsaufgabe)

3)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

denn

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &\underset{2)}{=} \frac{1}{4}\left(e^z + e^{-z}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^z - e^{-z}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2e^0 + e^{-2z} - \left(e^{2z} - 2e^0 + e^{-2z}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

#### 2.5.3.3.2 Abgeleitete Funktionen:

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

(Potenzreihen-Entwicklung später)

### 2.5.3.4 Weitere wichtige Potenzreihen

(Herleitung später)

- *Logarithmusreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \ln(1+z) \quad \text{abs. konv. für } |z| < 1$$

- *Binomische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} z^n = (1+z)^\beta \ , \ \beta \in \mathbb{R} \quad \text{abs. konv. für } |z| < 1$$

# Kapitel 3

# Stetigkeit reeller Funktionen

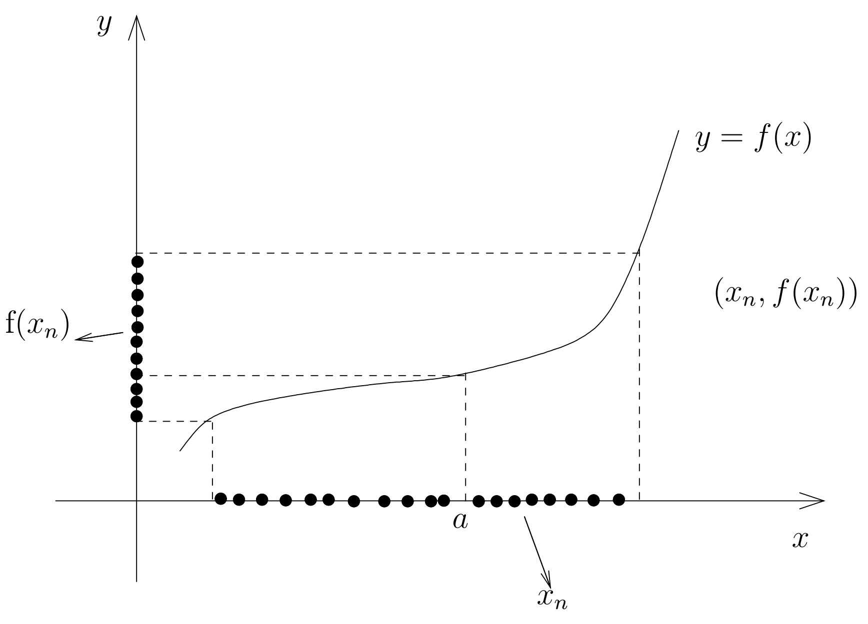
## 3.1 Grenzwerte und Stetigkeit

*Zur Erinnerung:* Eine Abbildung $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *reelle Funktion* mit *Definitionsbereich* $D(f) = M$ und *Wertebereich* $f(M) \subseteq \mathbb{R}$.

#### 3.1.0.0.1 Beispiel:

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \text{s. } (2.5.3.2,2))$$

Uns interessiert das Verhalten einer reellen Funktion $f$, wenn sich $x$ einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ nähert. Das lässt sich durch Folgen $(x_n)$ beschreiben mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und zugehörigen Zahlenfolgen $(f(x_n))$.



### 3.1.1 Grenzwert-Definition

Sei $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a$ ein Häufungspunkt von $M$, so bedeutet:

i)
$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{mit } A \in [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

dass für jede Zahlenfolge $(x_n) \subset M$ mit $x_n \neq a$ und $\lim_{x\to\infty} x_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

(in Worten: $A$ ist *Grenzwert* von $f$ für $x \to a$, im Falle von $A = \pm\infty$ *uneigentlicher Grenzwert*)

ii)
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

$\Leftrightarrow$ Für jede Zahlenfolge $(x_n) \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ gilt: $f(x_n) \to A$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

$\Leftrightarrow$ Für jede Zahlenfolge $(x_n) \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ gilt: $f(x_n) \to A$.

iii) Werden in i) nur Zahlenfolgen $(x_n)$ mit $x_n > a$ bzw. mit $x_n < a$ zugelassen, so schreibt man

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A_+ \qquad (A_+ \text{ – } \textit{rechtsseitiger Grenzwert} \text{ von } f \text{ an der Stelle } a)$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = A_- \qquad (A_- \text{ – } \textit{linksseitiger Grenzwert} \text{ von } f \text{ an der Stelle } a).$$

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich die Übertragung der Rechenregeln für Grenzwerte von Zahlenfolgen auf die entsprechenden Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen.

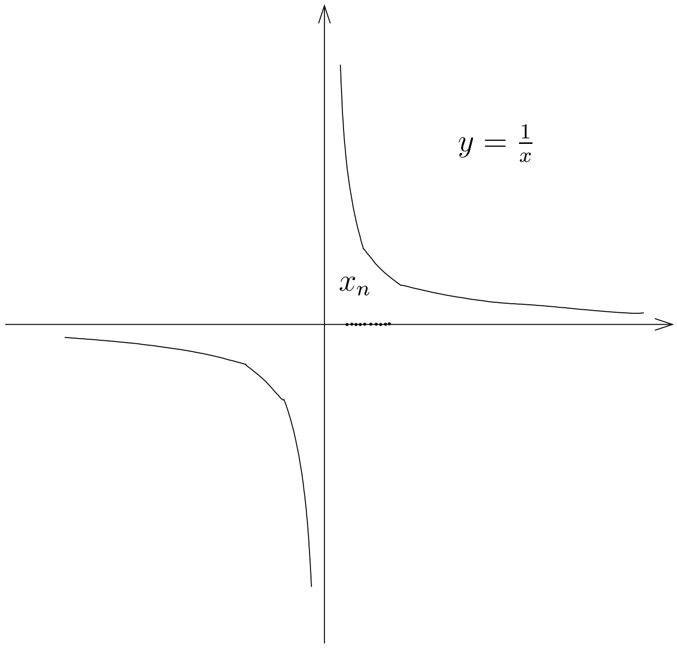
#### 3.1.1.1 Beispiele

1)
$$\lim_{x\to a} x^p = a^p \text{ für } p \in \mathbb{N}$$

denn für jede beliebige Zahlenfolge $(x_n)$ mit $\lim_{x\to\infty} x_n = a$ ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n^p = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^p = a^p$$

2)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}$$




denn für alle $(x_n)$ mit $x_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty \ .$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x + 4} - x &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+4}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-x+4}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+4}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+1} = \frac{-1+0}{\sqrt{1-0+0}+1} = -\frac{1}{2} \ ,\end{aligned}$$

denn für $(x_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ist $\frac{1}{x_n} \to 0$ und

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x_n} - \frac{4}{x_n^2}} \to \sqrt{1-0-0} = 1 \quad \text{für } n \to \infty \ .$$

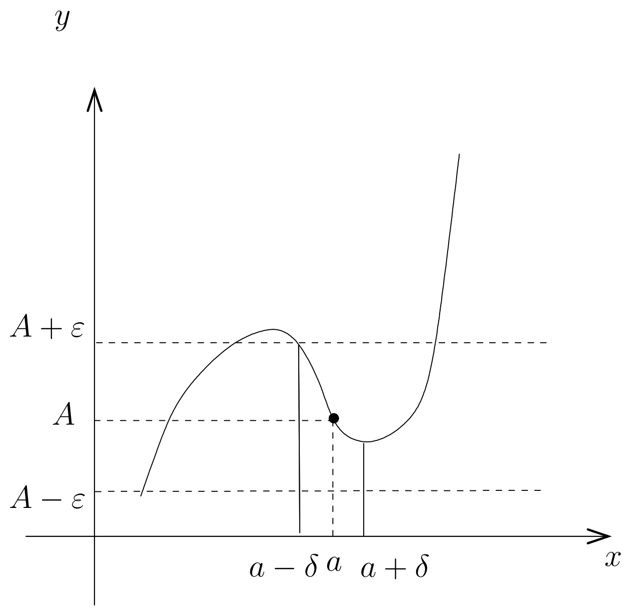
**3.1.1.1.1 $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium für Grenzwert einer Funktion $f$:** Sei $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a$ sei ein Häufungspunkt von $M$, dann gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ mit } A \in (-\infty, \infty)$$

genau dann, wenn

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta$$




*Beweis:*

a) ($\Leftarrow$)

Sei $\varepsilon$-$\delta$-Bedingung erfüllt und $(x_n) \subset M$ mit $x_n \neq a$, $\lim x_n = a$. Dann ist für $\delta > 0$:

$$0 < |x_n - a| < \delta \text{ für alle } n \geq n_0(\delta)$$

Setze $\delta = \delta(\varepsilon)$, dann folgt:

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\delta(\epsilon)) = \tilde{n}_0(\varepsilon)$$

d.h. $f(x_n) \to A$ für $n \to \infty$.

b) ($\Rightarrow$) (indirekter Beweis)

Es existiere $\lim_{x \to a} f(x) = A$ und die $\varepsilon$-$\delta$-Bedingung sei „verletzt", d.h.: Es gibt ein „Ausnahme"-$\varepsilon$, z.B. $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x = x(\delta) \in M$ mit $0 < |x(\delta) - a| < \delta$ existiert mit $|f(x(\delta)) - A| \geq \varepsilon_0$.

Speziell für $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ setze $x_n := x\left(\frac{1}{n}\right)$. Dann ist $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$. Nach Voraussetzung folgt damit $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$ im Widerspruch zu $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

#### 3.1.1.2 Bemerkungen

1. $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium kann auch als Definition für $\lim_{x\to a} f(x) = A$ verwendet werden.
2. Ähnliche „folgenfreie Definitionen" gelten auch für die anderen Fälle von $\lim_{x\to a} f(x)$, z.B. für $A \in \{-\infty, \infty\}$. (s. Übungsaufgabe)
3. Weitere Kriterien für die Existenz von $\lim_{x\to a} f(x)$ ergeben sich durch Übertragung der Kriterien für die Konvergenz von Zahlenfolgen, z.B. ein „grenzwertfreies" CAUCHY-Kriterium.

**3.1.1.2.1 Beispiel:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3 \ ,$$

denn

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| = \left|\frac{x^3-1-3x+3}{x-1}\right| = \left|\frac{(x-1)^3+3(x-1)^2}{x-1}\right| = |(x-1)(x+2)| \ .$$

Wegen $|x+2| = |(x-1)+3| \le |x-1| + 3 < 4$ für $|x-1| < 1$ ist

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| < |x-1|\cdot 4 < \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < |x-1| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\} =: \delta(\varepsilon) \ .$$

### 3.1.2 Definition der Stetigkeit

a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall auf $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt $f$ *stetig in* $a \in I$, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ist, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \text{ für jede Zahlenfolge } (x_n) \subset I \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

b) $f$ heißt *stetig auf* $I$, falls $f$ stetig in jedem $a \in I$ ist.

c) Die Menge aller auf $I$ stetigen Funktionen wird mit $C(I)$ bezeichnet.

**3.1.2.0.1 $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium für Stetigkeit einer Funktion $f$:** Sei $f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a$ sei ein Häufungspunkt von $M$, dann gilt

$f$ ist stetig in $a \in M$

genau dann, wenn

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in M \text{ mit } (0 <)|x-a| < \delta$$

**3.1.2.0.2 Bemerkung:** Aus den Rechenregeln für Grenzwerte für Funktionen ergibt sich unmittelbar:

Sind $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in I$, so sind auch die Funktionen

$$f+g, \quad \alpha \cdot f, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

wieder stetig in $a$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, bei $\frac{f}{g}$ muss $g(a) \neq 0$ sein).

#### 3.1.2.1 Beispiele stetiger Funktionen

1) *Polynome*

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

sind stetig auf $\mathbb{R}$.

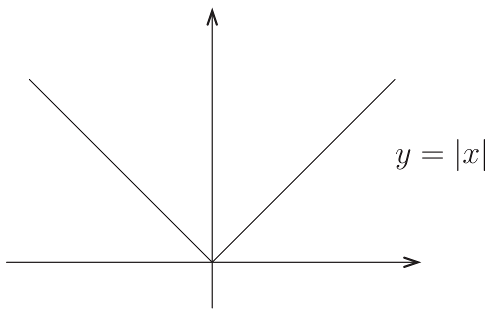
2) *Rationale Funktionen*

$$\frac{a_m x^m + \ldots + a_0}{b_k x^k + \ldots + b_0} \qquad (m, k \in \mathbb{N}_0,\ a_j, b_l \in \mathbb{R})$$

sind stetig auf ihrem (maximalen) Definitionsbereich.

3) *Betragsfunktion*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$




$f$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$, da aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ stets $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$ folgt nach dem Betragssatz 2.1.2.3, 6. für Zahlenfolgen.

#### 3.1.2.2 Unstetigkeiten reeller Funktionen

$$\text{Sei} \qquad A_- := \lim_{x\to a-} f(x), \qquad A_+ := \lim_{x\to a+} f(x)$$

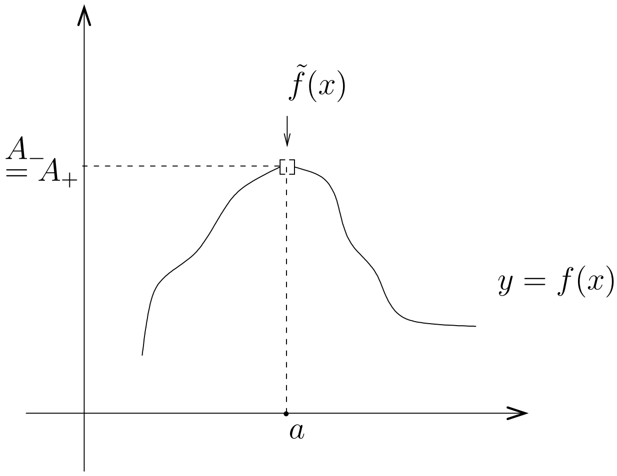
1) Unstetigkeiten 1. Art: $A_-$ und $A_+$ existiert.

   a)

$$A_- = A_+ \neq f(a) \qquad (\textit{hebbare Unstetigkeit})$$

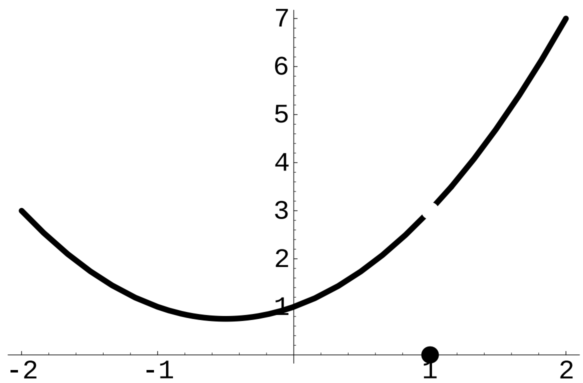
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq a \\ A_+ = A_- & \text{für } x = a \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig in $a$.




*Beispiel:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$



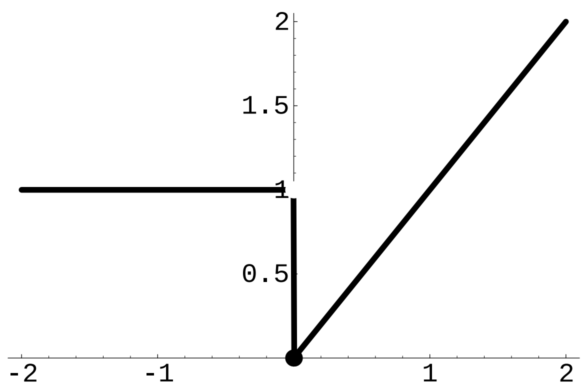

b)

$$A_- \neq A_+ \qquad (\textit{Sprungstelle})$$

Sprung hat Höhe $A_+ - A_-$.

*Beispiel:*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



2) Unstetigkeiten 2. Art: $A_-$ oder $A_+$ existiert nicht.

a)

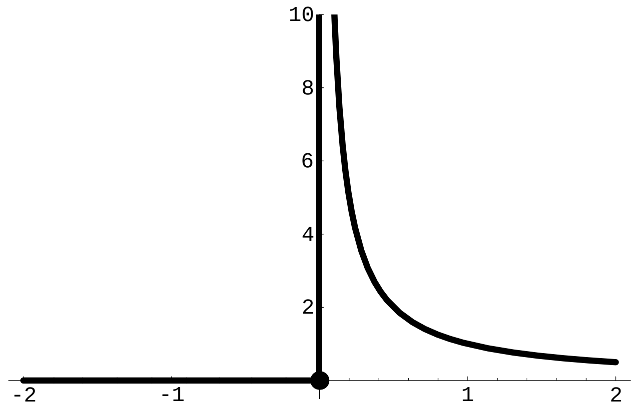
$$A_- \in \{-\infty, \infty\}, A_+ \in [-\infty, \infty] \qquad (\textit{Polstelle})$$

(bzw. umgekehrt)

*Beispiele:*

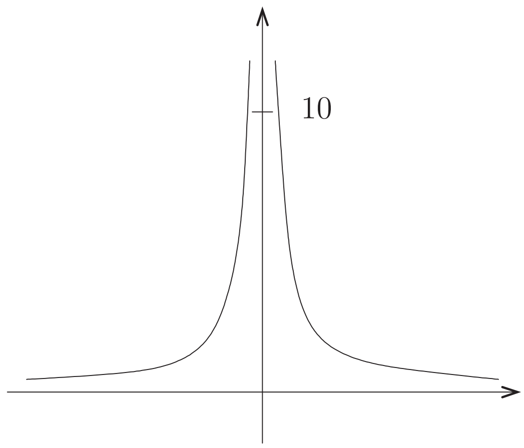
i)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$




ii)

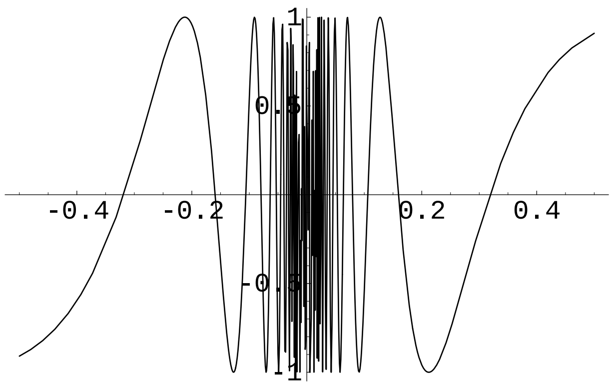
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 10 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$




b) $A_-$ oder $A_+$ existiert auch nicht im uneigentlichen Sinn (*wesentliche Unstetigkeit*)

*Beispiel:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$




Nachweis, dass $\lim_{x\to 0+} f(x)$ *nicht* existiert:

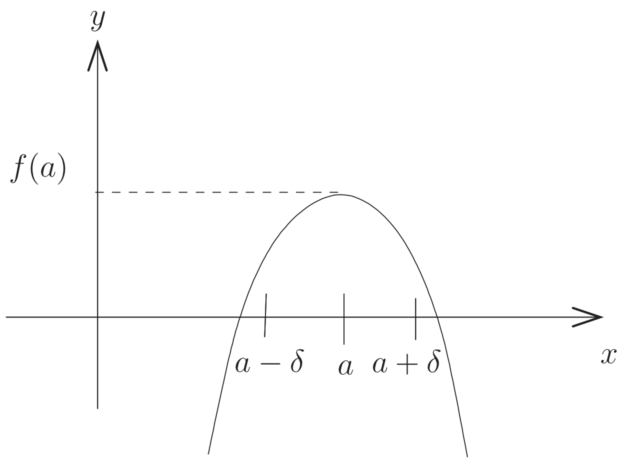
i) $0 < x_n$: $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$,
   d.h. $x_n = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$ für $n \to \infty$.

ii) $0 < \tilde{x}_n$: $\sin\left(\frac{1}{\tilde{x}_n}\right) = 1$,
   d.h. $\tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0$ aber $\sin\left(\frac{1}{\tilde{x}_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$ für $n \to \infty$.

