

Heterokline Lösungen Hamiltonscher Systeme zweiter Ordnung

Heteroclinic solutions for second-order Hamiltonian systems

Masterarbeit
Mathematisches Institut
Justus Liebig Universität Gießen

vorgelegt von
Björn Gebhard

11. September 2014
Betreuer: Prof. Dr. Thomas Bartsch

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	2
1.1 Notation	2
1.2 Ein Hamiltonsches System zweiter Ordnung	3
1.3 Ein Hilbertraum	5
1.4 Ein Funktional	7
2 Heterokline Ketten	15
2.1 Strobels Satz	15
2.2 Der Fall q^* nicht konstant	19
2.3 Der Fall q^* konstant	22
2.4 Elementare heterokline Lösungen	23
2.5 Beispiel: Pendelgleichungen	25
3 Von Ketten zu „echten“ heteroklinen Lösungen	28
3.1 Anfangswerte elementarer heterokliner Lösungen	28
3.2 Eine „Nicht-Entartungsbedingung“	35
3.3 Existenz „echter“ heterokliner Lösungen	35
4 Chaotische Konsequenzen	44
4.1 Unendliche heterokline Ketten	44
4.2 Shift-Semikonjugation	48
A Topologie	52
B Konstantenübersicht	53
Literaturverzeichnis	54

Einleitung

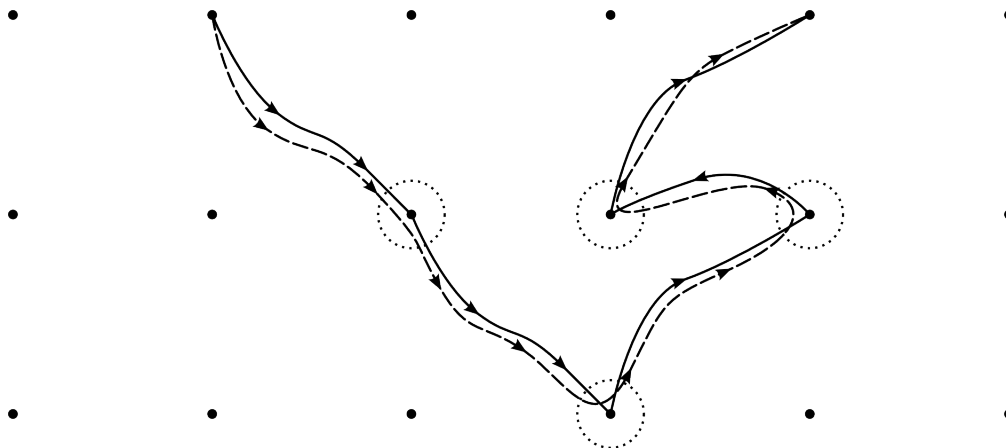
Um Hamiltonsche Systeme zu verstehen, versucht man gewisse Stereotypen an Lösungen, wie z.B. stationäre, periodische, homokline und heterokline Lösungen, zu finden und gegebenenfalls auch Eigenschaften nachzuweisen, die sogenannte „chaotische“ Dynamik aufzeigen. In dieser Arbeit liegt das Hauptaugenmerk auf heteroklinen Lösungen zwischen zwei stationären Punkten. Wir betrachten Hamiltonsche Systeme zweiter Ordnung, etwa $\ddot{q} = -V_q(t, q)$, mit in allen Komponenten periodischem Potential V , sodass die stationären Lösungen ein Gitter in \mathbb{R}^n bilden. Diese Gleichung entsteht aus der Lagrange Funktion $L = \frac{1}{2} |\dot{q}|^2 - V(t, q)$.

Zunächst zeigen wir in Kapitel 2 durch Minimieren eines Funktionals, dass je zwei stationäre Punkte, in denen V zeitunabhängige und globale Maxima besitzt, durch eine heterokline Kette verbunden werden können. Dies ist ein Resultat von Strobel, [3].

In Kapitel 3 folgen wir Rabinowitz, der in [2] aus diesen Ketten beliebig viele heterokline Lösungen zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kette konstruiert. Dies geschieht ebenfalls über ein Variationsproblem und unter Forderung einer Zusatzbedingung an die Kette. Während die Beweise in [2] aus Gründen der Übersicht die oben angegebene Gleichung zweiter Ordnung betrachten, behandeln wir hier eine dort nur erwähnte Lagrange Funktion mit etwas allgemeinerer kinetischer Energie.

Ausgehend von einer Bemerkung aus [2] werden in Kapitel 4 die bisherigen Resultate auf unendliche Ketten ausgedehnt. Unter Annahme derselben Zusatzbedingung gewinnen wir dadurch Lösungen, die einer vorgeschriebenen Abfolge von Punkten folgen. Dies nutzen wir, um mit einer Shift-Einbettung die Komplexität der Dynamik deutlich zu machen.

In Anhang A sind ein paar benötigte Fakten betreffend Zusammenhang in topologischen Räumen aufgelistet. In B ist eine Übersicht von immer wieder bei Abschätzungen benötigten Konstanten.



Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Abschnitt wird das betrachtete Hamiltonsche System vorgestellt und der Grundstein für den variationellen Zugang zu diesem gelegt. Die hier bewiesenen Lemmata dienen als Werkzeuge für den Rest der Arbeit.

1.1. Notation

Für eine disjunkte Vereinigung schreiben wir $\dot{\cup}$.

Es bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ das euklidische Skalarprodukt und $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^n . $(e_i)_{i=1}^n$ ist die kanonische Basis des \mathbb{R}^n .

Für $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \varepsilon\}$, $\text{dist}(x, U) = \inf \{|x - y| \mid y \in U\}$ und $B_\varepsilon(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, U) < \varepsilon\}$. Der Durchmesser von U ist $\text{diam}(U) = \sup \{|x - y| \mid x, y \in U\}$. Weiter bezeichnet $\overset{\circ}{U}$ das Innere, \bar{U} den Abschluss und ∂U den Rand von U bezüglich $|\cdot|$. Für die Indikatorfunktion auf U schreiben wir $\mathbf{1}_U$.

Für eine Abbildung $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist mit $q(\pm\infty)$ der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t)$ gemeint. Ist q (schwach) differenzierbar, so bezeichnet \dot{q} die (schwache) Ableitung von q . Hängt eine Abbildung von mehreren Variablen ab, wird das Differenzieren bzgl. einer Variablen durch einen Index kenntlich gemacht, z.B. $V_q(t, q)$ oder $\nabla_q a_{ij}(t, q)$ oder auch $V_{qq}(t, q)$ für höhere Ableitungen.

$C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ bzw. $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet den Raum der stetigen, k -mal stetig differenzierbaren bzw. unendlich oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^n . Im Falle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\|u\|_{C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} = \sup_{0 \leq j \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u^{(j)}(t)|$ die dazugehörige Norm. Weiter schreiben wir $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, falls $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und der Träger $\text{supp}(\varphi)$ kompakt ist.

Ist E ein Banachraum, so bezeichnet E^* den Dualraum von E . Schwache Konvergenz wird mit $\overset{w}{\rightharpoonup}$ gekennzeichnet.

Die Menge der linearen, stetigen Abbildungen zwischen zwei normierten Vektorräumen X, Y ist $L(X, Y) = \left\{ A : X \rightarrow Y \text{ linear} \mid \|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty \right\}$.

Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor t \rfloor = \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq t\}$ die Gaußklammer von t .

1.2. Ein Hamiltonsches System zweiter Ordnung

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten auf dem \mathbb{R}^n Hamiltonsche Systeme der Form

$$\frac{d}{dt}(B(t, q)\dot{q}) - (\dot{q}^T A(t, q)\dot{q})_q + V_q(t, q) = 0, \quad (\star)$$

wobei folgende Bedingungen gelten sollen:

(V1) $V \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und

$$V(t+1, q) = V(t, q) = V(t, q + e_i) \text{ f\u00fcr alle } (t, q) \in \mathbb{R}^{1+n}, 1 \leq i \leq n,$$

(V2) $V(t, 0) = 0 > V(t, q)$ f\u00fcr alle $t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$,

(T1) $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ und alle a_{ij} gen\u00fcgen (V1),

(T2) $A(t, q)$ ist positiv definit f\u00fcr alle $(t, q) \in \mathbb{R}^{1+n}$,

(T3) $B = A + A^T$.