# 3.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

## 3.2.1 Satz über den Vorzeichenerhalt

Ist $f$ stetig in $a \in I$ und $f(a) > 0$, so gibt es $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(a) \cap I$.




*Beweis:* Setze in $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium 3.1.2.0.1 $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$. Dann gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}f(a) \quad \text{für } x \in I, \quad |x - a| < \delta = \delta\left(\frac{1}{2}f(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(a) - \frac{1}{2}f(a)}_{=\frac{1}{2}f(a)>0} < f(x) < f(a) + \frac{1}{2}f(a) \quad \text{für } x \in I \text{ mit } a - \delta < x < a + \delta$$

### 3.2.2 Extremalsatz von Weierstraß

Sei $f$ stetig auf dem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[a, b]$, also $f \in C([a, b])$. Dann ist $f$ beschränkt, genauer: $f$ besitzt auf $[a, b]$ eine *Minimalstelle* und eine *Maximalstelle*, d.h. es existieren

$$x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] \text{ mit } f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

*Bezeichnungsweise:*

$$f(x_{\min}) = \min_{[a,b]} f = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$
$$f(x_{\max}) = \max_{[a,b]} f = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

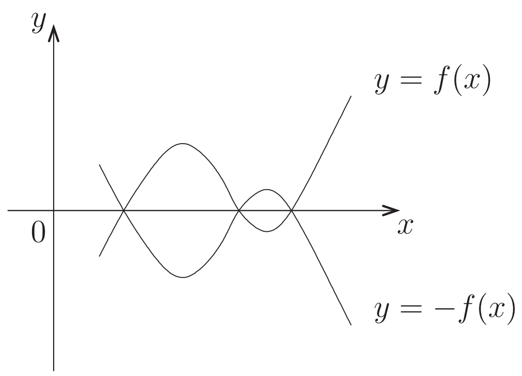
*Beweis:*

a) Sei $m := \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Dann ist $m = -\infty$ oder $m \in \mathbb{R}$. Nach Definition von inf gibt es eine Zahlenfolge $(f(x_n))$ mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$, wobei $x_n \in [a, b]$ und paarweise verschieden ist. Nach dem Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß 2.2.3 gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: \tilde{x}$, $\tilde{x} \in [a, b]$.

b) Benutze Stetigkeit von $f$ auf $[a, b] \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x})$. Nach dem Teilfolgenprinzip 2.2.2.1 muss $f(x_{n_k}) \to m$.

$$\Rightarrow \quad m = f(\tilde{x}) \quad \Rightarrow \quad m \neq -\infty \text{ und } f(\tilde{x}) = \min_{[a,b]} f$$

c) Wegen
$$\sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = -\inf\{-f(x) \mid x \in [a, b]\}$$
lässt sich die Existenz von $x_{\max}$ auf a), b) zurückführen.



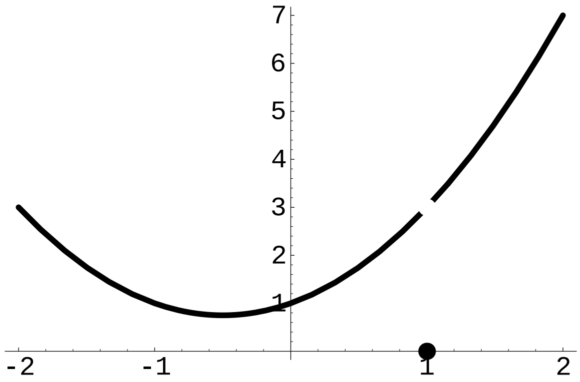
**3.2.2.0.1 Bemerkung:** Der Extremalsatz von Weierstraß 3.2.2 ist i.A. falsch für:

i) unstetige $f$ auf $[a, b]$

*Beispiel:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

$\sup\limits_{[0,1]} f = 3$, aber $f(x) < 3$ für alle $x \in [0, 1]$

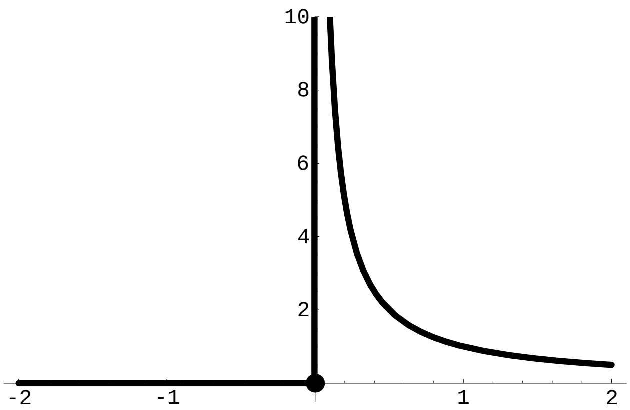



ii) stetige $f$ auf $(a, b]$

*Beispiel:*

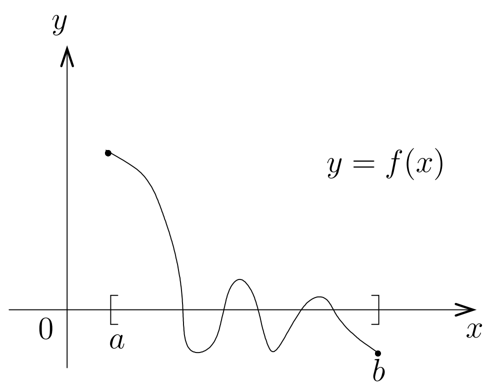
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$\sup\limits_{(0,1]} f = +\infty$




### 3.2.3 Nullstellensatz von Bolzano

Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig und gilt $f(a) > 0, f(b) < 0$ (oder $f(a) < 0, f(b) > 0$), so hat $f$ eine Nullstelle $x_N \in [a, b]$, d.h. $f(x_N) = 0$.



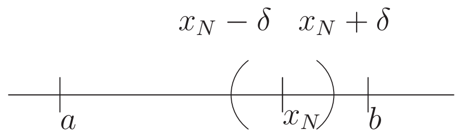
*Beweis:*

a) Sei $\mathcal{A} := \{x \in [a,b] \mid f(x) \geq 0\}$. Dann ist $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (weil $a \in \mathcal{A}$) und beschränkt. Dann existiert $x_N := \sup \mathcal{A}$, $x_N \in [a,b]$, genauer $x_N < b$, denn es gibt $(x_n) \subset \mathcal{A}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_N \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_N)\ .$$

wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f$. Weil $f(x_n) \geq 0$ ist, muss auch $f(x_N) \geq 0$ sein.

b) Wäre $f(x_N) > 0$, so existiert $\delta > 0 : f(x) > 0$ für alle $x \in (x_N - \delta, x_N + \delta) \cap [a,b]$.



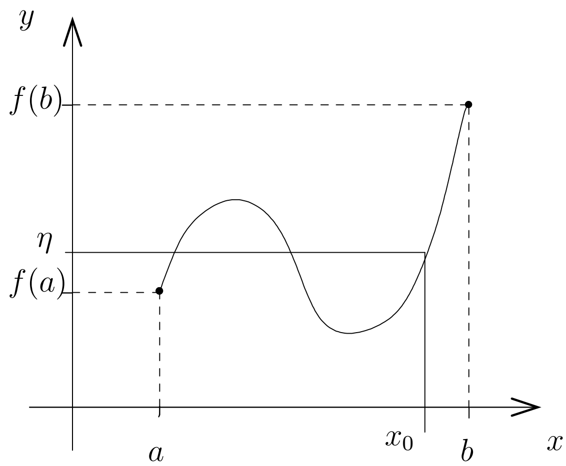

Wegen $x_N < b$ kann $\delta$ so gewählt werden, dass $(x_N - \delta, x_N + \delta) \subset [a,b]$. Folglich ist $f(x) > 0$ für $x_N < x < x_N + \delta < b$ im Widerspruch zur Definition von $x_N = \sup \mathcal{A} \Rightarrow f(x_N) = 0$.

## 3.2.4 Folgerungen

### 3.2.4.1 Zwischenwertsatz von Bolzano[I]

Ist $f$ stetig auf $[a,b]$, so nimmt $f$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an,

denn sei $\eta \in (f(a), f(b))$ (falls $f(a) < f(b)$), dann wende Nullstellensatz 3.2.3 auf $g(x) := \eta - f(x)$ an. ($g(a) > 0, g(b) < 0$)




### 3.2.4.2 Bisektionsverfahren zu Nullstellenbestimmung

Durch wiederholte Halbierung und Anwendung von 3.2.3 erhält man näherungsweise eine Nullstelle der reellen Funktion $f$ gemäß folgendem *Algorithmus*:

[I] Der Zwischenwertsatz kann aus dem Nullstellensatz abgeleitet werden und umgekehrt.

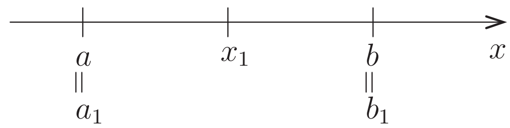
*gegeben:* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \cdot f(b) < 0$, Fehlerschranke $e$
*gesucht:* Nullstelle $x_N \in [a, b]$ mit Genauigkeit $e$

1. Schritt: Setze $a_1 := a, b_1 = b$.

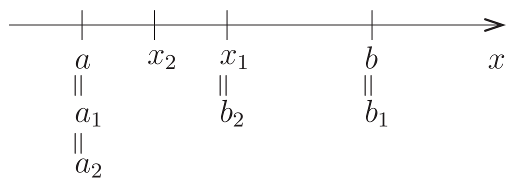

Führe für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgende Schritte aus.

2. Schritt: Ist $b_n - a_n < e$, so $x_N := a_n$ (oder $x_N := b_n$), weil $|x_N - a|, |x_N - b| < b_n - a_n < e$ und Abbruch, sonst

3. Schritt: $x_n := \frac{a_n + b_n}{2}$. Ist $f(x_n) = 0$, so $x_N := x_n$, andernfalls

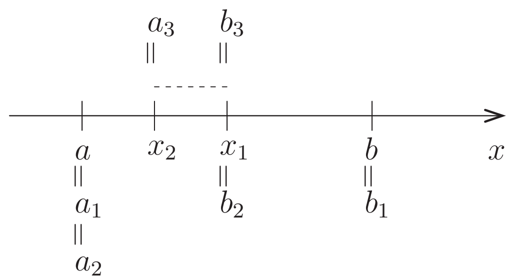



4. Schritt: Gilt $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$, so $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := x_n$ und gehe zu 2. Schritt.




$(f(a_1) \cdot f(x_1) < 0)$

5. Schritt: Gilt $f(a_n) \cdot f(x_n) > 0$, so $a_{n+1} := x_n$ und $b_{n+1} := b_n$ und gehe zu 2. Schritt.




$(f(a_2) \cdot f(x_2) > 0)$

### 3.2.5 Stetigkeit der Umkehrfunktion (der inversen Funktion) $f^{-1}$

#### 3.2.5.1 Definition

Sei $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I$ Intervall.

- Dann heißt $f$ *monoton wachsend* auf $I$, falls aus $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ folgt: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Dann heißt $f$ *monoton fallend* auf $I$, falls aus $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ folgt: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Wird „=“ ausgeschlossen, so spricht man von *strenger Monotonie*.

**3.2.5.1.1 Beispiel:** $f(x) = x^m, m \in \mathbb{N}$ ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend, denn aus $0 \leq x_1 < x_2$ folgt $0 \leq x_1^m < x_2^m$.

**3.2.5.1.2 Satz über Umkehrfunktion:** Ist $f$ auf $[a, b]$ stetig und streng monoton wachsend, so ist $f$ eine bijektive Abbildung von $[a, b]$ auf $[f(a), f(b)]$. $f^{-1}$ ist wieder stetig und streng monoton wachsend auf $[f(a), f(b)]$.
(analog für streng monoton fallendes $f$)

*Beweis:*

a) Für $a < x < b$ gilt $f(a) < f(x) < f(b)$, d.h. $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$. Wegen Zwischenwertsatz 3.2.4.1 ist jedes $\eta \in (f(a), f(b))$ auch Bild eines Punktes $x \in (a, b)$ und somit die Abbildung $f$ surjektiv.

b) Wir haben

$$a < x_1 < x_2 < b \qquad \Leftrightarrow \qquad f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)\ .$$

Daraus folgt die Injektivität von $f$ und die strenge Monotonie von $f^{-1}$ wegen $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

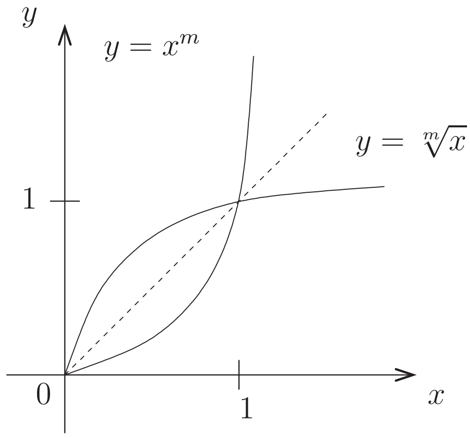
c) Zur Stetigkeit von $f^{-1}$: Sei $y, y_n \in [f(a), f(b)]$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y,\ y_n \neq y$. Dann ist $y = f(x), y_n = f(x_n)$ mit $x, x_n \in [a, b]$. Wegen der Beschränktheit der Zahlenfolge $(x_n)$ enthält diese eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$, wobei $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$ ist. Stetigkeit von $f$ liefert $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(\xi)$, und aus Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $f(\xi) = y = f(x) \Rightarrow \xi = x$. Daraus ergibt sich, dass jede Teilfolge von $(x_n)$ gegen $x$ konvergiert. Nach Teilfolgenprinzip 2.2.2.1 ist das gleichbedeutend mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, d.h. $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$.

#### 3.2.5.1.3 Anwendung:

Gemäß obigem Beispiel 3.2.5.1.1 ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^m$ ($y = x^m \Leftrightarrow x = \sqrt[m]{y}$), d.h. $f^{-1}(x) = \sqrt[m]{x}$ (*Wurzelfunktion*) stetig und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$. Mit dem Produktsatz 2.1.2.3, 2 ist folglich jede *Potenzfunktion*

$$\underbrace{x^r}_{=(\sqrt[n]{x})^m} \quad \text{mit } r = \frac{m}{n}, \; m, n \in \mathbb{N}$$

stetig auf $[0, \infty)$.

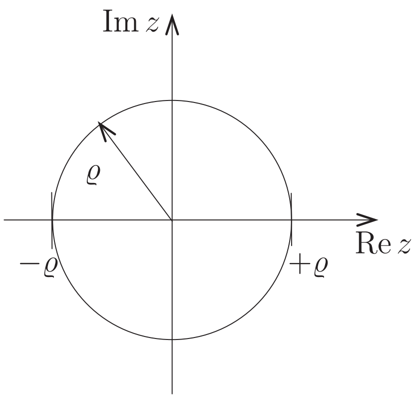



## 3.3 Weitere Klassen stetiger Funktionen

Bisher: Betragsfunktion, Polynome, rationale Funktionen, Wurzelfunktion, Potenzfunktion mit rationalen Exponenten als stetige Funktionen erkannt.

### 3.3.1 Potenzreihen

Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\varrho = \varrho(P) > 0$ und $a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine reelle Funktion $P : (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{R}$.




#### 3.3.1.1 Satz über die Stetigkeit von Potenzreihen

$P(x)$ ist für alle $x \in (-\varrho, \varrho)$ stetig.

*Beweisidee:* Sei $a \in (-\varrho, \varrho)$. Zu zeigen $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$. Benutze die Darstellung

$$P(x) - P(a) = (x - a)Q(x) \quad \text{mit} \quad Q(x) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} \right) \tag{3.3.1.1}$$

wobei der Reihen für $|x| < \varrho$ konvergieren.

Zum Beweis von 3.3.1.1:

**3.3.1.1.1 Hilfssatz:** Hat $P(z)$ den Konvergenzradius $\varrho > 0$, so hat $R(z) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ den gleichen Konvergenzradius $\varrho$.