Gleichung (\star) erh\u00e4lt man als Lagrangesche Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}L_p(t, q, \dot{q}) - L_q(t, q, \dot{q}) = 0.$$

der Lagrange Funktion

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (t, q, p) \mapsto p^T A(t, q)p - V(t, q) \quad (1.1)$$

mit Potential $V(t, q)$ und verallgemeinerter kinetischer Energie $T(t, q, p) = p^T A(t, q)p$. Der Spezialfall $T(t, q, p) = T(p) = \frac{1}{2}|p|^2$ f\u00fchrt zu der etwas einfacheren Gleichung

$$\ddot{q} + V_q(t, q) = 0. \quad (\star_s)$$

Weiter ist in (\star) der autonome Fall

$$\frac{d}{dt}(B(q)\dot{q}) - (\dot{q}^T A(q)\dot{q})_q + V_q(q) = 0, \quad (\star_a)$$

enthalten. Beide Spezialf\u00e4lle zusammen bezeichnen wir mit (\star_{as}) :

$$\ddot{q} + V_q(q) = 0. \quad (\star_{as})$$

Nach (T3) und (T2) ist $B(t, q)$ f\u00fcr alle $(t, q) \in \mathbb{R}^{1+n}$ ebenfalls positiv definit und damit invertierbar. Daher ist (\star) \u00e4quivalent zu folgendem System erster Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = (B(t, q))^{-1} \left[- \left(\frac{d}{dt} B(t, q) \right) p + (p^T A(t, q)p)_q - V_q(t, q) \right]. \end{cases} \quad (\star\star)$$

Die Matrix $\frac{d}{dt}B(t, q)$ l\u00e4sst sich mit $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ noch genauer beschreiben:

$$\frac{d}{dt}B(t, q) = B_t(t, q) + [\langle \nabla_q b_{ij}(t, q), p \rangle]_{i,j=1}^n.$$

Aufgrund der Bedingung (V1)/(T1) und da die Eintr\u00e4ge von B^{-1} ebenfalls wieder Bedingung (V1) erf\u00fcllen, sieht man, dass die rechte Seite von $(\star\star)$ stetig differenzierbar von $(t, q, p) \in \mathbb{R}^{1+2n}$ abh\u00e4ngt. Insbesondere ist die lokale Lipschitz-Bedingung des Satzes von Picard-Lindel\u00f6f erf\u00fcllt. Wir erhalten also

Bemerkung 1.2.1. Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und alle $q_0, p_0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(B(t, q)\dot{q}) - (\dot{q}^T A(t, q)\dot{q})_q + V_q(t, q) = 0, \\ q(t_0) = q_0, \quad \dot{q}(t_0) = p_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

eine eindeutige maximale Lösung.

Definition 1.2.2. Sei $U \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Abbildung $q \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ heißt (klassische) Lösung von (\star) , wenn q für alle $t \in U$ die Gleichung (\star) erfüllt. Weiter heißt eine Lösung $q \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

- stationär, falls $\dot{q} \equiv 0$,
- heteroklin, falls die Grenzwerte $q(\pm\infty)$ existieren, verschieden voneinander sind und die Abbildungen $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(\pm\infty) \in \mathbb{R}^n$ stationäre Lösungen sind,
- homoklin, falls die Grenzwerte $q(\pm\infty)$ existieren, $q(-\infty) = q(\infty)$ gilt und die Abbildungen $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(\pm\infty) \in \mathbb{R}^n$ stationäre Lösungen sind,
- periodisch mit Periode $T \in \mathbb{R}$, falls $q(t+T) = q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.2.3. Für jedes $a \in \mathbb{Z}^n$ ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto a$ eine Lösung von (\star) .

Beweis. Offenbar ist $\dot{\varphi} \equiv 0$ und da V stetig differenzierbar ist, folgt aus (V2), dass jedes $a \in \mathbb{Z}^n$ ein kritischer Punkt von $V(t, \cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist. \square

Das System (\star) besitzt also ein Gitter von stationären Lösungen. Man kann sich nun Fragen, ob und wie viele entsprechende heterokline Lösungen existieren, die diese paarweise verbinden. Rabinowitz zeigt beispielsweise in [1] im Fall (\star_{as}) , dass zu gegebenem $a \in \mathbb{Z}^n$ mindestens $4n$ verschiedene heterokline Lösungen existieren, die a mit $\mathbb{Z}^n \setminus \{a\}$ verbinden. Und auch in [2] behandelt er der Übersicht halber den Spezialfall (\star_s) . Für die Betrachtung des allgemeinen Falls, hilft folgendes

Lemma 1.2.4. *Es existiert $\tilde{a} > 0$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\tilde{a}^{-1} |x|^2 \leq x^T A(t, y)x \leq \tilde{a} |x|^2. \quad (1.3)$$

Beweis. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \mapsto x^T A(t, y)x$ ist nach (T1) und (T2) stetig sowie für alle $x \neq 0$ positiv. f nimmt also auf der kompakten Menge $[0, 1] \times \partial B_1(0) \times [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^{1+2n}$ ein positives Minimum \tilde{a}_1 und ein Maximum \tilde{a}_2 an. Setze $\tilde{a} := \max\{\tilde{a}_1^{-1}, \tilde{a}_2\}$. Für $x = 0$ ist (1.3) klar und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt aufgrund der Periodizität von A für beliebige $(t, y) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\tilde{a}^{-1} \leq \tilde{a}_1 \leq \frac{x^T}{|x|} A(t, y) \frac{x}{|x|} \leq \tilde{a}_2 \leq \tilde{a},$$

und damit nach Multiplikation mit $|x|^2$ die behauptete Aussage. \square

Wegen der Periodizitätsbedingung (V1) an A, B und V sind folgende Suprema (jeweils über $(t, y) \in \mathbb{R}^{1+n}$ betrachtet) endlich:

$$\begin{aligned} & \sup \|B(t, y)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \quad \sup \|(B(t, y))^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \quad \sup \|B_t(t, y)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \\ & \sup \|A(t, y)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \quad \sup |V(t, y)|, \quad \sup |V_q(t, y)|, \quad \sup \|V_{qq}(t, y)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \\ & \text{ sowie } \sup |\nabla_q a_{ij}(t, y)| \quad \text{ und } \quad \sup |\nabla_q b_{ij}(t, y)| \quad \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Definition 1.2.5. Wir setzen daher \tilde{b} gleich dem Maximum dieser Zahlen.

1.3. Ein Hilbertraum

Für $1 \leq p < \infty$ ($p = \infty$ wird hier nicht gebraucht) sind die Lebesgue-Räume gegeben durch

$$L^p := L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ messbar, } \int_{\mathbb{R}} |u|^p < \infty \right\} / \sim,$$

wobei $u \sim v$ genau dann, wenn u fast überall (außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge) mit v übereinstimmt. Weiter seien die lokalen Lebesgue- und Sobolev-Räume definiert durch

$$\begin{aligned} L^p_{loc} &:= L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) := \{ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \mathbf{1}_K \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ für alle } K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt} \}, \\ W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) &:= \left\{ u \in L^p_{loc} \mid \exists v \in L^p_{loc} : \int_{\mathbb{R}} \langle u, \dot{\varphi} \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \langle v, \varphi \rangle \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \right\}. \end{aligned}$$

Ein $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt schwach differenzierbar, falls $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [0, \infty)$. Aus dem nachfolgenden Lemma 1.3.1 (iv) folgt, dass das zu einem solchen u existierende $v \in L^p_{loc}$ eindeutig ist. v wird schwache Ableitung von u genannt und wir setzen $\dot{u} := v$.

Lemma 1.3.1. *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist mit der Norm $\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ein Banachraum (Fischer-Riesz),
- (ii) $\|\langle u, v \rangle\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$ für alle $u \in L^p, v \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Hölder Ungleichung),
- (iii) $L^p \subset L^p_{loc} \subset L^1_{loc}$,
- (iv) Jedes $u \in L^1_{loc}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \langle u, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist fast überall 0 (Fundamentallemma der Variationsrechnung),
- (v) Jedes $u \in L^1_{loc}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \langle u, \dot{\varphi} \rangle = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist fast überall konstant.
- (vi) Zu $u \in W^{1,p}_{loc}$ gibt es $\tilde{u} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit $u = \tilde{u}$ fast überall und $\tilde{u}(s) - \tilde{u}(r) = \int_r^s \dot{u}(t) dt$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$,
- (vii) Sei $v \in L^1_{loc}$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \int_r^x v(t) dt$ stetig und schwach differenzierbar mit $\dot{u} = v$.

Beweis. Siehe z.B. [4] Kapitel 4 und 8. Die Beweise dort behandeln den Fall $n = 1$. Der Fall $n > 1$ folgt aus diesem oder der Beweis lässt sich entsprechend übertragen. \square

Aussage 1.3.1(vi) besagt $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ in dem Sinne, dass jede schwach differenzierbare Funktion einen (eindeutigen) stetigen Repräsentanten besitzt. Ohne Einschränkung ist für den Rest der Arbeit mit $u \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ stets der stetige Repräsentant von u gemeint. Setze nun

$$E := \{ u \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \dot{u} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \}$$

und für $u, v \in E$ setze

$$\langle u, v \rangle_E := \langle u(0), v(0) \rangle + \int_{\mathbb{R}} \langle \dot{u}(t), \dot{v}(t) \rangle dt \text{ sowie } \|u\|_E := \sqrt{\langle u, u \rangle_E}.$$

Korollar 1.3.2. *Es gilt:*

- (i) $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ ist ein Hilbertraum,
- (ii) $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subset E \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$,
- (iii) Für $u \in E$, $r, s \in \mathbb{R}$ ist $|u(r) - u(s)| \leq \|u\|_E \sqrt{|r - s|}$, das bedeutet Funktionen aus E sind $\frac{1}{2}$ -Hölder stetig.

Beweis. (ii): Die erste Inklusion ist klar und die zweite nach 1.3.1(iii) auch.

(i): $\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ist offensichtlich bilinear, symmetrisch und positiv semidefinit. Sei weiter $u \in E$ mit $\langle u, u \rangle_E = |u(0)|^2 + \|\dot{u}\|_{L^2}^2 = 0$. Dann ist $\dot{u} = 0$ f.ü. und $u(0) = 0$. Nach 1.3.1(vi) ist also $u \equiv 0$. Damit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ ein Skalarprodukt auf E .

Für die Vollständigkeit sei nun $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Cauchyfolge. Wegen $\|\dot{u}_k - \dot{u}_l\|_{L^2} \leq \|u_k - u_l\|_E$ und $|u_k(0) - u_l(0)| \leq \|u_k - u_l\|_E$ sind $(\dot{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in L^2 und $(u_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n jeweils Cauchyfolgen. Diese Räume sind vollständig, also konvergiert (\dot{u}_k) gegen ein $v \in L^2$ und $(u_k(0))$ gegen ein $a \in \mathbb{R}^n$. Setze also $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(t) = \int_0^t v(s) ds + a$. Nach 1.3.1(vii) ist u stetig, also über jedem Kompaktum quadratintegrierbar, sowie schwach differenzierbar mit $\dot{u} = v$. D.h. $u \in E$ und $\|u_k - u\|_E \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

(iii): Sei $u \in E$ und $r, s \in \mathbb{R}$, $s < r$. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(r) - u(s)| &\stackrel{1.3.1(vi)}{=} \left| \int_s^r \dot{u}(t) dt \right| \leq \int_s^r |\dot{u}(t)| dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_s^r |\dot{u}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^r dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_E \sqrt{|r - s|}. \end{aligned}$$

□

Der Hilbertraum E wird der Raum sein, in dem wir nach heteroklinen Lösungen unseres Hamiltonschen Systems (\star) suchen. Wir wollen noch weitere Eigenschaften von E aufstellen, bevor wir dies tun.

Für $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist $C^0(K, \mathbb{R}^n) := \{ u : K \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ stetig} \}$ mit der Norm $\|u\|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} := \sup_{t \in K} |u(t)|$ ein Banachraum (siehe z.B. [5]). Weiter bezeichne $C_{loc}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ oder einfach nur C_{loc}^0 die Menge $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, d.h. u_m konvergiert gegen u in $C_{loc}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn für alle Kompakta $K \subset \mathbb{R}$ die Einschränkung $u_m|_K$ in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ gegen $u|_K$ konvergiert. Analog dazu ist $C_{loc}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ zu verstehen.

Der Übersicht halber wird u statt $u|_K$ geschrieben, wenn aus dem Kontext klar wird, was gemeint ist.

Lemma 1.3.3. *Für $K \subset \mathbb{R}$ kompakt gilt:*

(i) *Es existiert $c = c(K) > 0$, sodass für alle $u \in E$ gilt*

$$\|u\|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_E. \quad (1.4)$$

(ii) *Die Einbettung $E \hookrightarrow C^0(K, \mathbb{R}^n)$, $u \mapsto u|_K$ ist kompakt.*

Beweis. (i): Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $R > 0$ mit $K \subset [-R, R]$. Für $t \in K$ und $u \in E$ ist

$$|u(t)| \leq |u(t) - u(0)| + |u(0)| \stackrel{1.3.2(\text{iii})}{\leq} \|u\|_E \sqrt{|t|} + |u(0)| \leq (1 + \sqrt{R}) \|u\|_E.$$

(ii): Sei $\mathcal{F} \subset E$ beschränkt durch eine Konstante $M > 0$. Aus (1.4) folgt, dass die Menge \mathcal{F} (genauer: $\{u|_K \mid u \in \mathcal{F}\}$) in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ beschränkt ist durch cM . Also ist auch $\sup_{u \in \mathcal{F}} \|u\|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} \leq cM$. Außerdem gilt

$$\sup_{u \in \mathcal{F}} |u(r) - u(s)| \stackrel{1.3.2(\text{iii})}{\leq} \sup_{u \in \mathcal{F}} \|u\|_E \sqrt{|r - s|} \leq M \sqrt{|r - s|} \rightarrow 0 \text{ für } |r - s| \rightarrow 0.$$

D.h. \mathcal{F} ist in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ beschränkt und gleichgradig stetig, nach Arzelà-Ascoli also relativkompakt. \square

Korollar 1.3.4. *Ist $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset E$ schwach konvergent gegen ein $u \in E$, so konvergiert $(u_m)_m$ (stark) gegen u in C^0_{loc} . Mit anderen Worten, die Einbettung $E \hookrightarrow C^0_{loc}$ ist vollstetig.*

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Da schwach konvergente Folgen beschränkt sind, besitzt $(u_m)_m$ nach Lemma 1.3.3 eine in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ konvergente Teilfolge $(u_{\varphi(m)})_m$ mit Grenzwert $\tilde{u} \in C^0(K, \mathbb{R}^n)$. Die starke Konvergenz impliziert $u_{\varphi(m)} \xrightarrow{w} \tilde{u}$ in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt für die gesamte Folge

$$u_m \xrightarrow{w} u \text{ in } C^0(K, \mathbb{R}^n), \quad (1.5)$$

denn für $f \in (C^0(K, \mathbb{R}^n))^*$ ist die Abbildung $E \ni v \mapsto f(v|_K) \in \mathbb{R}$ ein Element von E^* . Da der schwache Limes eindeutig ist, folgt $u|_K = \tilde{u}$.

Angenommen es gibt nun eine Teilfolge $(u_{\psi(m)})_m$ von $(u_m)_m$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\|u_{\psi(m)} - u\|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} \geq \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Genau wie oben gilt dann $u_{\psi(m)} \rightarrow \hat{u} \in C^0(K, \mathbb{R}^n)$ entlang einer Teilfolge, die wir auch mit $(u_{\psi(m)})_m$ bezeichnen. Offenbar ist $\hat{u} \neq u|_K$. Aber andererseits gilt $u_{\psi(m)} \xrightarrow{w} \hat{u}$ und nach (1.5) $u_{\psi(m)} \xrightarrow{w} u|_K$. Im Widerspruch zur Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes. Also konvergiert die gesamte Folge $(u_m)_m$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen u . D.h. $u_m \rightarrow u$ in C^0_{loc} . \square

Anmerkung: Die Beweise von 1.3.2(iii) und 1.3.4 folgen im Wesentlichen denen von Prop. 1.1 u. 1.2 in [6].

1.4. Ein Funktional

Mithilfe der Lagrange Funktion (1.1) definieren wir nun das Funktional $I : E \rightarrow [0, \infty]$,

$$I(q) := \int_{\mathbb{R}} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} (\dot{q}(t))^T A(t, q(t)) \dot{q}(t) - V(t, q(t)) dt.$$

Etwas übersichtlicher schreiben wir oft auch einfach nur

$$I(q) = \int_{\mathbb{R}} L(q) = \int_{\mathbb{R}} \dot{q}^T A(t, q) \dot{q} - V(t, q).$$

Außerdem definieren wir für $-\infty \leq r < s \leq \infty$ das Funktional $I_{r,s} : E \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$I_{r,s}(q) := \int_r^s L(q).$$

Wir werden nun sehen, dass gewisse Extremstellen von I klassische Lösungen unseres Hamiltonschen Systems (\star) sind. Folgende Proposition legt also einen Grundstein für eine variationelle Lösung von (\star) .