*Beweis:*

a) Sei $|z| < \varrho$, so wählen wir $\varrho_1 \in \mathbb{R} : |z| < \varrho_1 < \varrho$. Wegen $\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$ für $|q| < 1$, folgt $n\left(\frac{|z|}{\varrho_1}\right)^n \to 0$, also $n\frac{|z|^n}{\varrho_1^n} < 1$ für $n \geq n_0(1)$.

$$\Rightarrow \quad |na_n z^n| = n\,|a_n|\,|z|^n < |a_n|\,\varrho_1^n$$

d.h. $\sum a_n \varrho_1^n$ eine konvergente Majorante zu $R(z)$. $\Rightarrow \varrho(R) \geq \varrho(P)$

b) Sei $|z| > \varrho$. Dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z|^n$ und bildet eine divergente Minorante zu $R(z)$, weil $|na_n z^n| \geq |a_n||z|^n$. $\Rightarrow \varrho(R) \leq \varrho(P)$

*Beweis von 3.3.1.1:*

i) Sei $a \in (-\varrho, \varrho)$. Zu zeigen $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$.

$$P(x) - P(a) = a_1(x-a) + a_2(x^2 - a^2) + \ldots + a_n(x^n - a^n) + \ldots$$

Wegen $x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$ (Summenformel der endlichen geometrischen Reihe) ist

$$|x^n - a^n| \leq |x-a| \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |a|^{n-1-k} \leq |x-a| n \left(\max\{|x|, |a|\}\right)^{n-1}$$

$$|P(x) - P(a)| \leq |x-a| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, n (\underbrace{\max\{|x|, |a|\}}_{<\varrho})^{n-1}$$ (Reihe konvergiert nach Hilfssatz 3.3.1.1.1)

$$\leq |x-a| M(a), \text{ falls } |x-a| < \frac{\varrho - |a|}{2}$$

ii) Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $(x_n) \subset (-\varrho, \varrho)$

$$\Rightarrow \quad |P(x_n) - P(a)| \underset{\text{a)}}{\leq} |x_n - a|\, M(a) \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad P(x_n) \to P(a)$$

### 3.3.1.2 Anwendungen

1) $e^x, \sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$ sind stetig für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n =: e^z$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} =: \sin z \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} =: \sinh z$$

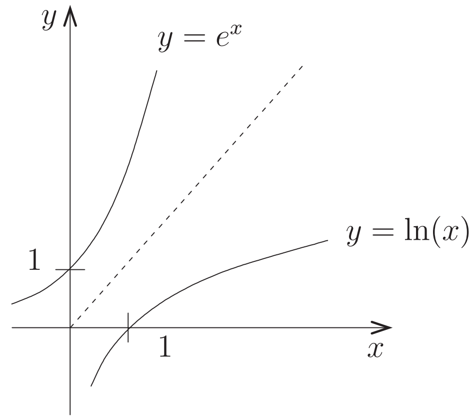
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} =: \cos z \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} =: \cosh z$$

(alle absolut konvergent für $z \in \mathbb{R}$)

2) Umkehrfunktion zu $y = f(x) = e^x$:

Sei $x_1 < x_2$.

$$\Rightarrow\ x_2 - x_1 > 0,\ \underbrace{e^{x_2 - x_1}}_{= e^{x_2}\frac{1}{e^{x_1}}} > 1 \ \Rightarrow\ e^{x_2} > e^{x_1}$$




$\Rightarrow e^x$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ Es existiert Umkehrfunktion

$$x = f^{-1}(y) =: \ln y = \log y$$

(*natürliche Logarithmusfunktion*) mit Definitionsbereich $(0, \infty)$, stetig für jedes $y \in (0, \infty)$.

3) Umkehrfunktion zu $y = \sin x$:

Für $x > 0$ ist Reihe alternierend, damit gilt:

$$|\sin x - x| \underset{\text{(s. 2.4.4.4.1)}}{\leq} \frac{x^3}{3!} \quad \Leftrightarrow \quad x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x + \frac{x^3}{6} = x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)$$

Für $0 < x < \sqrt{6}$ ist $\sin x > 0$.

Weiterhin gilt: $\cos x > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ist $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, so

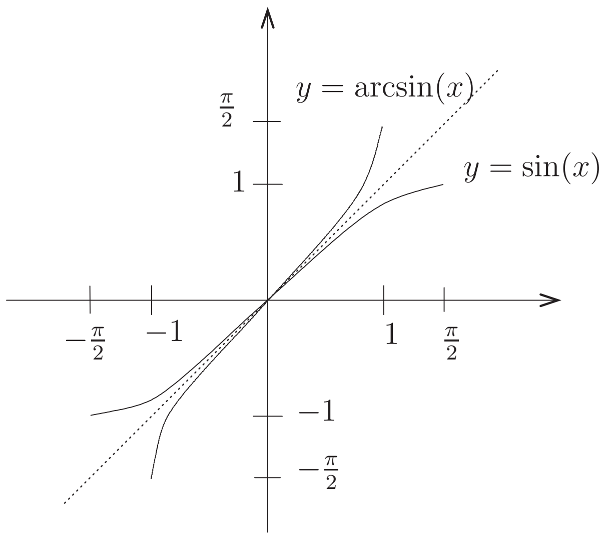
$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \underbrace{\sin \frac{x_2 - x_1}{2}}_{>0} \underbrace{\cos \frac{x_2 + x_1}{2}}_{>0} \qquad \text{(nach Übungsaufgabe 5.c)}$$

$\Rightarrow \sin x_2 > \sin x_1$, d.h. sin-Funktion ist streng monoton wachsend auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Nach dem Satz über Umkehrfunktion 3.2.5.1.2 existiert

$$x = \left(\sin^{-1}(y)\right) =: \arcsin(y)$$

(*Arcussinus-Funktion*) mit Definitionsbereich $[-1, 1]$ und ist stetig.



4) Umkehrfunktion zu $y = \cos x$:
   Wegen $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ist cos-Funktion streng monoton fallend für $x \in [0, \pi]$. (s. 3))
   $\Rightarrow$ Es existiert
   $$x = \left(\cos^{-1}(y)\right) =: \arccos(y) \qquad (\textit{Arcusscosinus-Funktion}),$$
   definiert und stetig auf $[-1, 1]$.

5) Umkehrfunktionen zu $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$ sind die sogenannten *Areafunktionen* (s. Übungsaufgabe).

### 3.3.2 Zusammengesetzte (oder mittelbare oder verkettete) Funktionen

**3.3.2.0.1 Satz:** Sei $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, d.h. $F$ ist Hintereinanderausführung von $f$ nach $g$, $x \in (a, b)$. Ist $g$ stetig in $x_0 \in (a, b)$ und $f$ stetig in $g(x_0)$, so ist $F$ stetig in $x_0$.

*Beweis:*

Sei $(x_n) \subset (a, b)$, $x_n \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann folgt $g(x_n) \to g(x_0)$
$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(g(x_n))}_{=F(x_n)} \to \underbrace{f(g(x_0))}_{=F(x_0)} \ .$$

**3.3.2.0.2 Beispiele:**

1) $$F(x) = \cosh\left(\frac{\sin(x^4 + 7x - 6)}{x^{192} + 17x^2 + 4}\right) \quad \text{ist stetig für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ denn}$$
   $$F = \cosh \circ \frac{f_1}{f_2} \text{ mit } f_1(x) = \sin(f_3(x)), f_3(x) = x^4 + 7x - 6 \text{ und } f_2(x) = x^{192} + 17x^2 + 4$$

2) Definition der *allgemeinen Potenz*
   $$b^\alpha := e^{\alpha \ln b} = \exp\left[\alpha \ln b\right]$$
   für $\alpha \in \mathbb{R}$ (*Exponent*) und $b > 0$ (*Basis*)

   a) *Exponentialfunktion zur Basis b*
   $$b^x = \left(\exp \circ (\mathrm{id} \ln b)\right)(x)$$
   definiert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei ist
   $$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y := \frac{\ln y}{\ln b} \text{ für } y, b > 0;\ b \neq 1 \textit{ (Logarithmus von y zur Basis b).}$$

   b) *Potenzfunktion*
   $$x^\alpha = \left(\exp \circ (\alpha \ln)\right)(x)$$
   definiert und stetig für alle $x > 0$.

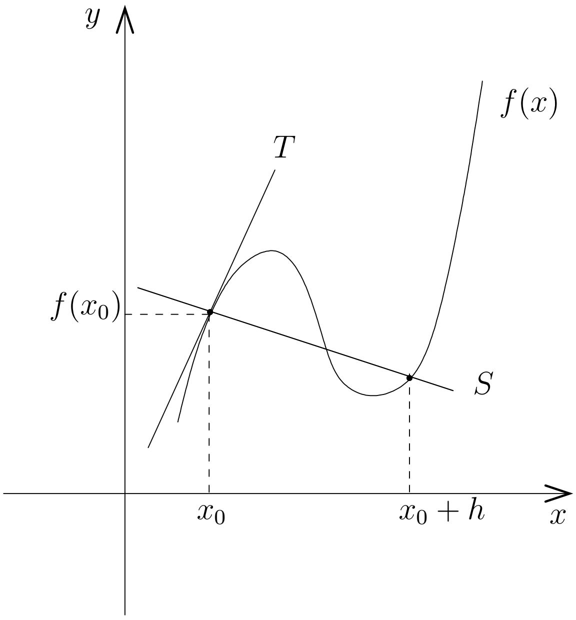
# Kapitel 4

# Differenzierbarkeit reeller Funktionen

## 4.1 Differentialquotient und Differentiationsregeln

#### 4.1.0.1 Geometrische Motivation

Tangentenproblem (17. Jahrhundert):




$S$ – *Sekante* durch

$$\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$$

hat Anstieg

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Für Grenzübergang $h \to 0$ geht $S$ in eine Grenzlage, nämlich in *Tangente* $T$, über.

#### 4.1.0.2 Physikalische Motivation

Problem der Momentangeschwindigkeit: Ein Massepunkt $P$ bewege sich entlang einer Geraden gemäß des Weg-Zeit-Gesetzes: $t \mapsto s(t)$. Gesucht ist die *Momentangeschwindigkeit* $v(t_0)$ von $P$ zum Zeitpunkt $t_0$. Empirisch bestimmbar ist jedoch nur die mittlere Geschwindigkeit $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$, $t \neq t_0$. Diese ist jedoch abhängig von $t$. Um einen von $t$ unabhängigen

Wert zu erhalten, betrachtet man deshalb

$$\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} =: v(t_0) = \dot{s}(t_0)\ .$$

### 4.1.1 Definition der Ableitung

Sei $f$ definiert für $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Dann heißt der (eigentliche) Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$$

*Ableitung* (oder *1. Ableitung*) oder *Differentialquotient* von $y = f(x)$ an der Stelle $x_0$. $f : (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ heißt dann *differenzierbar* in $x_0$.

*Bezeichnung:*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) \qquad \text{(nach Leibniz)}$$

Der Differentialquotient ist Grenzwert der *Differenzenquotienten* $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

**4.1.1.0.1 Folgerung:** Die Tangente $T$ an $y = f(x)$ im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ hat den Anstieg $f'(x_0)$.
Gleichung von $T$:

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

**4.1.1.0.2 Beispiel:** $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$$

#### 4.1.1.1 Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Wir schreiben $\quad f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + r(h) \quad$ *(Zerlegungsformel).*

$$\begin{aligned} & f \text{ ist in } x_0 \text{ differenzierbar} \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left( \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + r(x-x_0) \\ & \text{mit } \frac{r(x-x_0)}{x-x_0} \to 0 \text{ für } x \to x_0 \end{aligned} \tag{4.1.1.1}$$

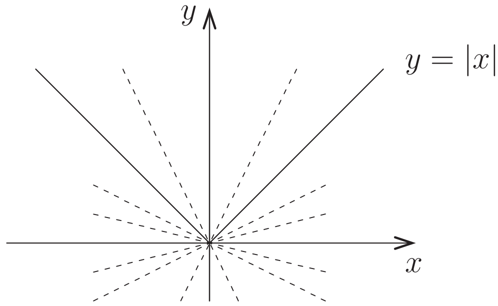
Damit folgt:

$$\lim_{h\to 0} \big(f(\underbrace{x_0+h}_{x}) - f(x_0)\big) = 0$$

d.h. $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$, also

$$\text{Differenzierbarkeit in } x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{Stetigkeit in } x_0$$

*Achtung!:* Umkehrung dieser Aussage ist falsch, z.B. ist die Funktion $y = |x|$ stetig für $x_0 = 0$, aber dort *nicht differenzierbar*, weil




$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

nicht existiert.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = +1, \; \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

### 4.1.2 Differentiationsregeln

Seien $f, g$ differenzierbar in $x_0$. Dann gilt:

i) *Summenregel*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \text{ für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

*Beweis:*

$$\frac{1}{h}\Big(\alpha f(x_0+h) + \beta g(x_0+h) - \big(\alpha f(x_0) + \beta g(x_0)\big)\Big)$$
$$= \alpha \frac{1}{h}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) + \beta \frac{1}{h}\big(g(x_0+h) - g(x_0)\big) \to \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

für $h \to 0$

ii) *Produktregel*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

*Beweis:* siehe Übungsaufgabe

iii) *Quotientenregel*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\ , \quad \text{falls } g(x_0) \neq 0.$$

*Beweis:*

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)$$
$$= \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\left(\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0)\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)}\right)$$

Wegen der Stetigkeit von $g$ in $x_0$ ist $\lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$, so dass

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) \to \frac{1}{\big(g(x_0)\big)^2}\big(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\big)$$

#### 4.1.2.1 Anwendungen

1)

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

denn

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= (x \cdot x^{n-1})' \underset{\text{ii)}}{=} 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = x^{n-1} + x(x \cdot x^{n-2})' \\
&\underset{\text{ii)}}{=} x^{n-1} + x(1 \cdot x^{n-2} + x \cdot (x^{n-2})') = 2x^{n-1} + x^2(x^{n-2})' \\
&= \cdots = n \cdot x^{n-1} + x^n \underbrace{(x^0)'}_{=0} \\
&= n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

2)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' \underset{\text{iii)}}{=} \frac{0 \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

3)

$$(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0)' \underset{\text{i),1)}}{=} a_m m x^{m-1} + a_{m-1}(m-1)x^{m-2} + \ldots + a_1$$

#### 4.1.2.2 Differentiation von Potenzreihen

**4.1.2.2.1 Satz:** Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent für $x \in (-\varrho, \varrho), \varrho > 0$. Dann ist die Potenzreihe $P(x)$ dort differenzierbar mit $P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, d.h. $P'(x)$ ensteht durch gliedweise Differentiation. Die Potenzreihe $P'(x)$ besitzt wieder den gleichen Konvergenzradius $\varrho$ (gemäß Hilfssatz 3.3.1.1.1).

*Beweis:*

Im Beweis des Stetigkeitssatzes für Potenzreihen 3.3.1.1 hatten wir die Darstellung (3.3.1.1) hergeleitet:

$$P(x) - P(x_0) = (x - x_0)Q(x) \quad \text{mit der Reihe} \quad Q(x) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\right)$$

welche für $|x_0| < \varrho$ und $|x - x_0| < \varrho - |x_0|$ absolut konvergiert. Durch Umordnung entsteht aus $Q$ wieder eine Potenzreihe in $x$. Der Stetigkeitssatz für Potenzreihen 3.3.1.1 impliziert $\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0)$.

$$\Rightarrow \qquad \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = Q(x) \to Q(x_0),$$

d.h.

$$P'(x_0) = Q(x_0) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} \right)}_{= n x_0^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x_0^{n-1}$$

#### 4.1.2.2.2 Beispiele:

1)

$$(e^x)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)! \cdot n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

2)

$$(\sin x)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (2n+1) x^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \cos x$$

Analog ergibt sich

3) $(\cos x)' = -\sin x$

4) $(\sinh x)' = \cosh x$

5) $(\cosh x)' = \sinh x$

#### 4.1.2.3 Differentiation von verketteten oder zusammengesetzten Funktionen

Eine der wichtigsten Differentiationsregeln ist die *Kettenregel*:

Sei $F(x) := f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ für $x \in (a,b)$, $g$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$ und $f$ differenzierbar in $g(x_0)$. Dann ist $F$ differenzierbar in $x_0$ mit

$$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Setzt man $u := g(x)$ und $y := F(x) = f(u)$, dann gilt:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{dg}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

*Beweis:*

Wir setzen $u_0 := g(x_0)$, dann gilt mit 4.1.1.1

$$f(u) - f(u_0) = f'(u_0)(u - u_0) + r(u - u_0) \text{ mit } \lim_{u \to u_0} \frac{r(u - u_0)}{u - u_0} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x - x_0}(F(x) - F(x_0)) &= \frac{1}{x - x_0}(f(\overbrace{g(x)}^{=u}) - f(\overbrace{g(x_0)}^{=u_0})) \\
&= f'(u_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{r(g(x) - g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(u_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{r(g(x) - g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0))g'(x_0) + 0 \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Beachte, dass wegen der Stetigkeit von $g$ in $x_0$ gilt $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

##### 4.1.2.3.1 Beispiele:

1) $(\sin x^2)'$: $\quad y = \sin u$, $u = x^2$

$$\left(\sin x^2\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x \cos\left(x^2\right)$$

2) $(b^x)' = \left(e^{x \ln b}\right)'$: $\quad y = e^u$, $u = x \ln b$

$$(b^x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \ln b = \ln b \cdot b^x$$

3) $\left(\cosh\left(e^{x^4}\right)\right)'$: $\quad y = \cosh u$, $u = e^v$, $v = x^4$

$$\left(\cosh\left(e^{x^4}\right)\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \sinh u \cdot e^v \cdot 4x^3 = 4x^3 e^{x^4} \sinh\left(e^{x^4}\right)$$

### 4.1.3 Höhere Ableitungen

i) Setzt man $h(x) := f'(x), x \in (a,b)$, so ist

$$h'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

die *2. Ableitung* von $f$ an der Stelle $x_0 \in (a,b)$.

ii) Allgemein definiert man die *n-te Ableitung* von $f$ rekursiv durch:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \frac{df^{(n-1)}}{dx}(x_0), \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0), \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

iii) $f \in C^k(I)$ heißt, dass $f$ *k-mal stetig differenzierbar* ist auf $I \subset \mathbb{R}$, d.h. $f^{(l)}(x)$ existiert und ist stetig in allen Punkten $x \in I$ für $l = 0, 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin wird $C^0(I) := C(I)$ und $C^\infty(I) := \cap_{k=0}^{\infty} C^k(I)$ gesetzt.

#### 4.1.3.1 Beispiele

1) $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x,\ f''(x) = (2x)' = 2,\ f'''(x) = (2)' = 0,\ f^{(n)}(x) = 0 \text{ für } n = 4, 5, \ldots$$

2) $f(x) = xe^{x^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(xe^{x^2}\right)' = 1 \cdot e^{x^2} + x\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2}(1 + 2x^2) \\ f''(x) &= \left(\left(1 + 2x^2\right) e^{x^2}\right)' = (1 + 2x^2)' e^{x^2} + (1 + 2x^2)\left(e^{x^2}\right)' \\ &= 4x \cdot e^{x^2} + (1 + 2x^2)e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2}\left(6x + 4x^3\right) \end{aligned}$$

3) Jede Potenzreihe $P(x)$ ist beliebig oft differenzierbar in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, $\rho > 0$, also $P \in C^\infty\big((x_0 - \rho, x_0 + \rho)\big)$, und alle Ableitungen von $P$ werden gliedweise berechnet.