Proposition 1.4.1. *Sei $X \subset E$ und $Q \in X$ eine Minimalstelle von $I|_X$, d.h. $I(Q) = \inf_{q \in X} I(q)$. Außerdem erfülle (X, Q) folgende Variationsbedingung:*

$$\text{Für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ existiert } \delta_0 > 0 \text{ mit } Q + \delta\varphi \in X \text{ für alle } \delta \in (-\delta_0, \delta_0). \quad (1.6)$$

Dann ist $Q \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und eine Lösung von

$$\frac{d}{dt}(B(t, q)\dot{q}) - (\dot{q}^T A(t, q)\dot{q})_q + V_q(t, q) = 0. \quad (\star)$$

Beweis. Seien X und Q wie oben, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und dazu $\delta_0 > 0$ aus (1.6). Die Abbildung $F : (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(\delta) := I(Q + \delta\varphi)$ besitzt nach Voraussetzung in 0 ein Minimum.

Behauptung: F ist stetig differenzierbar

Beweis. Setze $f : \mathbb{R} \times (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, \delta) = L(t, Q + \delta\varphi, \dot{Q} + \delta\dot{\varphi})$. Da L aufgrund der Voraussetzungen (V1)-(T3) C^2 ist, ist für festes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $f(t, \cdot)$ (zweimal) stetig differenzierbar. Es fehlt uns also nur noch eine integrable Majorante für die Ableitung $\partial_2 f$. Für $t \in \mathbb{R}$, $|\delta| < \delta_0$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_2 f(t, \delta) &= \langle L_q(t, Q + \delta\varphi, \dot{Q} + \delta\dot{\varphi}), \varphi \rangle + \langle L_p(t, Q + \delta\varphi, \dot{Q} + \delta\dot{\varphi}), \dot{\varphi} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^n (\dot{Q} + \delta\dot{\varphi})_i (\dot{Q} + \delta\dot{\varphi})_j \nabla_q a_{ij}(t, Q + \delta\varphi) - V_q(t, Q + \delta\varphi), \varphi \right\rangle \\ &\quad + \langle B(t, Q + \delta\varphi)(\dot{Q} + \delta\dot{\varphi}), \dot{\varphi} \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Konstanten \tilde{b} aus 1.2.5 und passend gewählten $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ (nur abhängig von δ_0 und φ , nicht von δ) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\partial_2 f(t, \delta)| &\leq \left(n^2 \left| \dot{Q} + \delta\dot{\varphi} \right|^2 \tilde{b} + \tilde{b} \right) |\varphi| + \tilde{b} \left| \dot{Q} + \delta\dot{\varphi} \right| |\dot{\varphi}| \\ &\leq n^2 \left(\left| \dot{Q} \right|^2 + m_1 \left| \dot{Q} \right| + m_2 \right) |\varphi| + \tilde{b} \left(\left| \dot{Q} \right| + m_3 \right) |\dot{\varphi}|. \end{aligned}$$

Letzteres stellt wegen $\dot{Q} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine von δ unabhängige integrable Majorante dar. F ist also von der Klasse C^1 und die Ableitung ist durch differenzieren unter dem Integral gegeben. \square

Da 0 ein Minimum von F ist, folgt

$$0 = F'(0) = \int_{\mathbb{R}} \langle L_p(t, Q, \dot{Q}), \dot{\varphi} \rangle + \langle L_q(t, Q, \dot{Q}), \varphi \rangle dt.$$

Mit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h(t) := L_q(t, Q, \dot{Q}) = \sum_{i,j} \dot{Q}_i \dot{Q}_j \nabla_q a_{ij}(t, Q) - V_q(t, Q)$ gilt also für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} \langle B(t, Q) \dot{Q}, \dot{\varphi} \rangle + \langle h, \varphi \rangle dt = 0. \quad (1.7)$$

Nehmen wir für einen Moment an Q wäre C^2 . So wäre (1.7) nach partieller Integration äquivalent zu

$$\int_{\mathbb{R}} \left\langle \frac{d}{dt} (B(t, Q) \dot{Q}) - h, \varphi \right\rangle dt = 0.$$

In diesem Falle wäre $\frac{d}{dt} (B(\cdot, Q) \dot{Q}) - h$ stetig und somit nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung 1.3.1(iv) identisch 0. Nach Definition von h wäre Q eine Lösung von (\star) .

Wir zeigen nun, dass Q die gewünschte C^2 Regularität besitzt. Zunächst halten wir fest: $B(\cdot, Q)$ ist wegen $Q \in E$ und $B \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$ stetig. Somit ist $B(\cdot, Q) \dot{Q}$ lokal integrierbar. Außerdem ist $h \in L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, denn

$$|h(t)| = \left| \sum_{i,j} \dot{Q}_i \dot{Q}_j \nabla_q a_{ij}(t, Q) - V_q(t, Q) \right| \leq \tilde{b} \left(|\dot{Q}|^2 n^2 + 1 \right) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Folgende Abbildung ist also wohldefiniert

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u(t) := \int_0^t h(\tau) d\tau$$

und nach 1.3.1(vii) stetig, sowie schwach differenzierbar mit Ableitung $\dot{u} = h$. Demnach folgt aus (1.7) für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} \langle u, \dot{\varphi} \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \langle h, \varphi \rangle \stackrel{(1.7)}{=} \int_{\mathbb{R}} \langle B(t, Q) \dot{Q}, \dot{\varphi} \rangle.$$

Also ist für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}} \langle B(t, Q) \dot{Q} - u, \dot{\varphi} \rangle = 0.$$

Damit existiert nach 1.3.1(v) eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $B(\cdot, Q) \dot{Q} - u = c$ fast überall. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $B(t, Q(t))$ positiv definit ((T2)+(T3)) und damit invertierbar mit ebenfalls stetigen Einträgen. Es gilt also für fast alle $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{Q}(t) = (B(t, Q(t)))^{-1} (u(t) + c), \quad (1.8)$$

womit \dot{Q} einen stetigen Repräsentanten besitzt. Nach Übergang zu diesem Repräsentanten kann also ohne Einschränkung angenommen werden, dass \dot{Q} stetig ist und (1.8) überall gilt. Dadurch erhalten wir sukzessive folgende Verbesserungen:

$$Q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad B(\cdot, Q) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Aus (1.8) wiederum und unter Beachtung, dass die Einträge von $B^{-1}(\cdot, Q)$ nun stetig differenzierbar von t abhängen, folgt $\dot{Q} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, also $Q \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. \square

Unser Hamiltonsches System besitzt, wie in 1.2.3 beobachtet, stationäre Lösungen in \mathbb{Z}^n . Wir setzen nun für $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$

$$\Gamma(a, b) := \{q \in E \mid q(-\infty) = a, q(\infty) = b\}$$

und

$$c(a, b) := \inf_{q \in \Gamma(a, b)} I(q).$$

Für jedes $q \in \Gamma(a, b)$ erfüllt $(\Gamma(a, b), q)$ die Variationsbedingung (1.6). Können wir also ein $q \in \Gamma(a, b)$ finden mit $I(q) = c(a, b)$ so ist nach Proposition 1.4.1 dieses q eine heterokline Lösung von (\star) , welche die beiden stationären Lösungen a und b verbindet. Zunächst halten wir aber noch einige Aussagen bezüglich I fest.

Bemerkung 1.4.2. Für alle $q \in E$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt $I(q) = I(q(\cdot - k))$.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der 1-Periodizität von V und A bezüglich t (Bedingung (V1)) und einer Translation um $k \in \mathbb{Z}$ der Integrationsvariablen. \square

Lemma 1.4.3. Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$. Setze

$$\alpha_\varepsilon := \min_{(t, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n))} -V(t, y), \quad \beta_\varepsilon := 2\sqrt{\tilde{a}^{-1}\alpha_\varepsilon}.$$

Die Konstanten α_ε und β_ε sind positiv und wann immer für $q \in E$, $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$ die Inklusion $q([r, s]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$ gilt, so ist

$$I(q) \geq I_{r, s}(q) \geq \beta_\varepsilon |q(s) - q(r)|. \quad (1.9)$$

Beweis. $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ sind wegen (V1) und (V2) positiv. Die erste Ungleichung in (1.9) gilt, da L nicht negativ ist.

Seien $q \in E$, $r, s \in \mathbb{R}$ wie oben angegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} |q(s) - q(r)|^2 &\stackrel{1.3.1(\text{vii})}{=} \left| \int_r^s \dot{q}(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_r^s |\dot{q}(t)| dt \right)^2 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_r^s |\dot{q}(t)|^2 dt |s - r| \\ &\stackrel{1.2.4}{\leq} \tilde{a} \int_r^s \dot{q}^T A(t, q) \dot{q} dt |s - r| = \tilde{a} \left(I_{r, s}(q) + \int_r^s V(t, q) dt \right) |s - r|. \end{aligned}$$

Mit $\Delta := |s - r|$, $w := |q(s) - q(r)|$ und nach der Voraussetzung $q([r, s]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$ gilt also

$$I_{r, s}(q) \geq \frac{w^2}{\tilde{a}\Delta} - \int_r^s V(t, q) dt \geq \frac{w^2}{\tilde{a}\Delta} + \alpha_\varepsilon \Delta =: f(\Delta)$$

Minimiert man $f(\Delta)$ über $(0, \infty)$ so ergibt sich für die Minimalstelle $\Delta_0 = w(\tilde{a}\alpha_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$. Es folgt

$$I_{r,s}(q) \geq f(\Delta_0) = 2\sqrt{\tilde{a}^{-1}\alpha_\varepsilon}w = \beta_\varepsilon |q(s) - q(r)|.$$

□

Korollar 1.4.4. Die Zahl $\gamma := \frac{1}{3}\beta_{\frac{1}{3}}$ ist für alle $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ eine untere Schranke von $I_{|\Gamma(a,b)}$. Insbesondere gilt

$$c(a, b) \geq \gamma$$

für alle $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ und $q \in \Gamma(a, b)$. Wegen $q(-\infty) = a$ und $q(\infty) = b$ existieren nach dem Zwischenwertsatz (Euklidische Norm ist stetig) Zahlen $t_a, t_b \in \mathbb{R}$ mit $q(t_a) \in \partial B_{\frac{1}{3}}(a)$ bzw. $q(t_b) \in \partial B_{\frac{1}{3}}(b)$. Ohne Einschränkung kann $t_a < t_b$ gewählt werden. Falls nun $q([t_a, t_b]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)$, so folgt aus 1.4.3

$$I(q) \geq \beta_{\frac{1}{3}} |q(t_a) - q(t_b)| \geq \beta_{\frac{1}{3}} \left(|a - b| - \frac{2}{3} \right) \geq \gamma.$$

Andernfalls finden wir ein passendes Intervall durch $\tilde{t}_b := \inf \left\{ t \in [t_a, t_b] \mid q(t) \in \partial B_{\frac{1}{3}}(b) \right\}$ und $\tilde{t}_a := \sup \left\{ t \in [t_a, \tilde{t}_b] \mid q(t) \in \partial B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n \setminus \{b\}) \right\}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\partial B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)$ und der Stetigkeit von q werden Infimum und Supremum jeweils angenommen. Somit gilt $\tilde{t}_a < \tilde{t}_b$. Außerdem ist nach Konstruktion $q([\tilde{t}_a, \tilde{t}_b]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)$ und damit folgt wie eben $I(q) \geq \gamma$.

Nach Übergang zum Infimum auf der linken Seite erhält man daraus $c(a, b) \geq \gamma$. □

Lemma 1.4.5. Ist $q \in E$ mit $I(q) < \infty$, so ist $q(\pm\infty) \in \mathbb{Z}^n$.

Beweis. In zwei Schritten: Sei $q \in E$ mit $I(q) < \infty$

Behauptung 1: Für alle $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert $\tilde{t} > t$ mit $q(\tilde{t}) \in B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis. Angenommen für ein $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$ und ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gelte $q([t_0, \infty)) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$. Dann liefert

$$\infty > I(q) \geq \int_{t_0}^{\infty} -V(t, q) dt \geq \int_{t_0}^{\infty} \alpha_\varepsilon dt = \infty$$

einen Widerspruch. □

Behauptung 2: Für alle $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$ existiert $t_\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $q([t_\varepsilon, \infty)) \subset B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis. Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$. Gilt die Behauptung nicht für dieses ε , so gibt es eine streng wachsende Folge $(r_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $r_j \geq j$ und $q(r_j) \notin B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach Behauptung 1 und dem Zwischenwertsatz existiert dann zu jedem r_j ein $s_j > r_j$ mit $q(s_j) \in \partial B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbb{Z}^n)$. Ohne Einschränkung kann s_j so gewählt werden, dass $q([r_j, s_j]) \subset$

$\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbb{Z}^n)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Übergang zu entsprechenden Teilfolgen können wir auch annehmen, dass stets $s_j < r_{j+1}$ ist. Es folgt aus 1.4.3 für $k \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\infty > I(q) \geq \sum_{j=1}^k I_{r_j, s_j}(q) \stackrel{(1.9)}{\geq} \sum_{j=1}^k \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} |q(s_j) - q(r_j)| \geq k \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{2},$$

im Widerspruch zur Endlichkeit von $I(q)$. \square

Also existiert der Grenzwert $q(\infty)$ und es gilt $q(\infty) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} B_{\varepsilon}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Analog zeigt man $q(-\infty) \in \mathbb{Z}^n$. \square

Lemma 1.4.6. *Die Funktionale I , $I_{-\infty, s}$, $I_{r, \infty}$ und $I_{r, s}$ ($r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$) sind schwach unterhalbstetig.*

Beweis. Sei $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$ und $q_m \xrightarrow{w} q$ in E . Wir teilen $I_{r, s}$ in

$$J_{r, s}(q) := \int_r^s \dot{q}^T A(t, q) \dot{q} \quad \text{und} \quad K_{r, s}(q) := \int_r^s -V(t, q)$$

auf und zeigen, dass diese beiden Funktionale schwach unterhalbstetig sind.

Zuerst zu $K_{r, s}$: Es gilt nach Korollar 1.3.4, dass q_m in $C_{loc}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gegen q konvergiert. Daher ist $K_{r, s}$ sogar schwach stetig, denn

$$\begin{aligned} |K_{r, s}(q_m) - K_{r, s}(q)| &\leq \int_r^s |V(t, q) - V(t, q_m)| \\ &= \int_r^s \left| \int_0^1 \langle V_q(t, \lambda q + (1 - \lambda)q_m), q - q_m \rangle d\lambda \right| dt \\ &\leq |s - r| \tilde{b} \|q - q_m\|_{C^0([r, s], \mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nun zu $J_{r, s}$: Da $(q_m)_m$ in E schwach konvergiert, ist $c := \sup_{m \in \mathbb{N}} \|q_m\|_E < \infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen dazu $M \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq M$ gilt

$$n^2 \tilde{b} c^2 \|q - q_m\|_{C^0([r, s], \mathbb{R}^n)} + \left| \int_r^s \dot{q}^T A(t, q) (\dot{q} - \dot{q}_m) \right| + \left| \int_r^s \dot{q}^T (A(t, q))^T (\dot{q} - \dot{q}_m) \right| \leq \varepsilon.$$

Bei den letzten beiden Termen ist dies möglich, da die Abbildungen $E \ni u \mapsto \int_r^s \dot{q}^T (A(t, q))^T \dot{u} \in \mathbb{R}$ Elemente aus dem Dualraum von E sind und q_m schwach gegen q konvergiert. Bei dem ersten Term benutzt man wieder die gleichmäßige Konvergenz von q_m auf kompakten Mengen. Für $m \geq M$ folgt dann

$$\begin{aligned} J_{r, s}(q_m) &= \sum_{i, j=1}^n \int_r^s \dot{q}_{m, i} \dot{q}_{m, j} a_{ij}(t, q_m) \\ &= \sum_{i, j=1}^n \int_r^s \dot{q}_{m, i} \dot{q}_{m, j} \left[a_{ij}(t, q) + \int_0^1 \langle \nabla_q a_{ij}(t, \lambda q_m + (1 - \lambda)q), q_m - q \rangle d\lambda \right] dt \\ &\geq \underbrace{\int_r^s \dot{q}_m^T A(t, q) \dot{q}_m - \sum_{i, j=1}^n \int_r^s |\dot{q}_{m, i}|^2 \tilde{b} \|q - q_m\|_{C^0([r, s], \mathbb{R}^n)}}_{\geq -n^2 \tilde{b} \|q_m\|_E^2 \|q - q_m\|_{C^0([r, s], \mathbb{R}^n)} \geq -\varepsilon} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $m \geq M$

$$\begin{aligned}
 J_{r,s}(q) - J_{r,s}(q_m) &\leq \int_r^s \dot{q}^T A(t, q) \dot{q} - \int_r^s \dot{q}_m^T A(t, q) \dot{q}_m + \varepsilon \\
 &= \underbrace{\int_r^s \dot{q}^T A(t, q) (\dot{q} - \dot{q}_m)}_{\leq \varepsilon} + \int_r^s (\dot{q} - \dot{q}_m)^T A(t, q) \dot{q}_m + \varepsilon \\
 &\leq \int_r^s (\dot{q} - \dot{q}_m)^T A(t, q) (\dot{q}_m - \dot{q}) + \int_r^s (\dot{q} - \dot{q}_m)^T A(t, q) \dot{q} + 2\varepsilon \\
 &\leq 0 + 3\varepsilon = 3\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Für alle m hinreichend groß ist also $J_{r,s}(q) \leq J_{r,s}(q_m) + 3\varepsilon$. Es folgt

$$J_{r,s}(q) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J_{r,s}(q_m) + 3\varepsilon.$$

Schließlich erhält man daraus für $\varepsilon \searrow 0$ die gewünschte schwache Unterhalbstetigkeit von $J_{r,s}$.