## 4.2 Mittelwertsätze

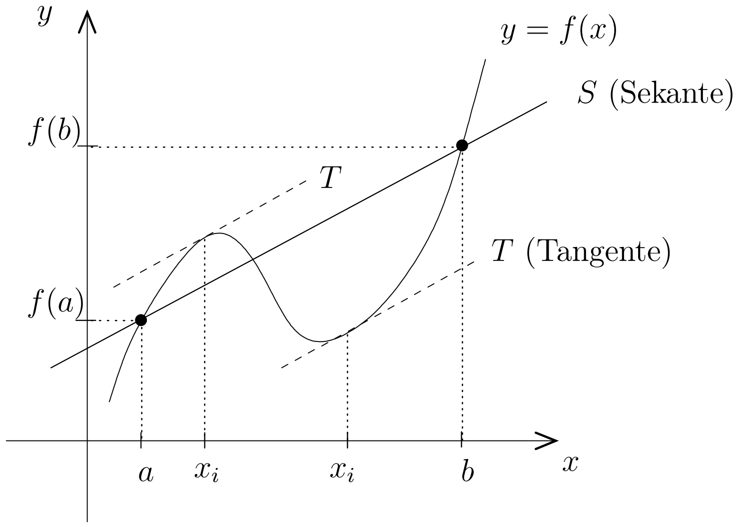
*Ziel:* Aus Kenntnissen über die 1. Ableitung $f'$ der reellen Funktion $f$ auf Eigenschaften von $f$ selbst schließen. Zentrale Methode dafür ist die Anwendung der Mittelwertsätze.

### 4.2.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in $(a,b)$, so gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

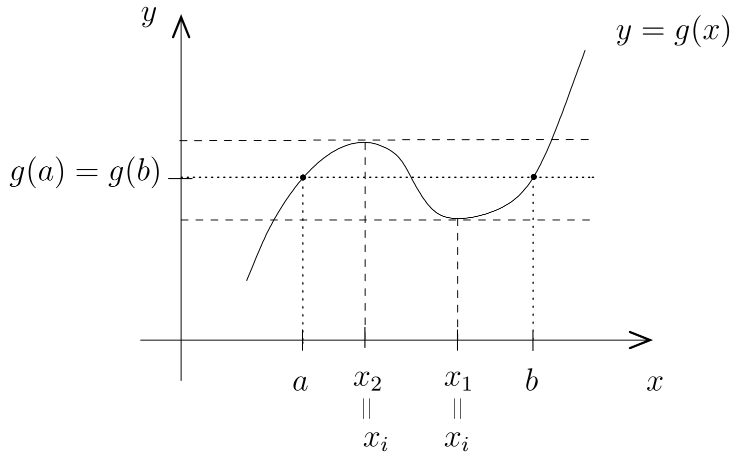
#### 4.2.1.0.1 Geometrische Deutung:

Mittelwertsatz bedeutet: Zu jeder Sekante $S$ an $y = f(x)$ gibt es mindestens eine parallele Tangente $T$.




### 4.2.2 Satz von Rolle[I] (Sonderfall des Mittelwertsatzes)

Ist $g$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar in $(a, b)$ und $g(a) = g(b)$. Dann hat $g'$ mindestens eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$, d.h. es gibt $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$.




*Beweis:*

i) Nach dem Satz von Weierstraß 3.2.2 hat die stetige Funktion $g$ auf $[a, b]$ ein Minimum in $x_1 \in [a, b]$ und ein Maximum in $x_2 \in [a, b]$, d.h.

$$g(x_1) = \min_{[a,b]} g \leq g(x) \leq \max_{[a,b]} g = g(x_2) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

1. Fall:

$$g(x_1) = g(x_2) \quad \Rightarrow \quad g(x) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 0$$

[I] Rolle (1652-1719)

2. Fall:

$$g(x_1) < g(x_2)$$

Dann muss nach Voraussetzung $x_1 \in (a,b)$ oder $x_2 \in (a,b)$ sein. Sei $x_1 \in (a,b)$.

ii) Da $g(x_1) = \min_{[a,b]} g \leq g(x)$ folgt

$$\frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \geq 0 \quad \text{für } x_1 < x < b \qquad\qquad \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \leq 0 \quad \text{für } a < x < x_1$$

$$g'(x_1) = \lim_{x \to x_1+} \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \geq 0 \qquad\qquad g'(x_1) = \lim_{x \to x_1-} \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq g'(x_1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad g'(x_1) = 0$$

**4.2.2.0.1 Bemerkung:** Aus dem Beweisteil ii) folgt unmittelbar:
Hat $g$ in einem Punkt $x_1 \in (a,b)$ ein Minimum (oder Maximum), so ist $g'(x_1) = 0$.

**4.2.2.0.2 Beweis des Mittelwertsatzes:**

$$\text{Setze} \quad g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ ,$$

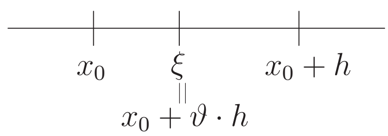
dann sind für $g$ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle 4.2.2 erfüllt, denn $g(a) = f(a) = g(b)$. Somit existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

### 4.2.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes

I) Umformulierung:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0+\vartheta h)h \quad \text{mit } h \in (-h_0,h_0), \vartheta \in (0,1)$$

$(a = x_0, b = x_0 + h$ (oder umgekehrt), $\xi = x_0 + \vartheta h)$




II) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist $f(x) = \text{const}$ für $x \in [a,b]$, denn für *festes* $x_0 \in (a,b)$ ist mit $x \in [a,b]$ nach I)

$$f(x) - f(x_0) = f'(\underbrace{x_0 + \vartheta(x-x_0)}_{\in (x_0,x) \cup (x_0,x) \subseteq (a,b)})(x-x_0) = 0 \cdot (x-x_0) = 0$$

III) Gilt $f_1'(x) = f_2'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so $f_1 = f_2 + \text{const}$, denn setze $f := f_1 - f_2$ und wende II) auf $f$ an.

IV) Herleitung von Ungleichungen aus dem Mittelwertsatz, z. B.

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2| \quad \text{für } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \sin x_1 - \sin x_2 &\underset{\text{I)}}{=} \sin'(x_2 + \vartheta(x_1 - x_2))(x_1 - x_2) \\ |\sin x_1 - \sin x_2| &= \underbrace{|\cos(x_2 + \vartheta(x_1 - x_2))|}_{\leq 1} |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

V) *Monotonietest*

Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist $f(x)$ in $[a,b]$ monoton wachsend. Wird „=“ ausgeschlossen, so gilt strenge Monotonie.

Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist $f(x)$ in $[a,b]$ monoton fallend. Wird „=“ ausgeschlossen, so gilt strenge Monotonie.

*Beweis* (1. Aussage):

Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, dann gilt nach I)

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{f'(x_2 + \vartheta(x_1 - x_2))}_{\geq 0} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

### 4.2.4 Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Ist $f$ stetig auf $[a,b]$, differenzierbar in $(a,b)$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann existiert $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to (a,b)$ mit

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \qquad \text{für alle } y \in (f(a), f(b))$$

*Beweis:*

a) Wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (a,b)$ ist $f$ streng monoton wachsend und nach dem Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion 3.2.5.1.2 ist $f$ bijektiv und $f^{-1}$ stetig.

b) Sei $(y_n) \subset [f(a), f(b)]$ eine beliebige Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y, y_n \neq y$. Dann gibt es

$$\begin{aligned} (x_n) \subset [a,b] \text{ mit } y_n = f(x_n) \;&\Leftrightarrow\; x_n = f^{-1}(y_n) \text{ und} \\ x \in (a,b) \text{ mit } y = f(x) \;&\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}} \to \frac{1}{f'(x)} \text{ für } n \to \infty$$

weil

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = f^{-1}(y) = x$$

wegen Stetigkeit von $f^{-1}$ nach a)

$$\Rightarrow \lim_{\tilde{y}\to y} \frac{f^{-1}(\tilde{y}) - f^{-1}(y)}{\tilde{y} - y} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

#### 4.2.4.0.1 Bemerkung:

i) Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ zu $y = f(x)$ ist gemäß Leibniz:

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

ii) Ein analoger Satz gilt bei $f'(x) < 0$.

#### 4.2.4.1 Beispiele

1) $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ für $x, y > 0$

$$\frac{d\left(\sqrt{y}\right)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d(x^2)}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

oder

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, $y > 0$

$$\frac{d(\ln y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d(e^x)}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

also $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3)

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \frac{d(e^u)}{du}\frac{du}{dx} \underset{2)}{=} e^u \cdot \alpha\frac{1}{x} = \alpha e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$(\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0,\ u = \alpha \ln x)$$

4) $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{d(\arcsin y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{d}{dx}(\sin x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

also

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)$$

5) $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$, $x \in (0, \pi)$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

### 4.2.5 Verallgemeinerter Mittelwertsatz (Quotientenmittelwertsatz)

Sind $f, g$ stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $(a,b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einem $\xi \in (a,b)$.

*Beweis:*

Anwendung des Satzes von Rolle 4.2.2 auf

$$h(x) := \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x)$$

Dann ist $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$ und es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$h'(\xi) = \big(f(b)-f(a)\big)g(\xi) - \big(g(b)-g(a)\big)f(\xi) = 0\ .$$

### 4.2.6 Folgerung (Grenzwertregel von L'HOSPITAL[II])

Seien $f, g$ in $(a,b)$ differenzierbar mit $\lim_{x\to a+} f(x) = 0, \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls rechtsstehender Grenzwert existiert in $[-\infty, \infty]$ (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne).

*Beweis:*

[II] L'HOSPITAL(1661-1704)

Wir setzen $f(a) := 0$ und $g(a) := 0$. Dann sind die Voraussetzungen des Quotientenmittelwertsatzes erfüllt, und wir haben für $x > a$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{mit } a < \xi < x, \xi = \xi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to a+} \xi(x) = a \text{ und } \lim_{x \to a+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und somit die Behauptung.

### 4.2.6.1 Bemerkungen

i) $\frac{f}{g}$ ist an der Stelle $x = a$ ein sogenannter *unbestimmter Ausdruck* des Typs „$\frac{0}{0}$“. Regel gilt auch für „$\frac{\infty}{\infty}$“, also falls $\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a+} g(x) = +\infty$ ist.

ii) Regel gilt entsprechend für $x \to b-$, also auch für $x \to x_0$, $x_0 \in (a, b)$, sowie für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

iii) Oft führt erst wiederholte Anwendung der Regel zur Berechnung des Grenzwertes.

### 4.2.6.2 Beispiele

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, Prüfung der Voraussetzung: $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0, \lim_{x \to 0} x = 0$, (Typ „ $\frac{0}{0}$“)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \underset{4.2.6}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$, (Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{4.2.6}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \underset{4.2.6}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

($\lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$, weil $e^x > x$ für $x > 0$)

3) $\lim_{x \to 0+} x \ln x$, (Typ „$0 \cdot \infty$“)
Umschreibung in $\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, (Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{4.2.6}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

## 4.3 TAYLORscher Lehrsatz

### 4.3.1 TAYLORsche Formel[III]

Es sei die reelle Funktion $f$ in $U_h(x_0) = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$, $(n+1)$-differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in U_h(x_0)$ eine Zwischenstelle $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0), \vartheta \in (0,1)$, so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =: T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=: R_n(x)}$$

#### 4.3.1.1 Bemerkungen

1) TAYLORsche Formel lautet kurz:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

mit dem *$n$-ten* TAYLOR*polynom* $T_n$ und dem LAGRANGE*schen Restglied*[IV] $R_n$.

2) Die TAYLORsche Formel ist von fundamentaler Bedeutung für die Analysis, weil jede beliebige differenzierbare Funktion durch bekannte Funktionen (Polynome $T_n$) approximiert werden kann (bis auf Rest $R_n(x)$).

3) Beachte: $\xi$ hängt von $x, x_0, n$ ab!

4) Für $n = 0$ ist die TAYLORsche Formel der Mittelwertsatz.

#### 4.3.1.2 Beweis der TAYLORschen Formel

a) Wir setzen $F(x) := f(x) - T_n(x), G(x) := (x - x_0)^{n+1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &G(x_0) = 0, G'(x_0) = 0,\ G''(x_0) = 0, && \ldots, G^{(n)}(x_0) = 0, G^{(n+1)}(x) = (n+1)! \\ &F(x_0) = 0, F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0, && \ldots, F^{(n)}(x_0) = 0, F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

für $x \in U_h(x_0) = (x_0 - h, x_0 + h)$.

b) Wiederholte Anwendung des Quotientenmittelwertsatzes 4.2.5 liefert

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} \underset{4.2.5}{=} \frac{F'(x_0 + \vartheta_1(x - x_0))}{G'(x_0 + \vartheta_1(x - x_0))} = \frac{F'(x_0 + \vartheta_1(x - x_0)) - F'(x_0)}{G'(x_0 + \vartheta_1(x - x_0)) - G'(x_0)}$$

$$\underset{4.2.5}{=} \frac{F''(x_0 + \vartheta_2\vartheta_1(x - x_0))}{G''(x_0 + \vartheta_2\vartheta_1(x - x_0))} \underset{4.2.5}{=} \ldots \underset{4.2.5}{=} \frac{F^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{G^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))} \underset{\text{a)}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

[III] TAYLOR (1685-1731)
[IV] LAGRANGE (1736-1813)

mit $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$ und $\vartheta = \vartheta_n \vartheta_{n-1} \ldots \vartheta_1 \in (0,1)$.

$$\Rightarrow\ F(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ \Rightarrow\ 4.3.1$$

#### 4.3.1.3 Beispiel

$$f(x) = \sqrt{x},\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\ f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

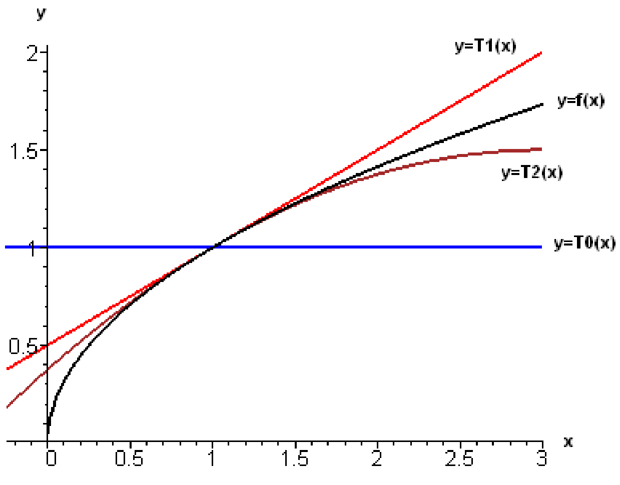
$x_0 = 1$:

$$f(x) = \sqrt{1} + \frac{\frac{1}{2}\xi_0^{-\frac{1}{2}}}{1!}(x-1) = \underbrace{1}_{T_0(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\xi_0^{-1}(x-1)}_{R_0(x)}$$

$$f(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{T_1(x)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8}\xi_1^{-\frac{3}{2}}(x-1)^2\right)}_{R_1(x)}$$

$$f(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2}_{T_2(x)} + \underbrace{\frac{3}{6\cdot 8}\xi_2^{-\frac{5}{2}}(x-1)^3}_{R_2(x)}$$

mit $\xi_i = 1 + \vartheta_i(x-1),\ \vartheta_i \in (0,1),\ i = 0,1,2.$




*Anwendung:*

$$\sqrt{2} = f(2) \approx T_2(2) \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{8}\cdot 1^2 = 1.375$$

mit Fehler $R_2(2)$.

## 4.3.2 Anwendungen des TAYLORschen Lehrsatzes

### 4.3.2.1 Taylorentwicklung

Nachteil von 4.3.1 ist das Restglied $R_n(x)$, da i.A. $\xi$ nicht bekannt ist. Häufig lässt sich jedoch $R_n(x)$ abschätzen.

Wichtiger Fall: Ist $f$ in $U_h(x_0)$ beliebig oft differenzierbar, so kann 4.3.1 für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ aufgeschrieben werden und Grenzübergang $n \to \infty$ betrachtet werden. Unter der Voraussetzung, dass $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ist für $x \in U_h(x_0)$, ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (\text{TAYLOR}\textit{reihe})$$

**4.3.2.1.1 Beispiel:** $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (-1,1)$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} = n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}$$

$$4.3.1 \;\Rightarrow\; (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + \underbrace{\binom{\alpha}{n+1}(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}}_{R_n(x)}, \quad \vartheta \in (0,1)$$

Für $0 \le x < 1$ ist $1 \le 1+\vartheta x < 1+x$.

$$\Rightarrow\; (1+\vartheta x)^{\alpha-n-1} \le 1 \quad \text{für } n > \alpha - 1$$

$$\Rightarrow\; |R_n(x)| \le \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot 1 \cdot |x|^{n+1}$$

*Hilfsbetrachtung:*

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$ wird auf Konvergenz untersucht mittels Quotientenkriterium 2.4.4.3.2:

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}z^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}z^n}\right| = \left|\frac{(\alpha-n)z}{n+1}\right| \to |z| \text{ für } n \to \infty$$

Damit ist der Konvergenzradius gleich 1 und

$$\binom{\alpha}{n}z^n \to 0\ , \text{ falls } |z| < 1\ .$$

Das bedeutet für $0 \le x < 1$: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (analog für $-1 < x < 0$)

$$\Rightarrow\; (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad (\textit{binomische Reihe})$$

**4.3.2.1.2 Spezialfall:** Sei $f(x)$ durch eine Potenzreihe gegeben, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,\ a_n \in \mathbb{R},\ x \in (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$$

Dann ist $f$ beliebig oft differenzierbar in $x \in (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1},\ f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x - x_0)^{n-2}$$
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(durch gliedweise Differentiation)

$$\Rightarrow\ f(x_0) = a_0,\ f'(x_0) = a_1 \cdot 1,\ f''(x_0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1,\ \dots,\ f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$$

$$\Rightarrow\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (0! = 1)$$

Ergebnis: Eine Potenzreihe ist die TAYLORreihe ihrer Summenfunktion an der Entwicklungsstelle $x_0$.

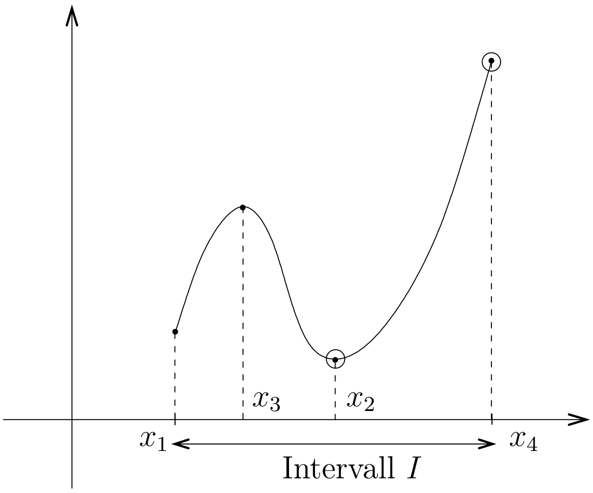
### 4.3.2.2 Extremwertbetrachtungen

#### 4.3.2.2.1 Definitionen:

a) Eine reelle Funktion $f$ hat auf dem Intervall $I$ ein *lokales* (bzw. *relatives*) *Minimum* in $x_0 \in I$, falls es eine Umgebung $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$.

b) Eine reelle Funktion $f$ hat auf dem Intervall $I$ ein *lokales* (bzw. *relatives*) *Maximum* in $x_0 \in I$, falls es eine Umgebung $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$.

c) Lokale Maxima bzw. Minima heißen auch *lokale Extrema* im Gegensatz zu den *globalen* (bzw. *absoluten*) *Extrema* $\max_{x \in I} f(x)$ bzw. $\min_{x \in I} f(x)$.

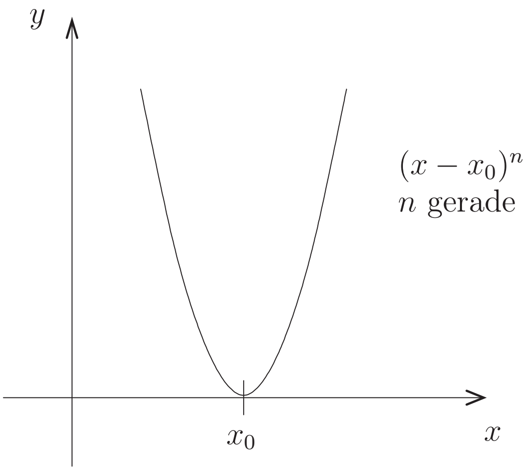


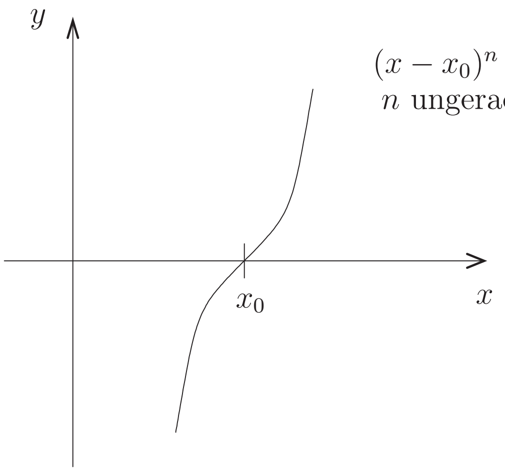

$x_1, x_2$ – lokale Minimalstellen
$x_3, x_4$ – lokale Maximalstellen
$x_2, x_4$ – globale Extremalstellen

Als Folgerung des Beweises des Satzes von Rolle 4.2.2 ergab sich die

*notwendige Bedingung* für ein lokales Extremum in $x_0 \in (a, b)$ : $\quad f'(x_0) = 0.$

Für *hinreichende Bedingungen* nutzen wir die Kenntnis des Verhaltens von $(x - x_0)^n$ aus:




**4.3.2.2.2 Satz:** Die Funktion $f$ besitze in $U_\delta(x_0)$ stetige Ableitung bis zur Ordnung $n$ und es sei

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

jedoch $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1. Fall: Ist $n$ ungerade, dann ist $x_0$ *keine* Extremalstelle.

2. Fall: Ist $n$ gerade, dann hat $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ bzw. ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.

*Beweis:*
In TAYLORformel ist $T_{n-1}(x) = f(x_0)$ wegen der Voraussetzung $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$ und folglich

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - T_{n-1}(x) \underset{4.3.1}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n, \qquad \xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$$

Wegen Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ ist Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0)$ und $f^{(n)}(\xi)$ dasselbe.

#### 4.3.2.2.3 Bemerkungen:

i) Andere hinreichende Bedingungen für lokale Extrema erhält man durch Diskussion des Vorzeichens der 1. Ableitung in Umgebung von $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$ oder auch durch Anwendung des Satzes von Weierstraß 3.2.2.

ii) Zur Bestimmung von eventuell vorhandenen globalen Extrema von $f$ auf $I$ muß man die Funktionswerte von $f$ an den Intervallenden von $I$ mit denen an allen lokalen Extremstellen vergleichen.

#### 4.3.2.2.4 Beispiel: $f(x) = x^3 e^x$, $D(f) = \mathbb{R}$

- notwendige Bedingung: $f'(x) = (3x^2 + x^3)e^x = x^2(3 + x)e^x$

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x = -3$$

- hinreichende Bedingung: $f''(x) = (6x + 6x^2 + x^3)e^x$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \\ f''(-3) &= 9e^{-3} > 0 \;\Rightarrow\; \text{lokales Minimum in } x_{\min} = -3,\ f(x_{\min}) = \frac{-27}{e^3} = -1.34 \\ f'''(0) &= 6 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0 = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \textit{kein} \text{ Extremum} \end{aligned}$$

- globale Extrema:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 e^x = +\infty, \qquad \text{(Anwendung von L'HOSPITAL)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^{-x}} = 0$$

$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$, d.h. globales Maximum existiert nicht. $x_{\min} = -3$ ist auch Stelle des globalen Minimums, d.h. $\min_{\mathbb{R}} f = f(x_{\min})$

#### 4.3.2.3 Krümmungsverhalten

##### 4.3.2.3.1 Definition

Eine differenzierbare Funktion $f$ heißt auf $(a, b)$ *konvex*, wenn

$$\underbrace{f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)}$$

für alle $x, x_0 \in (a, b)$.

Eine differenzierbare Funktion $f$ heißt auf $(a, b)$ *konkav*, wenn

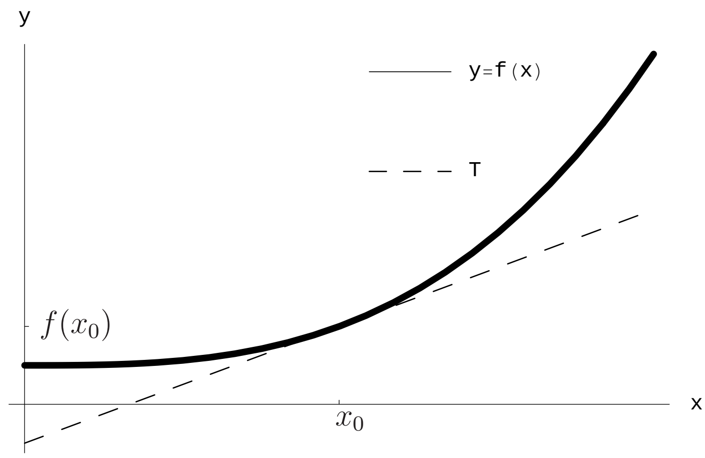
$$\underbrace{f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)}$$

für alle $x, x_0 \in (a, b)$.

Wenn „=“ ausgeschlossen wird für $x \neq x_0$, so spricht man von *strenger Konvexität* bzw. *Konkavität*.

##### 4.3.2.3.2 Geometrische Deutung

Konvexität auf $(a, b)$ bedeutet, dass $y = f(x)$ immer oberhalb der Tangente $T$ durch $(x_0, f(x_0))$ liegt.




##### 4.3.2.3.3 Bemerkung

Stellen, wo das Krümmungsverhalten von $y = f(x)$ wechselt, heißen *Wendepunkte* von $f$.

Hinreichende Bedingung: Besitzt $f$ in $(a, b)$ stetige 2. Ableitungen mit

- $f''(x) \geq 0, x \in (a, b)$, so ist $f$ konvex auf $(a, b)$

- $f''(x) \leq 0, x \in (a,b)$, so ist $f$ konkav auf $(a,b)$

Gilt „$> 0$“, so liegt strenge Konvexität vor. Gilt „$< 0$“, so liegt strenge Konkavität vor.

*Beweis:*

$$f(x) - T_1(x) \underset{4.3.1}{=} \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

Vorzeichen von $f''(\xi)$ entscheidet über Konvexität bzw. Konkavität.

#### 4.3.2.3.4 Beispiel

$f(x) = x^3 e^x$, $f''(x) = x(6 + 6x + x^2)e^x$

1. Fall: Ist $x > 0$, so $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvex

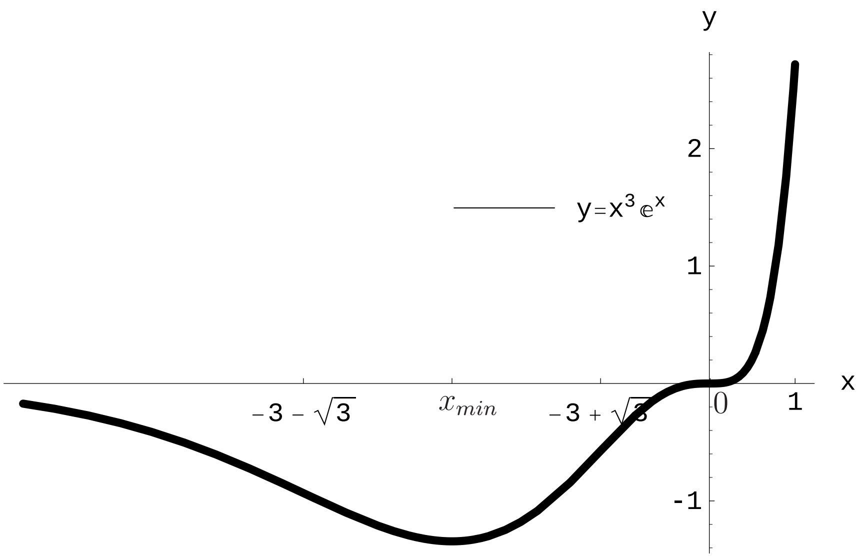
2. Fall: Ist $x < 0$, so $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6 + 6x + x^2 < 0 \Leftrightarrow -3 - \sqrt{3} < x < -3 + \sqrt{3}$

Ergebnis: $y = x^3 e^x$ ist

- konvex auf $(0, \infty) \cup (-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3})$
- konkav auf $(-\infty, -3 - \sqrt{3}) \cup (-3 + \sqrt{3}, 0)$

Wendepunkte:

$x_{W_1} = 0,$
$x_{W_2} = -3 + \sqrt{3},$
$x_{W_3} = -3 - \sqrt{3}$



# Kapitel 5

# Integrierbarkeit reeller Funktionen

## 5.1 Stammfunktionen und Integrationsregeln

Umkehrung der „Operation“ Differentiation ist die *Integration*.

### 5.1.1 Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ Intervall. Dann heißt $F : I \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion* zu $f$ auf $I$, falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Da sich 2 Stammfunktionen nur durch eine Konstante unterscheiden, schreibt man

$$\int f\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

für die Gesamtheit aller Stammfunktionen. Es heißt *unbestimmtes Integral* zu $f$ ($f$ – *Integrand*, $x$ – *Integrationsvariable*).

### 5.1.2 Grundintegrale

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1, n \in \mathbb{Z},\ \text{für } n < -1 \text{ ist } x \neq 0)$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \left\{\begin{matrix} \ln x + c & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c & \text{für } x < 0 \end{matrix}\right\} = \ln|x| + c \qquad (x \neq 0)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \qquad (x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \qquad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c \qquad (x \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c \qquad (|x| \neq 1)$$

### 5.1.3 Folgerung

Aus jeder Differentiationsregel ergibt sich eine Integrationsregel, welche durch Differentiation bewiesen wird.

1) *Summenregel:*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f\, dx + \beta \int g\, dx \qquad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) *Partielle Integration:*

$$\int f g'\, dx = fg - \int f' g\, dx$$

3)

$$\int f\big(g(x)\big) g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) \text{ mit } F(\xi) = \int f\, d\xi$$

**5.1.3.0.1 Anwendung von 3):** *Substitutionsregel:*

Sei $f$ auf $I$ definiert und $g : T \to I$ mit $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in T$ ($T, I \subset \mathbb{R}$ – Intervalle). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \int f\big(g(t)\big) \frac{dx}{dt} dt \qquad \text{(Substitution: } x = g(t)) \\ &= \int f\big(g(t)\big) g'(t)\, dt_{|t=g^{-1}(x)} \end{aligned}$$

D.h. $\int f(x)\, dx = G\big((g^{-1}(x)\big)$, wobei $G(t) := \int f\big(g(t)\big) g'(t)\, dt$, also $G$ die Stammfunktion zu $(f \circ g) g'$ ist.

*Beweis:*

a) Wegen $g'(t) \neq 0$ ist $x = g(t)$ streng monoton wachsend oder fallend. Folglich existiert $t = g^{-1}(x)$ mit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(x)\big)}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dx}\big(g^{-1}(x)\big) &= \left(\frac{dG}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right) \big(g^{-1}(x)\big) \\ &= \big[(f \circ g) g'\big] \big(g^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{g'\big(g^{-1}(x)\big)} \\ &= f\Big(\underbrace{g\big(g^{-1}(x)\big)}_{x}\Big) \cdot g'\big(g^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{g'\big(g^{-1}(x)\big)} \\ &= f(x) \cdot 1 = f(x) \end{aligned}$$

#### 5.1.3.1 Beispiele

1.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{=f} \underbrace{e^x}_{=g'}\, dx &\underset{2)}{=} x^2 e^x - \int \underbrace{2x}_{=f'} \underbrace{e^x}_{=g}\, dx \\ &\underset{2)}{=} x^2 e^x - 2 \cdot (x e^x - \int \underbrace{(x)'}_{=1} e^x\, dx) \\ &= e^x \cdot \big(x^2 - 2x + 1\big) + c\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= \int \underbrace{1}_{=x'} \cdot \ln x\, dx \\ &= x \cdot \ln x - \int x\big(\ln(x)\big)'\, dx = x \ln x - \int 1\, dx \\ &= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int e^{x^2} \underbrace{2x}_{=(x^2)'}\, dx &= \int e^t \underbrace{\frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}_{=1}\, dt \qquad \text{Substitution: } x^2 = t \\ &= \int e^t\, dt = (e^t + c)_{|t=x^2} \\ &= e^{x^2} + c\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+3}\, dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{2x+3} \cdot \underbrace{2}_{=(2x+3)'}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} \underbrace{\frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}_{=1}\, dt \qquad \text{Substitution: } t = 2x+3 \\ &= \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{2x+3}\right)^3 + c\end{aligned}$$

5.

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \qquad \text{Substitution: } x = r \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{dx}{dt} = r \cos t$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{dx}{dt}\,dt = r^2 \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cos t\,dt = r^2 \int \cos^2 t\,dt$$

$$\overset{\mathrm{I}}{=} r^2 \int \frac{1}{2}\big(\cos(2t)+1\big)\,dt = r^2\left(\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{t}{2}\right)+c$$

$$= r^2\left(\frac{2}{4}\underbrace{\sin t}_{=\frac{x}{r}} \cdot \underbrace{\cos t}_{=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} + \frac{t}{2}\right)+c$$

$$= \frac{r^2}{2}\cdot\frac{x}{r}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+c, \qquad x \in (-r,r)$$

**5.1.3.1.1 Bemerkung:** Integranden, die aus $\sin x$ und $\cos x$ aufgebaut sind, können meist durch die folgenden Substitutionen integriert werden.

$$\begin{array}{ccc}
t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) & \text{oder} & t = \tan x \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
x = 2\arctan t, \quad x \in (-\pi,\pi) & & x = \arctan t, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} & & \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}
\end{array}$$

Bei den weiteren Berechnung von $\int \ldots\, dt$ müssen die Additionstheoreme für die Winkelfunktionen benutzt werden.

### 5.1.4 Integration von Potenzreihen

Gesucht: Stammfunktion zu $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, absolut konvergent für $|x-x_0| < \varrho$, $\varrho > 0$. Dann hat $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}$ den gleichen Konvergenzradius wie $P$ und $Q'(x)$ berechnet sich gliedweise, d.h.

$$Q'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \underbrace{\left((x-x_0)^{n+1}\right)'}_{=(n+1)(x-x_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = P(x)$$

für $x \in (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, also

$$\int P(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) dx = Q(x)+c$$

[I] siehe Additionstheoreme

#### 5.1.4.1 Beispiel

Taylorreihe von $f(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \text{ für } |x| < 1 \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \cdot \int x^n \, dx\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$x = 0$:

$$f(0) = \ln(1+0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot 0 + c \ \Rightarrow \ c = 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \text{ für } |x| < 1 \qquad (\textit{Logarithmus-Reihe})$$

## 5.2 Integration rationaler Funktionen

### 5.2.1 Umformung rationaler Funktionen

Sei

$$r(z) := \frac{a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0}, z \in \mathbb{C}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$, $a_m, b_n \neq 0$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ eine *(gebrochen)rationale Funktion* in $z$. Dann ergibt sich durch Polynomdivision

$$r(z) = P(z) + \frac{Z(z)}{N(z)} \quad \text{mit Polynomen } P, Z, N, \text{ wobei } l = \text{Grad}(Z) < \text{Grad}(N) = n.$$

Dabei ist das Polynom $P(z)$ eine *ganzrationale Funktion* und $\frac{Z(z)}{N(z)}$ eine *echt gebrochenrationale Funktion.*

$$N(z) = b_n z^n + \ldots + b_0, \quad Z(z) = c_l z^l + \ldots + c_0, \quad c_l \neq 0$$

### 5.2.2 Grundlegendes über Polynome

Seien komplexe Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ gegeben und

$$P(z) := c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n \ , \ z \in \mathbb{C}$$

Dann vermittelt das *komplexe Polynom* $P$ mit den *Koeffizienten* $c_j$ eine Abbildung $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ist $c_n \neq 0$, so heißt $P$ ein Polynom vom *Grad* $n$.