Damit ist $I_{r,s} = J_{r,s} + K_{r,s}$ schwach unterhalbstetig für alle $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$. Wir haben also für beliebige $r < s$

$$I_{r,s}(q) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I_{r,s}(q_m) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I(q_m)$$

Falls $\liminf_{m \rightarrow \infty} I(q_m) < \infty$ so folgt aus Beppo-Levi für $r \rightarrow -\infty$ und $s \rightarrow \infty$, dass

$$I(q) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I(q_m)$$

und damit die schwache Unterhalbstetigkeit von I . Falls $\liminf_{m \rightarrow \infty} I(q_m) = \infty$, so ist nichts mehr zu zeigen. Analog zeigt man die schwache Unterhalbstetigkeit von $I_{-\infty, s}$ und $I_{r, \infty}$. \square

Wir führen nun noch eine abkürzende Schreibweise für den linearen Übergang zwischen zwei Punkten ein: Für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$ definieren wir

$$(\xi \dashrightarrow \eta) : [r, s] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \frac{t-r}{s-r} \eta + \frac{s-t}{s-r} \xi.$$

Diese Schreibweise wird (formal nicht ganz korrekt) in abschnittsweise definierten Funktionen benutzt, z.B.

$$p(t) := \begin{cases} \vdots & t < r \\ \xi \dashrightarrow \eta & t \in [r, s] \\ \vdots & t > s \end{cases} \quad \text{statt} \quad p(t) := \begin{cases} \vdots & t < r \\ \frac{t-r}{s-r} \eta + \frac{s-t}{s-r} \xi & t \in [r, s] \\ \vdots & t > s \end{cases}.$$

Außerdem setzen wir für $r > 0$

$$\kappa_r := \frac{4\tilde{a}}{r} + r\tilde{b} > 0 \quad \text{und} \quad \kappa := \kappa_1. \quad (1.10)$$

Bevor wir unsere Vorbereitungen abschließen zeigen wir noch ein Aussage bezüglich linearer Übergänge in der Nähe von \mathbb{Z}^n .

Lemma 1.4.7. Sei $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{Z}^n$ und $\xi, \eta \in \overline{B_\varepsilon(a)}$. Weiter seien $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$ und $\xi \dashrightarrow \eta$ der lineare Übergang von ξ nach η im Zeitraum $[r, s]$. Dann gilt

$$I_{r,s}(\xi \dashrightarrow \eta) \leq \kappa_{|s-r|} \varepsilon^2.$$

Beweis. Seien $\varepsilon, a, \xi, \eta, r, s$ wie oben angegeben und für $t \in [r, s]$ sei

$$f(t) := (\xi \dashrightarrow \eta)(t) = \frac{t-r}{s-r} \eta + \frac{s-t}{s-r} \xi.$$

Nach den Bedingungen (V1) und (V2) ist $V(t, a) = 0$ und $V_q(t, a) = 0$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten also für $t \in [r, s]$ aus der Taylorentwicklung mit Integralrestglieddarstellung

$$\begin{aligned} -V(t, f(t)) &= - \int_0^1 (1-\lambda)(f(t)-a)^T V_{qq}(t, a + \lambda(f(t)-a))(f(t)-a) d\lambda \\ &\leq \tilde{b} |f(t)-a|^2 \leq \tilde{b} \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{r,s}(f) &= \int_r^s \dot{f}^T A(t, f) \dot{f} - V(t, f) dt \leq \int_r^s \tilde{a} |\dot{f}|^2 + \tilde{b} \varepsilon^2 dt \\ &= \tilde{a} \int_r^s \left| \frac{\eta - \xi}{s-r} \right|^2 dt + |s-r| \tilde{b} \varepsilon^2 \leq \left(\frac{4\tilde{a}\varepsilon^2}{|s-r|} + |s-r| \tilde{b} \varepsilon^2 \right) \\ &= \kappa_{|s-r|} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

□

Anmerkung: Die Aussagen 1.4.1, 1.4.3, 1.4.5 findet man in [1]. Allerdings nur für den Sonderfall (\star_{as}) . Die Aussagen 1.4.4, 1.4.6, 1.4.7 werden in [2] ohne expliziten Beweis und im Fall (\star_s) benutzt.

Kapitel 2

Heterokline Ketten

Wir zeigen nun die Existenz von heteroklinen Lösungen unseres Hamiltonschen Systems indem wir I minimieren. Dies geschieht ohne weitere Anforderungen an V oder A zu stellen. Die Hauptaussage Satz 2.1.2 stammt aus der Dissertationsarbeit von Strobel (siehe [3]).

2.1. Strobels Satz

Definition 2.1.1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Eine heterokline Kette zu (\star) von a nach b besteht aus endlich vielen heteroklinen Lösungen $(Q_i)_{i=1}^l$, $l \in \mathbb{N}$ von (\star) mit $Q_1(-\infty) = a$, $Q_l(\infty) = b$ und $Q_i(\infty) = Q_{i+1}(-\infty)$, $1 \leq i \leq l-1$. Hierbei heißt l die Länge der Kette.

Satz 2.1.2 (Strobel). *Es gelten die Bedingungen (V1)-(T3). Dann besitzt (\star) zu jedem Paar $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ eine heterokline Kette von a nach b .*

Der Grundgedanke ist, wie schon erwähnt, das Funktional I über der Menge aller Funktionen, die a mit b verbinden, also über $\Gamma(a, b) = \{q \in E \mid q(-\infty) = a, q(\infty) = b\}$, zu minimieren und Proposition 1.4.1 anzuwenden. Hierfür benötigen wir mehrere Schritte:

Lemma 2.1.3. *Sei $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Weiter sei X eine Teilmenge von $\Gamma(a, b)$ auf der I beschränkt ist. Dann ist*

$$\sup_{q \in X} \|q\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{q \in X} \|q\|_E < \infty.$$

Beweis. Seien a, b, X wie oben angegeben und sei $q \in X$. Wir setzen $c := \sup_X I$, was nach Voraussetzung endlich ist, und

$$\mathcal{I} := \{[r, s] \subset \mathbb{R} \mid \text{Es existieren } \xi, \eta \in \mathbb{Z}^n, \xi \neq \eta \text{ mit} \\ q(r) \in \partial B_{\frac{1}{3}}(\xi), q(s) \in \partial B_{\frac{1}{3}}(\eta), q((r, s)) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)}\}.$$

Nach Definition von \mathcal{I} sind zwei Intervalle aus \mathcal{I} entweder identisch oder disjunkt. Mit Lemma 1.4.3 und der Konstanten $\gamma = \frac{1}{3}\beta_{\frac{1}{3}} > 0$ können wir also wie folgt abschätzen

$$c \geq I(q) \geq \sum_{[r,s] \in \mathcal{I}} I_{r,s}(q) \stackrel{1.4.3}{\geq} \sum_{[r,s] \in \mathcal{I}} \beta_{\frac{1}{3}} |q(s) - q(r)| \geq \sum_{[r,s] \in \mathcal{I}} \gamma. \quad (2.1)$$

Daher kann \mathcal{I} nur endlich viele Intervalle enthalten. Mit $N := \#\mathcal{I}$ bedeutet dies, dass q höchstens $N + 1$ verschiedene Bälle um Punkte aus \mathbb{Z}^n trifft. Aus (2.1) folgt $N \leq \frac{c}{\gamma}$.