1. *Koeffizientenvergleich*

   Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Koeffizienten übereinstimmen.

2. *Division durch Linearfaktor*

   Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $P$ vom Grad $n \geq 1$, so $\quad P(z) = (z - z_0)Q(z) \quad$ mit eindeutigem Polynom $Q$ vom Grad $n - 1$.

3. *Fundamentalsatz der Algebra*

   Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

4. *Zerlegung in Linearfaktoren*

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^{r} (z - \lambda_k)^{m_k}$$

   Dabei sind $\lambda_k \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $P$ und $m_k \in \mathbb{N}$ ihre *Vielfachheiten* $(m_1 + \ldots + m_r = n)$.

### 5.2.3 Satz über die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen

Für die echt gebrochenrationalen Funktion $\frac{Z(z)}{N(z)}$ habe das Nennerpoylnom $N(z)$ die Darstellung:

$$N(z) = b_n \prod_{k=1}^{r} (z - \lambda_k)^{m_k} \text{ mit } m_1 + \ldots + m_r = n, \lambda_k \neq \lambda_j \text{ für } j \neq k$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{Z(z)}{N(z)} =& \frac{d_{11}}{z - \lambda_1} + \frac{d_{12}}{(z - \lambda_1)^2} + \ldots + \frac{d_{1m_1}}{(z - \lambda_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{d_{21}}{z - \lambda_2} + \frac{d_{22}}{(z - \lambda_2)^2} + \ldots + \frac{d_{2m_2}}{(z - \lambda_2)^{m_2}} \\ &+ \frac{d_{r1}}{z - \lambda_r} + \frac{d_{r2}}{(z - \lambda_r)^2} + \ldots + \frac{d_{rm_r}}{(z - \lambda_r)^{m_r}} \end{aligned} \tag{5.2.3.1}$$

mit den Koeffizienten $d_{kj} \in \mathbb{C}$ (Zerlegung in *Partialbrüche*).

*Beweis:* (durch vollständige Induktion über $n = \text{Grad}(N)$)

- *Induktionsanfang*

  $$n = 1 \Rightarrow \text{Grad}\, Z = 0, Z(z) = c_0, \frac{Z(z)}{N(z)} = \frac{c_0}{b_1(z - \lambda_1)} = \frac{d_{11}}{z - \lambda_1} \text{ mit } d_{11} = \frac{c_0}{b_1}.$$

- *Induktionsschluss*

  Sei Formel (5.2.3.1) richtig für $\frac{Z_1(z)}{N_1(z)}$ mit $\mathrm{Grad}(Z_1) < \mathrm{Grad}(N_1) < n$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Wir schreiben $N(z) = (z-\lambda_r)^{m_r} S(z)$, wobei $\mathrm{Grad}(S) = n - m_r$. Für $d \in \mathbb{C}$ ist

  $$\frac{Z(z)}{N(z)} - \frac{d}{(z-\lambda_r)^{m_r}} = \frac{Z(z) - dS(z)}{N(z)} \tag{5.2.3.2}$$

  Da $S(\lambda_r) \neq 0$ ist, können wir $d = \frac{Z(\lambda_r)}{S(\lambda_r)}$ setzen $\Rightarrow Z(\lambda_r) - dS(\lambda_r) = 0$.

  1. Fall: $Z(z) - dS(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so folgt aus (5.2.3.2) die Behauptung.

  2. Fall: Andernfalls gilt $Z(z) - dS(z) = (z-\lambda_r)T(z)$ mit

  $$\begin{aligned} & \mathrm{Grad}\, T = \mathrm{Grad}(Z - dS) - 1 \leq \mathrm{Grad}\, Z - 1 < n - 1. \\ (5.2.3.2) \;\Rightarrow\; \frac{Z(z)}{N(z)} &= \frac{d}{(z-\lambda_r)^{m_r}} + \frac{(z-\lambda_r)T(z)}{(z-\lambda_r)^{m_r} S(z)} \\ &= \frac{d}{(z-\lambda_r)^{m_r}} + \frac{T(z)}{(z-\lambda_r)^{m_r-1} S(z)} = \frac{d}{(z-\lambda_r)^{m_r}} + \frac{T(z)}{S_1(z)} \end{aligned}$$

  mit $S_1(z) = (z-\lambda_r)^{m_r-1} S(z)$, $\mathrm{Grad}\, S_1 = n - 1$. Somit ist auf $\frac{T(z)}{S_1(z)}$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar und die Zerlegung (5.2.3.1) folgt.

Die Koeffizienten $d_{kj}$ in (5.2.3.1) können auf verschiedene Weisen ermittelt werden:

1. *Koeffizientenvergleich*

   Multipliziere (5.2.3.1) mit $N(z)$ und kürze entsprechend. Dann ergeben sich links und rechts zwei Polynome, deren Koeffizienten gleich sein müssen $\Rightarrow d_{kj}$.

2. *Einsetzmethode*

   Das Einsetzen von $n$ verschiedenen (bequemen) Werten liefert ein lineares Gleichungssystem für $d_{kj}$.

3. *Grenzwertmethode*

   Multiplikation von (5.2.3.1) mit $(z-\lambda_k)^{m_k}$ und anschließendem Grenzübergang $z \to \lambda_k$ liefert $d_{km_k}$.

#### 5.2.3.1 Beispiel

$$r(z) = \frac{-3z^4 + 2z^3 - 12z^2 + 16}{z^4 + 4z^2}$$

1. Schritt: Polynomdivision

$$\begin{array}{rrrr} (-3z^4 & +2z^3 & -12z^2 & +16) \\ -(-3z^4 & & -12z^2) & \\ \hline & 2z^3 & & +16 \end{array} : (z^4+4z^2) = -3 + \tfrac{2z^3+16}{z^4+4z^2}$$

2. Schritt: Nullstellen des Nenners

$$z^4 + 4z^2 = z^2(z^2+4) = 0 \iff z = 0 \text{ oder } z^2 + 4 = 0$$

Nullstellen: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i$

3. Schritt: Ansatz zur Partialbruchzerlegung

$$\frac{2z^3+16}{z^4+4z^2} = \frac{A}{z-0} + \frac{B}{(z-0)^2} + \frac{C}{z-2i} + \frac{D}{z+2i}$$

(mit zu bestimmenden Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{C}$)

4. Schritt: Bestimmung der Koeffizienten

Multiplikation des Ansatzes mit $z^4 + 4z^2$

$$\Rightarrow\; 2z^3 + 16 = A(z^3+4z) + B(z^2+4) + Cz^2(z+2i) + Dz^2(z-2i)$$

$$\begin{array}{rrlcrl} z^0: & 16 & = 4B & \Rightarrow & B & = 4 \\ z^1: & 0 & = 4A & \Rightarrow & A & = 0 \\ z^2: & 0 & = B + 2iC - 2iD & \Rightarrow & 2i(D-C) & = 4 \\ z^3: & 2 & = A + C + D & \Rightarrow & D & = 2 - C \end{array}$$

$$\Rightarrow\; C = 1+i, \quad D = 1-i$$

$$r(z) = \frac{4}{z^2} + \frac{1+i}{z-2i} + \frac{1-i}{z+2i}$$

### 5.2.4 Spezialisierung auf reelle rationale Funktionen

Spezialisierung auf *reelle* rationale Funktionen $r(x), x \in \mathbb{R}$, d.h. $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$. Dann ist mit jedem $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ auch $\overline{\lambda_k}$ Nullstelle von $N$, denn aus $N(\lambda_k) = 0$ folgt $\overline{N(\lambda_k)} = N(\overline{\lambda_k}) = 0$. Sei z.B. $\lambda_1 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, so sei $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Dann gilt für die Koeffizienten $m_2 = m_1$ und $d_{2j} = \overline{d_{1j}}$ für $j = 1, \ldots, m_1$. Dann kann die Darstellung (5.2.3.1) von $r(x)$ wieder reell gemacht werden, weil

$$\begin{aligned} \frac{d_{1j}}{x-\lambda_1} + \frac{d_{2j}}{x-\lambda_2} &= \frac{d_{1j}}{x-\lambda_1} + \frac{\overline{d_{1j}}}{x-\overline{\lambda_1}} = \frac{d_{1j}}{x-\lambda_1} + \overline{\frac{d_{1j}}{x-\lambda_1}} \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\frac{d_{1j}}{x-\lambda_1}\right) = \frac{2\mathrm{Re}\left(d_{1j}x - d_{1j}\overline{\lambda_1}\right)}{(x-\lambda_1)\left(x-\overline{\lambda_1}\right)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

In Beispiel 5.2.3.1 war

$$D = \overline{C}, \qquad \frac{1+i}{x-2i} + \frac{1-i}{x+2i} = \frac{(1+i)(x+2i)+(1-i)(x-2i)}{x^2+4} = \frac{2x-4}{x^2+4}$$

Bei der Bestimmung von $\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,dx$ (mit reellen Koeffizienten) müssen folgende Integrale berechnet werden:

Typ I:

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^m} = \begin{cases} \frac{1}{1-m}(x-\lambda)^{1-m} + c & \text{für } m > 1 \\ \ln|x-\lambda| + c & \text{für } m = 1 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}),$$

Typ II:

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2+\gamma x+\delta} dx = \frac{\alpha}{2} \int \frac{2x+\gamma}{x^2+\gamma x+\delta} dx + \int \frac{\beta - \frac{\alpha\gamma}{2}}{x^2+\gamma x+\delta} dx$$
$$\big(\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R},\ x^2+\gamma x+\delta \neq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}\big)$$

$$\int \frac{2x+\gamma}{x^2+\gamma+\delta} dx = \ln|x^2+\gamma x+\delta| + c \qquad \text{mit Substitution: } t = x^2+\gamma x+\delta$$

$$\int \frac{\beta - \frac{\alpha\gamma}{2}}{x^2+\gamma x+\delta} dx = \left(\beta - \frac{\alpha\gamma}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}} \arctan \frac{2x+\gamma}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}} + c \qquad \text{mit Substitution: } u = \frac{2x+\gamma}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}$$

Typ III:

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^m} \qquad \text{wird über Rekursionsformeln auf Typ II zurückgeführt.}$$

**5.2.4.0.1 Bemerkung:** Bei *reellen* $r(x), x \in \mathbb{R}$ kann der Umweg über das $\mathbb{C}$ vermieden werden. Zum Beispiel wenn

$$N(x) = b_n \prod_{k=1}^{r} (x-\lambda_k)^{m_k} (x^2+px+q)$$

mit $b_n \neq 0, b_n \in \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}, x^2+px+q \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $(m_1 + \ldots + m_r = n-2)$, so kann man anstelle von (5.2.3.1) den Ansatz machen:

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{d_{kj}}{(x-\lambda_k)^j} + \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

mit zu bestimmenden *reellen* Koeffizienten $d_{kj}, A, B$. Multiplikation mit dem Nenner $N(x)$ und Kürzen ermöglicht Koeffizientenvergleich $\Rightarrow d_{kj}, A, B$.

#### 5.2.4.1 Beispiel

Berechnung von $\int r(x)\,dx$ (siehe Beispiel 5.2.3.1):
Nach den Schritten 1.-4. erfolgt

5. Schritt: Reellmachen

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{-3x^4+2x^3-12x^2+16}{x^4+4x^2} \\ &= -3+\frac{4}{x^2}+\underbrace{\frac{1+i}{x-2i}+\frac{1-i}{x+2i}}_{=\dfrac{2x-4}{x^2+4}} \end{aligned}$$

$$\Big(\text{Weil} \qquad N(x) = x^2\,\underbrace{(x^2+4)}_{\geq 4 \text{ für } x\in\mathbb{R}} \qquad \text{ist, führt auch der Ansatz}$$

$$r(x) = -3+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+4} \qquad \text{mit } A_j\in\mathbb{R} \text{ zur gleichen Zerlegung.}\Big)$$

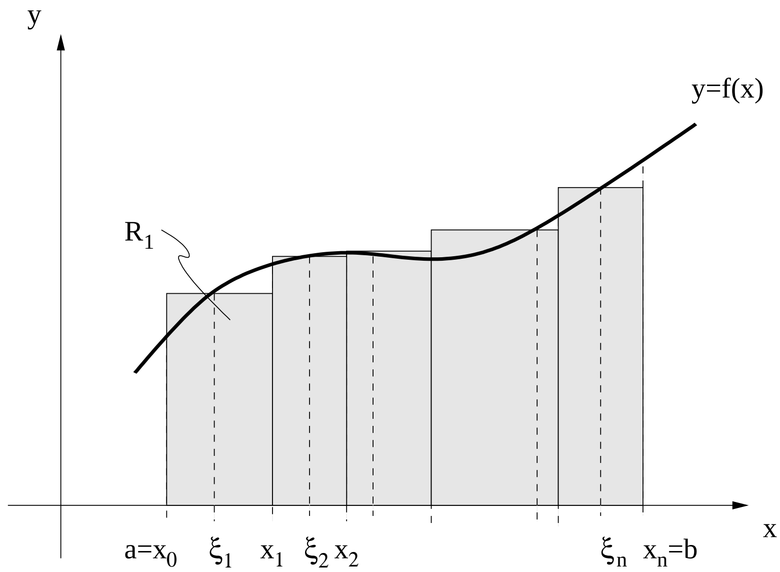
6. Schritt: Integrieren

$$\begin{aligned} \int r(x)\,dx &= -3\int dx + 4\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{2x-4}{x^2+4}\,dx \\ &= -3x-\frac{4}{x}+\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx-4\int\frac{dx}{x^2+4} \\ &= -3x-\frac{4}{x}+\underbrace{\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx}_{\text{Subst.: } x^2+4=t}-\underbrace{\frac{4}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}}_{\text{Subst.: } \frac{1}{2}x=u} \\ &= -3x-\frac{4}{x}+\int\frac{dt}{t}-\int\frac{2\,du}{u^2+1} \\ &= -3x-\frac{4}{x}+\ln|t|-2\arctan u+c \\ &= -3x-\frac{4}{x}+\ln(x^2+4)-2\arctan\frac{x}{2}+c \end{aligned}$$

## 5.3 Das RIEMANNsche Integral[II]

### 5.3.0.2 Geometrische Motivation

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \geq 0$. Gesucht: Flächeninhalt $|A|$ der Fläche $A$, begrenzt durch $y = f(x)$, der $x$-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$.




Dazu *Zerlegung* $Z$ von $[a,b]$ durch *Teilpunkte* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in *Teilintervalle* $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

$$|A| \approx \sum_{k=1}^{n} |R_k|$$

$$|R_k| = (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$$

$\xi_k \in I_k$ (*Zwischenwert* oder *Zwischenpunkt*)

### 5.3.0.3 Physikalische Motivation

Bestimmung der mechanischen Arbeit, die geleistet wird, wenn eine Kraft längs eines geradlinigen Weges auf einen Körper wirkt.

Anschaulich ist klar, dass die obige Approximation von $|A|$ umso besser ist, je kleiner das *Feinheitsmaß* $\Delta(Z) = \max_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$ der Zerlegung $Z$ wird. Um diesen Grenzprozess exakt zu fassen, betrachtet man Folgen von Zerlegungen

$$Z_j := \left\{ x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \ldots, x_{n_j}^{(j)} \right\} \text{ mit } \lim_{j\to\infty} \Delta(Z_j) = 0$$

und zu jedem $Z_j$ eine Menge $T_j$ von Zwischenwerten

$$T_j := \left\{ \xi_k^{(j)} \in \left[ x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)} \right] \mid k = 1, \ldots, n_j \right\}$$

## 5.3.1 Definitionen

i) Für die reelle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist

$$S_f[Z_j, T_j] = \sum_{k=1}^{n_j} f\left(\xi_k^{(j)}\right) \left(x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)}\right)$$

[II] B. RIEMANN 1826-1866

die *Zwischensumme* oder RIEMANN-*Summe* zu $f$ im Intervall $[a,b]$ zugehörig zu $Z_j, T_j$.

ii) Die Funktion $f$ heißt RIEMANN-*integrierbar* auf $[a,b]$ (kurz: $f \in R([a,b])$), wenn *jede* Folge $(S_f\,[Z_j,T_j])_{j=1}^{\infty}$ von Zwischensummen gegen ein und denselben Grenzwert $S$ konvergiert (bei *beliebiger* Wahl von $Z_j, T_j$ mit $\lim_{j\to\infty} \Delta(Z_j) = 0$). Man bezeichnet $S$ durch das Symbol

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ (RIEMANN*sches Integral* oder *bestimmtes Integral* von $f$ über $[a,b]$)

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{j\to\infty} S_f\,[Z_j,T_j] \;\text{ mit } \Delta(Z_j) \to 0$$

*ACHTUNG!:* Trotz der Ähnlichkeit der Symbolik und des Namens haben bestimmtes und unbestimmtes Integral zunächst nichts miteinander zu tun! Der Zusammenhang wird erst durch den Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung geliefert.

#### 5.3.1.1 Beispiele

I) $f(x) = x$:

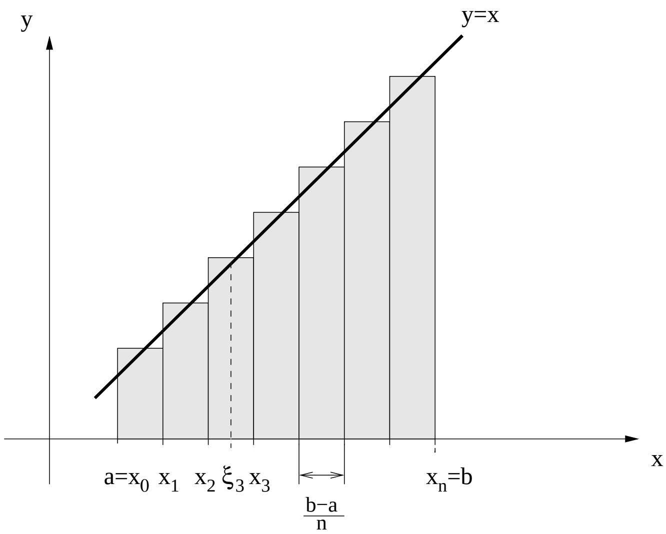
$Z$ sei *äquidistante* (gleichmäßige) Zerlegung von $[a,b]$, $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0,\dots,n$.

$$\Delta(Z) = \frac{b-a}{n}$$

Zwischenwerte

$$\xi_k = x_{k-1} + \tfrac{1}{2}\tfrac{b-a}{n} = a + \left(k - \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{b-a}{n}$$

(Mittelpunkte von $I_k$)




Zwischensumme

$$S_f[Z,T] = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{f(\xi_k)}^{=\xi_k}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(a + \left(k-\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{b-a}{n}\right) \cdot \tfrac{b-a}{n}$$

$$= \tfrac{b-a}{n}\left(na + \tfrac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{=\frac{n(n+1)}{2}} - \tfrac{1}{2}(b-a)\right) = \tfrac{b-a}{n}\left(na + \tfrac{1}{2}(b-a)(n+1) - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}a\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2$$

Ergebnis: *Falls* $f(x) = x$ RIEMANN-integrierbar ist, muss $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$ sein.

II) DIRICHLET-*Funktion*:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei $Z$ irgendeine Zerlegung und $T = \{\xi_k \in I_k \mid k = 1, \ldots, n \text{ mit } \xi_k \in \mathbb{Q}\}$.

$$S_d(Z,T) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{d(\xi_k)}_{=1}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

Für $\tilde{T} = \left\{\tilde{\xi}_k \in I_k \mid k = 1, \ldots, n \text{ mit } \tilde{\xi}_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right\}$ ist dagegen

$$S_d\left(Z, \tilde{T}\right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{d\left(\tilde{\xi}_k\right)}_{=0}(x_k - x_{k-1}) = 0$$

Ergebnis: Die Funktion $d(x)$ ist *nicht* Riemann-integrierbar.

## 5.3.2 Integrierbarkeitskriterien

*Frage:* Welche reellen Funktionen sind RIEMANN-integrierbar?
Um diese Frage zu beantworten gibt es eine Vielzahl von Integrierbarkeitskriterien (siehe z.B. Heuser I, S. 454 ff.). Ein solches notwendiges und hinreichendes Kriterium ergibt sich analog wie das CAUCHYschen Konvergenzkriterium 2.2.4.1 für Zahlenfolgen.

### 5.3.2.1 Cauchysches Integrierbarkeitskriterium

Die reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann RIEMANN-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\left| S_f[Z,T] - S_f[\tilde{Z}, \tilde{T}] \right| < \varepsilon$$

bei beliebiger Wahl von $T, \tilde{T}$ und Zerlegungen $Z, \tilde{Z}$ mit $\Delta(Z), \Delta(\tilde{Z}) < \delta$.

Weiterhin gilt:

**5.3.2.1.1 Satz:** Ist $f$ beschränkt und an höchstens abzählbar vielen Stellen unstetig auf $[a, b]$ (sonst stetig), dann ist $f \in R([a, b])$
*Spezialfall:* Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist RIEMANN-integrierbar auf $[a, b]$, ebenso jede auf $[a, b]$ *stückweise stetige* Funktion.

### 5.3.3 Eigenschaften des RIEMANNschen Integrals

Aus der Definition bzw. geeigneten Integrierbarkeitskriterien lassen sich unmittelbar folgende Eigenschaften ableiten. Dabei sei $f \in R([a,b])$ vorausgesetzt.

1) $f$ ist beschränkt auf $[a,b]$.

2) Wird $f$ an endlich vielen Stellen abgeändert, so bleibt $\int_a^b f(x)\,dx$ unverändert.

3) Ist $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, so $f \in R([\alpha,\beta])$.

4) Ist $a < c < b$, so $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$, da diese additive Zerlegung bereits für die entsprechenden Zwischensummen von $f$ auf $[a,b],[a,c]$ und $[c,b]$ gilt.

5) Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, denn $S_f[Z,T] \geq 0$.

6) Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda f \in R([a,b])$ und $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$, denn $S_{\lambda f}[Z,T] = \lambda S_f[Z,T]$.

7) Sei zusätzlich $g \in R([a,b])$, so ist auch $f+g \in R([a,b])$ und
$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx\ , \quad \text{denn} \quad S_{f+g}[Z,T] = S_f[Z,T] + S_g[Z,T]\ .$$

8) Sei zusätzlich $g \in R([a,b])$, so ist auch $fg \in R([a,b])$, wobei die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für RIEMANNsche Integrale (Beweis über CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung für Summen (1.2.2.2)) gilt:
$$\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\,dx\right)\left(\int_a^b g^2\,dx\right)\ .$$
.

9) Ist $g \in R([a,b])$ und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$, denn
$$h(x) := \underbrace{f(x) - g(x)}_{=f(x)+(-1)\cdot g(x)} \geq 0 \underset{5)}{\Rightarrow} \underbrace{\int_a^b h(x)\,dx}_{\underset{6),7)}{=} \int_a^b f\,dx - \int_a^b g\,dx} \geq 0$$

10) $|f| \in R([a,b])$ und
$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx \quad \textit{(Dreiecksungleichung für Integrale)},$$
$$\text{denn} \qquad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \underset{6),9)}{\Rightarrow} -\int_a^b |f|\,dx \leq \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b |f|\,dx$$
$$\Rightarrow\ \pm\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b |f|\,dx\ .$$

**5.3.3.0.1 Bemerkung:** Mit 6),7) wird die Menge $R([a,b])$ ein Unterraum des Vektorraums aller reellen Funktionen, und mit $\int_a^b fg\,dx$ als Skalarprodukt zwischen $f$ und $g$ wird $C([a,b])$ zu einem EUKLIDischen Raum (s. Vorlesung "Lineare Algebra", Übungsaufgabe).

#### 5.3.3.1 Weitere Klassen RIEMANN-integrierbarer Funktionen

i) Jede auf $[a,b]$ monotone Funktion $f$ ist dort RIEMANN-integrierbar, denn $f$ ist beschränkt durch $f(a)$ und $f(b)$. Daraus folgt mit Satz 5.3.2.1.1 die Integrierbarkeit, weil ein solches $f$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen (Sprungunstetigkeiten) in $[a,b]$ haben kann (s. Heuser I, S.240 f.).

ii) Aus 6),7) folgt somit, dass auch jede reelle Funktion $f$, welche die Darstellung $f = f_1 - f_2$ mit auf $[a,b]$ monotonen Funktionen $f_1$, $f_2$ besitzt, RIEMANN-integrierbar ist. Ein solches $f$ heißt *Funktion mit beschränkter Schwankung* (oder *mit beschränkter Variation*).

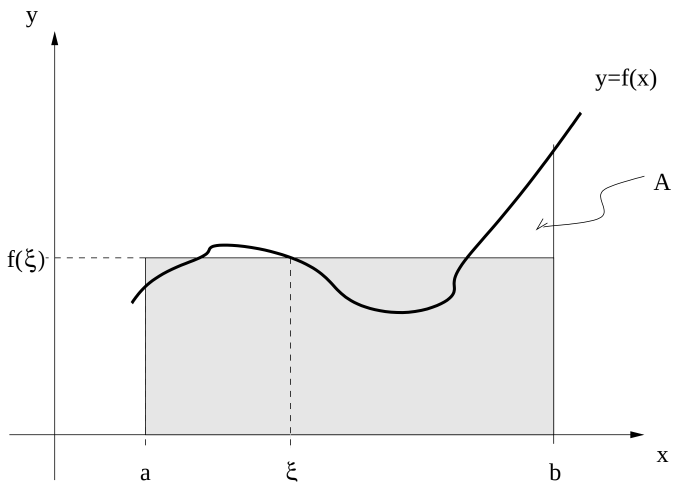
#### 5.3.3.2 Festlegungen

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für } a < b\,.$$

## 5.4 Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung

### 5.4.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f \in C([a,b])$, dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.




**5.4.1.0.1 Geometrische Deutung:** Zur Fläche $A$ unter der Kurve $y = f(x)$ gibt es ein flächengleiches Rechteck über $[a,b]$.

*Beweis:*
Nach dem Satz von Weierstraß 3.2.2 hat $f$ auf $[a,b]$ ein Minimum $m := \min_{[a,b]} f = f(x_{\min})$ und ein Maximum $M := \max_{[a,b]} f = f(x_{\max})$ $(x_{\min}, x_{\max} \in [a,b])$.

$$\Rightarrow\ m \le f(x) \le M \text{ für alle } x \in [a,b] \ \Rightarrow\ m \underbrace{\int_a^b dx}_{=b-a} \le \int_a^b f\,dx \le M \underbrace{\int_a^b dx}_{=b-a}$$

$\Rightarrow$ Für $q := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ gilt $q \in [m, M]$. Nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano 3.2.4.1 gibt es $\xi = x_{\min} + \vartheta(x_{\max} - x_{\min}), \vartheta \in [0, 1]$ mit $q = f(\xi)$. $\Rightarrow$ Behauptung, weil $\xi \in [a, b]$.

## 5.4.2 Hauptsatz der Differential-Integral-Rechnung

Sei $f \in C([a, b])$. Dann gilt:

1) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f$.

2) Mit irgendeiner Stammfunktion $\phi$ von $f$ ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a) = \phi(x)\big|_a^b$$

### 5.4.2.1 Kommentar

Der Haupsatz der Differential-Integral-Rechnung 5.4.2 stellt den Zusammenhang zwischen zwei völlig verschiedenen geometrischen Problemen her: Flächenbestimmung (über Zwischensummen) und Tangentenbestimmung (über Differentialquotient).

- Der erste Teil des Hauptsatzes besagt, dass jede auf $[a, b]$ stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Diese kann durch Grenzwerte von Zwischensummen ermittelt werden, auch dann, wenn $f$ *nicht elementar integrierbar* ist, z.B. $f(x) = e^{-x^2}$ (Integrand beim Gaussschen Fehlerintegral).
- Der zweite Teil des Hauptsatzes ermöglicht die Berechnung von $\int_a^b f\,dx$ ohne den komplizierten Riemannschen Grenzprozess.

### 5.4.2.2 Beweis des Hauptsatzes

zu 1) $x_0 \in (a, b)$

$$\frac{1}{h}\big(F(x_0+h) - F(x_0)\big) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f\,dt - \int_a^{x_0} f\,dt\right) \underset{4)}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f\,dt \underset{5.4.1}{=} f(\xi_h)$$

Dabei ist $\xi_h = x_0 + \vartheta h$ mit einem $\vartheta \in [0, 1]$, $\Rightarrow$ $\lim_{h\to 0} \xi_h = x_0$ und wegen der Stetigkeit von $f$

$$\lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f\left(\lim_{h\to 0} \xi_h\right) = f(x_0).$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0+h) - F(x_0)\big) = f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad F'(x_0) = f(x_0).$$

zu 2) Da $\phi, F$ Stammfunktionen zu $f$ sind, gilt

$$F(x) = \phi(x) + c \text{ für alle } x \in [a, b]$$

Wegen $F(a) = 0$ folgt $c = -\phi(a)$.

$$\int_a^b f(t)\,dt \underset{1)}{=} F(b) = \phi(b) + c = \phi(b) - \phi(a)$$

#### 5.4.2.3 Folgerungen

i) *Formel der partiellen Integration für* RIEMANN*sche Integrale:* Sei $f, g \in C^1([a,b])$, dann gilt

$$\int_a^b fg'\,dx = fg\big|_a^b - \int_a^b f'g\,dx\ .$$

Beispiel: *Orthogonalitätsrelationen für Winkelfunktionen* (s. Übungsaufgabe)

ii) *Substitutionsregel für* RIEMANN*sche Integrale:* Sei $f \in C([a,b])$, $g \in C^1([\alpha,\beta])$, $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ mit $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=g'(t)}\,dt \qquad \text{(Substitution: } x = g(t)),$$

denn wenn $f$ die Stammfunktion $F$ hat, ist $F(g(t)) = \int f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt$ (nach Kettenregel). Aus Hauptsatz folgt

$$\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt = F \circ g|_\alpha^\beta = F\big(g(\beta)\big) - F\big(g(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin((2n+1)x)\,dx &= \int_0^\pi \sin((2n+1)x)\,dx + \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \sin((2n+1)x)\,dx}_{\text{(Substitution: } x = t+\pi)} \\ &= \int_0^\pi \sin((2n+1)x)\,dx + \int_0^\pi \underbrace{\sin((2n+1)t + 2n\pi + \pi)}_{=-\sin((2n+1)t)}\,dt = 0\ .\end{aligned}$$

## 5.5 Anwendung: Elementare Integrationsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen

### 5.5.1 Definitionen

i) Der Ausdruck

$$y' = f(x,y) \qquad \text{mit gegebener Funktion } f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \tag{5.5.1.3}$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung* für die gesuchte Funktion $y = y(x)$.

ii) Genügt $y = y(x)$ neben (5.5.1.3) auf $(a,b)$, d.h. $y(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in (a,b)$), noch der zusätzlichen Bedingung $y(x_0) = y_0$ (*Anfangswert*) mit gegebenen $(x_0, y_0) \in D(f)$, so ist $y$ Lösung des *Anfangswertproblems* zu (5.5.1.3).

**5.5.1.0.1 Beispiel für das Auftreten von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung:** Radioaktiver Zerfall 2.1.1.1.5):

$$\begin{aligned} m(t+\Delta t) &= m(t) - \Delta m = m(t) - \lambda m(t)\Delta t \qquad (\lambda > 0 \text{ Zerfallskonstante}) \\ \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} &= -\lambda m(t) \end{aligned}$$

und $\lim_{\Delta t \to 0}$ liefert das differentielles Zerfallsgesetz:

$$\dot{m}(t) := \frac{dm}{dt}(t) = -\lambda m(t) \qquad \text{(Wachstums-Differentialgleichung).}$$

(Ähnliche Gesetze gelten für Wachstum bzw. Zerfall von Populationen, Substanzen u.ä.) Eine Lösung ist leicht zu ersehen: $m(t) = Ce^{-\lambda t}$. Wird der Anfangswert $m(0) = m_0 > 0$ vorgeschrieben, so ergibt sich $m_0 = Ce^0 = C$, also $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$.

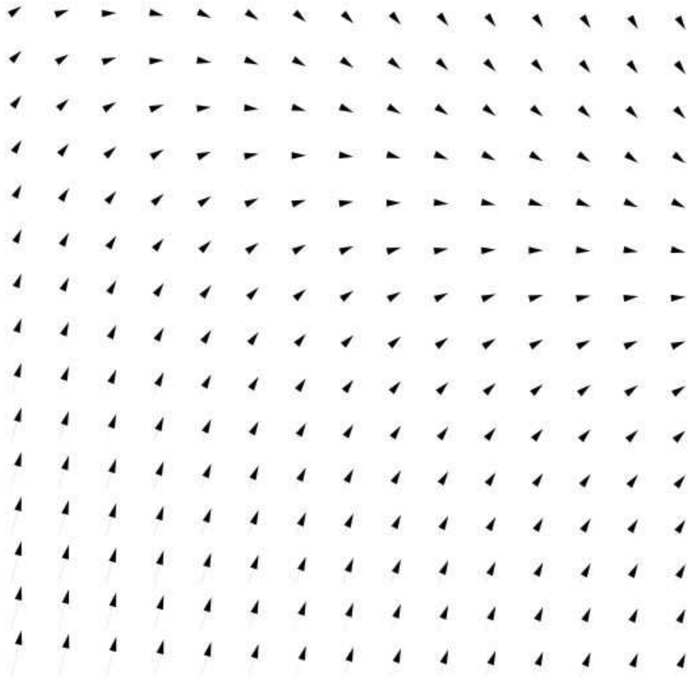
#### 5.5.1.1 Geometrische Deutung

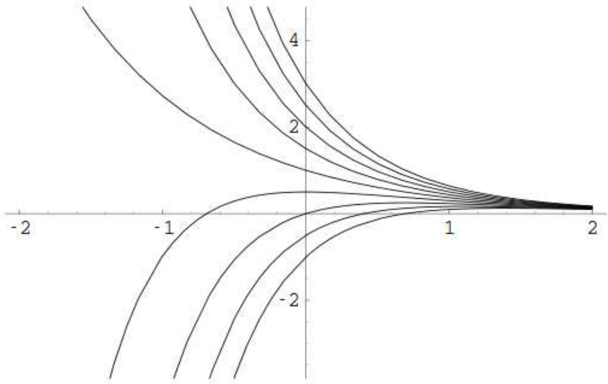
Die Differentialgleichung: $y' = f(x, y)$ bedeutet, dass jedem Punkt $(x, y) \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Richtung $f(x, y)$ zugeordnet wird. Es entsteht das sogenanntes *Richtungsfeld* der Differentialgleichung (5.5.1.3).

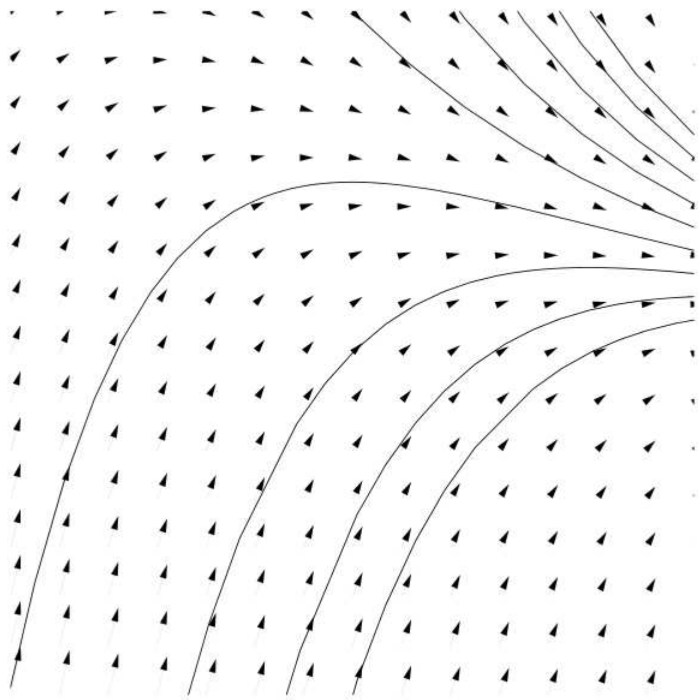
Lösen von (5.5.1.3) heißt geometrisch ein solche Kurve $y = y(x)$ zu bestimmen, welche in das zugehörige Richtungsfeld "hineinpasst", d.h. in jedem Kurvenpunkt muss der Tangentenvektor an die Kurve zu dem vorgegebenen Richtungsvektor parallel sein.