Ähnlich sieht man mithilfe von Lemma 1.4.3, dass

$$\sup \left\{ |q(s) - q(r)| \mid r, s \in \mathbb{R}, r < s \text{ und } q([r, s]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n) \right\} \leq \frac{c}{\beta_{\frac{1}{3}}}.$$

gilt. Ordnen wir nun die Intervalle $[r_i, s_i]$ aus \mathcal{I} aufsteigend an, d.h. $s_i \leq r_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq N - 1$, so gilt für jedes $i \in \{1, \dots, N - 1\}$

$$|q(r_{i+1}) - q(r_i)| \leq |q(r_{i+1}) - q(s_i)| + |q(s_i) - q(r_i)| \leq \frac{2}{3} + \frac{c}{\beta_{\frac{1}{3}}} =: \tilde{c},$$

da sich $q(r_{i+1})$ und $q(s_i)$ aus Stetigkeitsgründen in der selben $\frac{1}{3}$ -Umgebung befinden müssen. Außerdem gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |q(t) - a| &\leq \frac{1}{3} \leq \tilde{c} && \text{für } t < r_1, \\ |q(t) - q(r_i)| &\leq \tilde{c} && \text{für } t \in [r_i, r_{i+1}], 1 \leq i \leq N - 1, \\ |q(t) - q(r_N)| &\leq \tilde{c} && \text{für } t > r_N. \end{aligned}$$

Wir erhalten also durch Einschieben entsprechender $q(r_i)$

$$\|q\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} \leq |a| + N\tilde{c} \leq |a| + \frac{c}{\gamma}\tilde{c}.$$

und damit den ersten Teil der Behauptung. Für den zweiten Teil beobachten wir

$$\|q\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}} |\dot{q}|^2 dt + |q(0)|^2 \leq \tilde{a} \int_{\mathbb{R}} \dot{q}^T A(t, q) \dot{q} dt + \|q\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}^2 \leq \tilde{a}c + \left(|a| + \frac{c}{\gamma}\tilde{c}\right)^2.$$

□

Proposition 2.1.4. *Sei $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Ist $(q_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \Gamma(a, b)$ eine Folge, die I über $\Gamma(a, b)$ minimiert, d.h. es gilt $I(q_m) \rightarrow c(a, b)$ für $m \rightarrow \infty$. Dann gibt es ein $q^* \in E$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $q_m \xrightarrow{w} q^*$ in E entlang einer Teilfolge,
- (ii) $q_m \rightarrow q^*$ in $C_{loc}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ entlang der selben Teilfolge,
- (iii) $I(q^*) \leq c(a, b)$,
- (iv) $q^*(\pm\infty) \in \mathbb{Z}^n$,
- (v) Es gilt entweder
 - (a) $q^*(-\infty) \neq q^*(\infty)$
 - oder
 - (b) q^* ist konstant.

Beweis. Sei $(q_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \Gamma(a, b)$ mit $I(q_m) \rightarrow c(a, b)$. Die Folge $(I(q_m))_{m \in \mathbb{N}}$ ist also ab einem bestimmten Index (ohne Einschränkung ab $m = 1$) beschränkt. Nach Lemma 2.1.3 ist $(q_m)_m$ in E beschränkt, was wie in 1.3.2 gezeigt wurde ein Hilbertraum ist. Da Hilberträume reflexive Banachräume sind (siehe z.B. [4]), besitzt $(q_m)_m$ eine schwach konvergente Teilfolge (ebenfalls [4]). D.h. es gibt $q^* \in E$ mit $q_m \xrightarrow{w} q^*$ entlang einer Teilfolge. Bezeichnen wir die Teilfolge ebenfalls wieder mit $(q_m)_m$ so folgt nach 1.3.4 $q_m \rightarrow q^*$ in C_{loc}^0 und wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit von I (Lemma 1.4.6) gilt

$$I(q^*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I(q_m) = c(a, b).$$

Demnach sind (i), (ii) und (iii) bereits gezeigt. Aus (iii) und Lemma 1.4.5 folgt direkt auch (iv). Bleibt also noch (v) zu zeigen.

Behauptung: Falls $q^*(-\infty) = q^*(\infty)$ ist, so muss q^* konstant sein.

Beweis. Sei $\xi := q^*(-\infty) = q^*(\infty) \in \mathbb{Z}^n$. Wenn q^* konstant ist, so muss $q^* \equiv \xi$ sein. Wir nehmen also an, dass q^* nicht identisch ξ ist und werden sehen, dass die Folge $(q_m)_m$ das Funktional I nicht über $\Gamma(a, b)$ minimiert.

Angenommen es gibt also ein $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon := |q^*(\tilde{t}) - \xi| \in (0, \frac{1}{3})$. Wähle $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$, sodass

$$2\kappa\delta^2 < \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{8}.$$

Weiter gibt es wegen $q^*(\pm\infty) = \xi$ ein $t_\delta > |\tilde{t}| + 1$ mit $q^*(\pm t_\delta) \in B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)$. Die Folge $(q_m)_m$ konvergiert auf $[-t_\delta, t_\delta]$ gleichmäßig gegen q^* , d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\|q_m - q^*\|_{C^0([-t_\delta, t_\delta], \mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{2}$ für alle $m \geq M$. Für diese m folgt

$$q_m(\pm t_\delta) \in B_\delta(\xi) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi) \tag{2.2}$$

und

$$|q_m(\tilde{t}) - \xi| \geq |q^*(\tilde{t}) - \xi| - |q_m(\tilde{t}) - q^*(\tilde{t})| \geq \varepsilon - \frac{\delta}{2} \geq \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Folglich existiert nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall $[r_m, s_m] \subset (\tilde{t}, t_\delta)$ mit

$$q_m(r_m) \in \partial B_{\frac{3}{4}\varepsilon}(\xi), \quad q_m(s_m) \in \partial B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi) \quad \text{und} \quad q_m([r_m, s_m]) \subset \overline{B_{\frac{3}{4}\varepsilon}(\xi)} \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi).$$

Demnach ist für alle $m \geq M$

$$I_{-t_\delta, t_\delta}(q_m) \geq I_{r_m, s_m}(q_m) \stackrel{1.4.3}{\geq} \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} |q_m(r_m) - q_m(s_m)| \geq \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.3}$$

Nun definieren wir eine Folge $(p_m)_{m \geq M} \subset \Gamma(a, b)$, die zeigt dass unsere Folge $(q_m)_m$ keine minimierende war. Setze $p_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$p_m(t) := \begin{cases} q_m(t) & t < -t_\delta \\ q_m(-t_\delta) \dashrightarrow \xi & t \in [-t_\delta, -t_\delta + 1] \\ \xi & t \in (-t_\delta + 1, t_\delta - 1) \\ \xi \dashrightarrow q_m(t_\delta) & t \in [t_\delta - 1, t_\delta] \\ q_m(t) & t > t_\delta \end{cases}$$

Man beachte, dass p_m in der Tat aus $\Gamma(a, b)$ ist und dass die beiden linearen Übergänge wegen (2.2) δ -nahe an ξ stattfinden. Nach Lemma 1.4.7 gilt also

$$\begin{aligned} c(a, b) &\leq I(p_m) \stackrel{1.4.7}{\leq} I_{-\infty, -t_\delta}(q_m) + I_{t_\delta, \infty}(q_m) + \underbrace{I_{-t_\delta+1, t_\delta-1}(p_m)}_{=0} + 2\kappa\delta^2 \\ &= I(q_m) - I_{-t_\delta, t_\delta}(q_m) + 2\kappa\delta^2 \stackrel{(2.3)}{\leq} I(q_m) - \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{4} + 2\kappa\delta^2. \end{aligned}$$

Nach Wahl von δ folgt für alle $m \geq M$

$$I(q_m) \geq c(a, b) + \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{8}$$

im Widerspruch zu $I(q_m) \rightarrow c(a, b)$. \square

Wir haben gezeigt, dass im Falle $q^*(\infty) = q^*(-\infty)$ die Abbildung q^* konstant sein muss. Also gilt auch (v). \square

Definition 2.1.5. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Wir nennen eine Folge $(q_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \Gamma(a, b)$ getrennt minimierend, falls $I(q_m)$ gegen $c(a, b)$ konvergiert und falls ein dazugehöriges $q^* \in E$ wie in Proposition 2.1.4 Eigenschaft (v)(a) besitzt, d.h. falls $q^*(-\infty) \neq q^*(\infty)$.