Beim Lösen des Anfangswertproblems muss die gesuchte Kurve noch zusätzlich durch einen vorgegebenen Punkt $(x_0, y_0)$ verlaufen.

**5.5.1.1.1 Beispiel:** $y' = e^{-x} - 2y$




4
2
-2
-1
1
2
-2



### 5.5.2 Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))} \qquad \left(\text{hier: } f(x,y) = \frac{g(x)}{h(y)}\right) \tag{5.5.2.4}$$

heißt *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*

**5.5.2.0.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz:** Sei $g$ stetig auf $(a,b)$, $h$ stetig auf $(c,d)$ sowie $h \neq 0$ auf $(c,d)$.
Ist $(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$, so existiert ein $(a',b') \subseteq (a,b)$, so dass das Anfangswertproblem zu (5.5.2.4) eindeutig lösbar ist. Genauer heißt das:

1) $x_0 \in (a',b'), (x, y(x)) \in (a',b') \times (c,d)$

2) $y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}$ für alle $x \in (a',b')$

3) $y(x_0) = y_0$

*Beweis:*

a) Sei $y : (a', b') \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit 1)-3):

$$\Rightarrow \; h(y(x))y'(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in (a', b')$$
$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} h(y(\xi))y'(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi \tag{5.5.2.5}$$

Sind $G(x) := \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi$ und $H(y) = \int\limits_{y_0}^{y} h(\eta)d\eta$ die Stammfunktionen mit $G(x_0) = 0$, $H(y_0) = 0$, so lässt sich (5.5.2.5) umschreiben:

$$H(y(x)) = G(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = H^{-1}(G(x)) \; , \tag{5.5.2.6}$$

denn nach Voraussetzung ist $H' = h \neq 0$ auf $(c, d)$, somit $H$ ist streng monoton.

Schlussfolgerung: Jede Lösung des Anfangswertproblems zu (5.5.2.4) hat notwendigerweise diese Gestalt und ist folglich eindeutig.

b) Test, dass $y$, gegeben durch (5.5.2.6), das Anfangswertproblem löst:

i) $y(x_0) = H^{-1}(G(x_0)) = H^{-1}(0) = y_0$

ii) $\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dH^{-1}}{dG}(G(x)) \cdot \frac{dG}{dx} = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(x)))} \cdot G'(x) \overset{(5.5.2.6)}{=} \frac{1}{h(y(x))}g(x)$

#### 5.5.2.0.2 Schematischer Lösungsweg (formal!)

1.) Trennung der Variablen: $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \Rightarrow h(y)dy = g(x)dx$

2.) Unbestimmte Integration: $\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$

3.) Einarbeitung der Anfangswerte $y(x_0) = y_0$ ($\Rightarrow$ Bestimmtung von $c$):

4.) Auflösen nach $y = y(x)$, falls möglich (sonst Lösung in impliziter Form).

Ohne 3.) erhält man die *allgemeine Lösung* zu (5.5.2.4), wenn keine Anfangswerte gegeben.

#### 5.5.2.0.3 Beispiel: $y' = -\dfrac{x}{y}, \quad y(1) = 1$

1. Schritt: $ydy = -xdx$

2. Schritt: $\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$ bzw. $x^2 + y^2 = 2c$
($\Rightarrow$ allgemeine Lösungen sind Kreise um $(0, 0)$)

3. Schritt: $x = 1 : 1^2 + y(1)^2 = 2c \Leftrightarrow 1 + 1 = 2c \Leftrightarrow c = 1$

4. Schritt: $y^2 + x^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2 - x^2}$
Wegen Anfangswert $y(1) > 0$ ist $y(x) = \sqrt{2 - x^2}$ die Lösung.

### 5.5.3 Euler-homogene Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung, welche sich leicht auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen zurückführen lässt, ist die Euler-*homogene Differentialgleichung*:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.5.3.7}$$

mit gegebener stetiger Funktion f: $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

**5.5.3.0.1 Bemerkung:** Differentialgleichung (5.5.3.7) wird oft als homogene Differentialgleichung bezeichnet.
*ACHTUNG!:* Verwechslungsgefahr mit linearer homogener Differentialgleichung (5.5.4.10)
Manchmal bezeichnet man (5.5.3.7) auch als *Ähnlichkeits-Differentialgleichung*.
Da bei einer Ähnlichkeitstransformation $\tilde{x} = \alpha x$, $\tilde{y} = \alpha y$, $\alpha > 0$ gilt: $f\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$
Im Richtungsfeld zu (5.5.3.7): Allen Geraden $y = mx$ ist der gegebene Anstieg des Richtungsfeldes gleich $h(m)$

Mit der Substitution $z(x) := \frac{y(x)}{x}$, $x \neq 0$ lässt sich (5.5.3.7) transformieren auf:

$$y' = (xz)' = z + xz' \overset{(5.5.3.7)}{=} f(z) \ ,$$

$$(5.5.3.7) \Leftrightarrow z' = \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x} \tag{5.5.3.8}$$

Das ist Differentialgleichung in den getrennten Variablen $x, z$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{g(x)}{h(z)} \quad \text{mit } g(x) = \frac{1}{x}, h(z) = \frac{1}{f(z) - z} \ .$$

Aus einer Lösung $z = z(x)$ von (5.5.3.8) ergibt sich die Lösung zu (EH) aus $y = y(x) = x \cdot z(x)$. Insbesondere besitzt das Anfangswertproblem zu (5.5.3.7):

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung, falls das entsprechende Anfangswertproblem zu (5.5.3.8) eindeutig lösbar ist, das ist gemäß des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes zu (5.5.3.8) dann der Fall, wenn $x_0 \neq 0$ und $f(\frac{y_0}{x_0}) \neq \frac{y_0}{x_0}$ ist.

**5.5.3.0.2 Bemerkung**

i) Wegen Stetigkeit von f folgt $f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \neq 0$ in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$

ii) Gilt $f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \frac{y_0}{k_0}$, so $z_0 = \frac{y_0}{x_0}$, $f(z_0) = z_0$, $z'(x_0) = 0$. Dann löst $z(x) = const = c = \frac{y_0}{x_0}$ die Differentialgleichung (5.5.3.8), also ist $y = cx$ Lösung zu (5.5.3.7).

**5.5.3.0.3 Beispiel:** $xy' = y - x - xe^{-\frac{y}{x}}, \quad y(1) = 0$

Schritt 1: Transformation auf Differentialgleichung mit getrennten Variablen:
Setze $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = z + xz' = \frac{y}{x} - 1 - e^{-\frac{y}{x}} = z - 1 - e^{-z}(= f(z))$

$$z' = -\frac{1 + e^{-z}}{x}, \quad z(1) = \frac{y(1)}{1} = 0 \neq -1 - 1 = f(0)$$

Schritt 2: Lösen der Differentialgleichung für $z$

a) Variablentrennung: $\frac{dz}{1+e^{-z}} = -\frac{dx}{x}$

b) Integration: $\int \frac{dz}{1+e^{-z}} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C$
Nebenrechnung: $\int \frac{dz}{1+e^{-z}} = \int \frac{e^z dz}{1+e^z} = \ln|1 + e^z| = \ln(1 + e^z)$
$\Rightarrow 1 + e^z = e^C \frac{1}{|x|} = \frac{C_1}{x}$ mit beliebiger reeller Konstante $C_1 \neq 0$

c) Auflösung nach $z$: $z = \ln(\frac{C_1}{x} - 1)$

d) Anfangswerte einarbeiten: $0 = z(1) = \ln(\frac{C_1}{1} - 1) \Rightarrow \underline{C_1 = 2}$

Schritt 3: Rücksubstitution: $y = y(x) = xz(x) = x\ln(\frac{2}{x} - 1)$

## 5.5.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Die Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x)y(x) + s(x) \tag{5.5.4.9}$$

heißt *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. Ist $s(x) \equiv 0$, so heißt (5.5.4.9) *homogen* andernfalls *inhomogen*

$$y'(x) = a(x)y(x) \tag{5.5.4.10}$$

heißt die zu (5.5.4.9) gehörende homogene Differentialgleichung, $s = s(x)$ *Störfunktion.*

Für lineare Differentialgleichungen gilt das

### 5.5.4.1 Superpositionsprinzip

i) Sind $y_1, y_2$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung (5.5.4.10), so ist auch jede Linearkombination $c_1y_1 + c_2y_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ wieder eine Lösung von (5.5.4.10), denn $(c_1y_1 + c_2y_2)' = c_1y_1' + c_2y_2' = c_1(-ay_1) + c_2(-ay_2) = -a(c_1y_1 + c_2y_2)$

ii) Ist $y_1$ Lösung von (5.5.4.10) und $y_0$ Lösung von (5.5.4.9), so ist die Summe $y_0 + y_1$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung (5.5.4.9), denn $(y_0 + y_1)' = y_0' + y_1' = -(ay_0 + s) - ay_1 = -a(y_0 + y_1) - s$

iii) Sind $y_0, \tilde{y}_0$ Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (5.5.4.9), so ist die Differenz $y_0 - \tilde{y}_0$ eine Lösung von (5.5.4.10), denn $(y_0 - \tilde{y}_0)' = y_0' - \tilde{y}_0' = -(ay_0 + s) + (a\tilde{y}_0 + s) = -a(y_0 - \tilde{y}_0)$

**5.5.4.1.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichung 1.Ordnung:** Seien $a, s$ stetig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ dann gilt:

1) Die homogene Differentialgleichung (5.5.4.10) hat die allgemeine Lösung (dh. jede Lösung von (5.5.4.10) lässt sich so darstellen):

$$y_H(x) = C \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right) = Ce^{A(x)}$$

für $x, x_0 \in I \quad \left(A(x) = \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi\right).$

2) Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung (5.5.4.9) lautet $y(x) = y_S(x) + y_H(x)$. Wobei $y_S$ eine spezielle Lösung von (5.5.4.9) und $y_H$ allgemeine Lösung aus 1) ist.

3) Eine spezielle Lösung $y_S$ von (5.5.4.9) erhält man durch den Ansatz

$$y_S(x) = C(x)e^{A(x)} \tag{5.5.4.11}$$

mit einer zu bestimmenden stetig differenzierbar Funktion C: $I \to \mathbb{R}$.

4) Das Anfangswertproblem zu (5.5.4.9):

$$\begin{cases} y' = ay + s & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0 & \text{mit } x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung, definiert auf I.

**5.5.4.1.2 Bemerkung:** Die Ansatzmethode in 3) heißt auch *Methode der "Variation der Konstanten"*:
Man fasst in der allgemeinen Lösung (1) $y_H$ von (5.5.4.10) die Konstante $C$ als von $x$ abhängige Funktion auf und versucht dieses $C$ durch einfache Integration zu ermitteln.

*Beweis:*

zu 1) Eine Lösung von (5.5.4.10) erhält man durch Trennung der Variablen

$$(5.5.4.10): \ \frac{dy}{dy} = ay \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a dx \ , \text{ für } y \neq 0 \tag{5.5.4.12}$$

$$\ln|y| = A(x) + C_1 \ , \quad |y(x)| = e^{C_1}e^{A(x)} \tag{5.5.4.13}$$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{A(x)} \text{ mit } \textit{beliebiger} \text{ Konstanten } C \in \mathbb{R} \tag{5.5.4.14}$$

Für jede andere Lösung $\tilde{y}(x)$ von (5.5.4.10) setzen wir $\tilde{y}(x) = z(x)e^{A(x)}$

$$\Rightarrow \tilde{y}' = z'e^{A(x)} + ze^{A(x)} \underbrace{A'(x)}_{=a(x)} \overset{(5.5.4.10)}{=} a(x)z(x)e^{A(x)} \Rightarrow z'(x) = 0, \ z(x) = \text{const.}$$

zu 2) Ausdruck $y_S + y_H$ ist Lösung von (5.5.4.9) nach dem Superpositionsprinzip ii). Für eine Lösung y von (5.5.4.9) gilt nach dem Superpositionsprinzip iii):
$y - y_S$ löst (5.5.4.10). Aus 1) folgt die Behauptung.

zu 3) Aus (5.5.4.11): $y_S'(x) = C'(x)e^{A(x)} + \underbrace{C(x)e^{A(x)}}_{=y_S(x)} a(x)$ Einsetzen in (5.5.4.9):

$$C'(x)e^{A(x)} + a(x)y_S(x) = a(x)y_s(x) + s(x) \Rightarrow C'(x) = s(x)e^{-A(x)}$$

zu 4) Allgemeine Lösung von (5.5.4.9) ist nach 1) – 3):

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} s(\xi)e^{-A(\xi)}d\xi e^{A(x)} + Ce^{A(x)} \ .$$

Anfangswert $y(x_0) = y_0$ ist erfüllt, falls $y_0 = 0 + Ce^{A(x_0)} = Ce^0 = C$

$$\Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^{x} s(\xi)e^{(A(x)-A(\xi))}d\xi + y_0 e^{A(x)}$$

$$y(x) = y_0 \underbrace{\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)}_{=U(x,x_0)} + \int_{x_0}^{x} s(\xi)\exp\left(\int_{\xi}^{x} a(t)dt\right)d\xi = y_0 U(x, x_0) + \int_{x_0}^{x} s(\xi)U(x,\xi)d\xi \ .$$

**5.5.4.1.3 Beispiel:** $y' = \dfrac{y}{x} + x^3, \quad y(1) = 0$

1. Schritt.: Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow |y| = e^{C_1} \cdot |x| \Rightarrow y_H = Cx \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$

2. Schritt.: spezielle Lösung $y_S$ der inhomogenen Differentialgleichung
Ansatz: $y_S(x) = C(x)x$

$$y_S' = C'x + C = \frac{y_S}{x} + x^3 = \frac{Cx}{x} + x^3 = C + x^3 \Rightarrow C' = x^2$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow y_S(x) = \frac{x^4}{3}$$

3. Schritt.: Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_S(x) + y_H(x) = \frac{x^4}{3} + C$$

4. Schritt.: Einarbeiten des Anfangswert:
$0 = y(1) = \frac{1}{3} + C \cdot 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$
Lösung des Anfangswertproblem: $y(x) = \frac{1}{3}(x^4 - x)$

### 5.5.5 Reduzierbare Typen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

#### 5.5.5.1 Definition

Der Ausdruck

$$y'' = f(x, y, y') \qquad \text{mit gegebener Funktion } f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{5.5.5.15}$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung* für die gesuchte Funktion $y = y(x)$. Die zughörigen Anfangswerte sind

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y_1 \quad \text{mit } (x_0, y_0, y_1) \in D(f) \ .$$

Unter *Reduzieren* versteht man eine (manchmal mögliche) Zurückführung von (5.5.5.15) auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir betrachten hier 2 Fälle:

#### 5.5.5.2 1. Fall

$$y'' = f(x, y') \qquad \text{d.h., rechte Seite von (5.5.5.15) ist } \textit{unabhängig von } y.$$

Hier führt die Substitution $z(x) := y'(x)$ auf die Differentialgleichung 1. Ordnung $z' = f(x, z)$ für $z$ (Beispiel s. Übungsaufgabe 33).

#### 5.5.5.3 2. Fall

$$y'' = f(y) \qquad \text{d.h., rechte Seite von (5.5.5.15) ist } \textit{unabhängig von } x \textit{ und } y.$$

Insbesondere lösen wir damit die *Newtonsche Bewegungsgleichung*

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y} = f(y) \tag{5.5.5.16}$$

für die eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts in einem nur vom Ort $y$ abhängigen Kraftfeld $f$. Ein Beispiel dafür ist der freie Fall im Schwerefeld der Erde (s. Übungsaufgabe 36).

**5.5.5.3.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz:** Sei $f$ stetig in einer Umgebung von $y_0$ sowie $t_0$ ein gegebener Zeitpunkt und $v_0 \neq 0$ die vorgeschriebene Anfangsgeschwindigkeit. Dann gibt es in einer Umgebung von $t_0$ genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $y = y(t)$ des Anfangswertproblems zu (5.5.5.16) mit den Anfangswerten

$$y(t_0) = y_0, \ \dot{y}(t_0) = v_0 \ . \tag{5.5.5.17}$$

*Beweis:*
Ist $y$ eine Lösung des Anfangswertproblems (5.5.5.16), (5.5.5.17), so erhält man durch Multiplikation der Gleichung (5.5.5.16) mit $\dot{y}(t)$ :

$$m\ddot{y}(t)\dot{y}(t) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\dot{y}^2(t) = f(y(t))\dot{y}(t) = -\frac{d}{dt}U(y(t)), \tag{5.5.5.18}$$

wenn $U$ die Stammfunktion

$$U(y) = -\int_{y_0}^{y} f(z)dz$$

von $-f$ bezeichnet[III]. Integration von (5.5.5.18) liefert

$$\frac{m}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\dot{y}^2(\tau)d\tau = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2(t) - v_0^2\right) = -\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}U(y(\tau))d\tau = -U(y(t)) + U(y_0).$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\dot{y}^2(t) + U(y(t)) = \frac{m}{2}v_0^2 + U(y_0)\ . \qquad (5.5.5.19)$$

Das ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung, und zwar mit getrennten Variablen $y, t$:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}(U(y_0) - U(y))}. \qquad \text{falls } v_0 = \dot{y}(t_0) \gtrless 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.5.2.0.1 über die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems für eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

**5.5.5.3.2 Bemerkung:** Physikalisch gesehen handelt es sich bei der Relation (5.5.5.19) um den Erhalt der mechanischen Energie während der Bewegung, da definitionsgemäß $\frac{m}{2}\dot{y}^2(t) = \frac{1}{2}mv^2$ die kinetische Energie des sich bewegenden Massepunkts und $U$ die potentielle Energie ist. Deshalb nennt man diese Lösungsmethode auch *Energiemethode*.
Schematischer Lösungsweg für (5.5.5.16): Man berechne die Stammfunktion $U$ von $-f$, notiere den Energieerhaltungssatz und löse nach der Geschwindigkeit $\dot{y}$ auf. Man erhält eine Differentialgleichung, die nach den bekannten Regeln zu lösen ist.

[III] $U$ heißt auch *Potential* der Kraft $f$.