Im besten Fall finden wir eine getrennt minimierende Folge $(q_m)_m \subset \Gamma(a, b)$, sodass eine Grenzfunktion q^* ebenfalls in $\Gamma(a, b)$ liegt. Dann wäre q^* nach Proposition 2.1.4(iii) und 1.4.1 eine Lösung von (\star) , d.h. unsere Heterokline Kette würde Länge 1 besitzen. Es können allerdings, wie man an Eigenschaft (v) sieht, noch einige andere Fälle auftreten. An dem Fall, dass q^* konstant ist sind wir bei der Suche nach Heteroklinen Ketten natürlich nicht interessiert. Wir können diesen Fall durch passende Wahl von der minimierenden Folge $(q_m)_m$ vermeiden, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 2.1.6. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ gibt es eine getrennt minimierende Folge $(q_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \Gamma(a, b)$.

Beweis. Sei zunächst $(\tilde{q}_m)_m \subset \Gamma(a, b)$ eine Folge, für die $(I(\tilde{q}_m))_m$ das Infimum $c(a, b)$ approximiert. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es aufgrund der Stetigkeit von \tilde{q}_m ein $\tilde{t}_m \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{q}_m(\tilde{t}_m) \notin B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)$. Wir setzen $t_m := \tilde{t}_m - \lfloor \tilde{t}_m \rfloor$ und $q_m := \tilde{q}(\cdot + \lfloor \tilde{t}_m \rfloor)$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$q_m(t_m) = \tilde{q}_m(\tilde{t}_m) \notin B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n), \quad t_m \in [0, 1), \quad q_m \in \Gamma(a, b) \quad \text{und} \quad I(q_m) \stackrel{1.4.2}{=} I(\tilde{q}_m).$$

Da $I(q_m)$ gegen $c(a, b)$ konvergiert, ist nach Lemma 2.1.3 die Menge $\{q_m(t_m) \mid m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)$ beschränkt. Die Folge $(q_m(t_m))_m$ konvergiert also nach Übergang zu einer Teilfolge gegen einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)$. Außerdem können wir eine weitere Teilfolge auswählen, sodass auch $(t_m)_m \subset [0, 1)$ gegen ein $t^* \in [0, 1]$ konvergiert. Für die entsprechenden Indices gilt dann

$$\begin{aligned} |q_m(t^*) - y| &\leq |q_m(t^*) - q_m(t_m)| + |q_m(t_m) - y| \\ &\stackrel{1.3.2}{\leq} \|q_m\|_E |t^* - t_m| + |q_m(t_m) - y|, \end{aligned}$$

was für $m \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, da $\{\|q_m\|_E \mid m \in \mathbb{N}\}$ nach Lemma 2.1.3 beschränkt ist.

Sei $q^* \in E$ eine zu $(q_m)_m$ gehörige Abbildung, die die Eigenschaften aus Proposition 2.1.4 besitzt. Da $(q_m(t^*))_m$ entlang einer Teilfolge gegen $q^*(t^*)$ konvergiert (2.1.4(ii)) kann q^* höchstens identisch $y \notin B_{\frac{1}{3}}(\mathbb{Z}^n)$ sein, was aber $q^*(\pm\infty) \in \mathbb{Z}^n$ (2.1.4(iv)) widerspricht. Nach 2.1.4(v) tritt also der Fall $q^*(-\infty) \neq q^*(\infty)$ ein. D.h. $(q_m)_m \subset \Gamma(a, b)$ ist getrennt minimierend. \square

2.2. Der Fall q^* nicht konstant

Wir betrachten nun den Fall, dass für ein q^* wie in Proposition 2.1.4 die Grenzwerte $q^*(\pm\infty)$ verschieden sind, insbesondere falls $q^*(-\infty) \neq a$ oder $q^*(\infty) \neq b$.

Lemma 2.2.1. *Für drei verschiedene Punkte $a, b, c \in \mathbb{Z}^n$ gilt folgende „Dreiecksungleichung“:*

$$c(a, b) \leq c(a, c) + c(c, b).$$

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}^n$ paarweise verschieden. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $q \in \Gamma(a, c)$ mit

$$I(q) \leq c(a, c) + \varepsilon \quad \text{und} \quad q([0, \infty)) \subset B_\varepsilon(c),$$

sowie $p \in \Gamma(c, b)$ mit

$$I(p) \leq c(c, b) + \varepsilon \quad \text{und} \quad p((-\infty, 1]) \subset B_\varepsilon(c).$$

Das ist aufgrund von Bemerkung 1.4.2 möglich. Setze nun $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$Q(t) := \begin{cases} q(t) & t < 0 \\ q(0) \dashrightarrow p(1) & t \in [0, 1] \\ p(t) & t > 1. \end{cases}$$

Dann ist $Q \in \Gamma(a, b)$ und der lineare Übergang ist ε -nahe an c . Aus 1.4.7 folgt

$$c(a, b) \leq I(Q) \leq I_{-\infty, 0}(q) + I_{1, \infty}(p) + \kappa\varepsilon^2 \leq c(a, c) + c(c, b) + 2\varepsilon + \kappa\varepsilon^2$$

und für $\varepsilon \searrow 0$ die Behauptung. \square

Proposition 2.2.2. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ und $(q_m)_m \subset \Gamma(a, b)$ eine getrennt minimierende Folge mit Grenzfunktion $q^* \in E$. Setze $\xi := q^*(-\infty) \in \mathbb{Z}^n$ und $\eta := q^*(\infty) \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $\xi \neq \eta$ und es gilt*

- $c(a, b) = c(a, \xi) + c(\xi, \eta) + c(\eta, b)$, falls $a \neq \xi$ und $b \neq \eta$,
- $c(a, b) = c(a, \xi) + c(\xi, b)$, falls $a \neq \xi$ und $b = \eta$,
- $c(a, b) = c(a, \eta) + c(\eta, b)$, falls $a = \xi$ und $b \neq \eta$.

In jedem der drei Fälle erhalten wir außerdem

$$I(q^*) = c(\xi, \eta).$$

Beweis. Wir betrachten den ersten Fall, d.h. sei $(q_m)_m \subset \Gamma(a, b)$ eine getrennt minimierende Folge mit Grenzfunktion $q^* \in \Gamma(\xi, \eta)$, wobei $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{a\}$ und $\eta \in \mathbb{Z}^n \setminus \{b\}$. Ohne Einschränkung konvergiere die gesamte Folge $(q_m)_m$ schwach in E gegen q^* .

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $t_\varepsilon > 0$, sodass

- (a) $q^*((-\infty, -t_\varepsilon]) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi)$ und $q^*([t_\varepsilon, \infty)) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\eta)$,
 (b) $|I_{-t_\varepsilon, t_\varepsilon}(q^*) - I(q^*)| \leq \varepsilon$

gelten. Letzteres ist nach Proposition 2.1.4 möglich, da $I(q^*) \leq c(a, b) < \infty$. Wegen (a) und $q_m \rightarrow q^*$ in C_{loc}^0 (siehe 1.3.4) existiert ein Index $m_0 \in \mathbb{N}$, ab welchem

$$q_m(-t_\varepsilon) \in B_\varepsilon(\xi) \quad \text{und} \quad q_m(t_\varepsilon) \in B_\varepsilon(\eta)$$

gilt. Außerdem finden wir $m_1 \geq m_0$ mit $I(q_m) \leq c(a, b) + \varepsilon$ für alle $m \geq m_1$. Wir zerlegen nun unsere Abbildungen q_m in jeweils drei Abbildungen $\tilde{p}_m, \tilde{q}_m, \tilde{r}_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{p}_m(t) := \begin{cases} q_m(t) & t < -t_\varepsilon \\ q_m(-t_\varepsilon) \dashrightarrow \xi & t \in [-t_\varepsilon, -t_\varepsilon + 1] \\ \xi & t > -t_\varepsilon + 1, \end{cases}$$

$$\tilde{q}_m(t) := \begin{cases} \xi & t < -t_\varepsilon - 1 \\ \xi \dashrightarrow q_m(-t_\varepsilon) & t \in [-t_\varepsilon - 1, -t_\varepsilon] \\ q_m(t) & t \in (-t_\varepsilon, t_\varepsilon) \\ q_m(t_\varepsilon) \dashrightarrow \eta & t \in [t_\varepsilon, t_\varepsilon + 1] \\ \eta & t > t_\varepsilon + 1, \end{cases}$$

$$\tilde{r}_m(t) := \begin{cases} \eta & t < t_\varepsilon - 1 \\ \eta \dashrightarrow q_m(t_\varepsilon) & t \in [t_\varepsilon - 1, t_\varepsilon] \\ q_m(t) & t > t_\varepsilon. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{p}_m \in \Gamma(a, \xi)$, $\tilde{q}_m \in \Gamma(\xi, \eta)$ und $\tilde{r}_m \in \Gamma(\eta, b)$. Da alle linearen Übergänge in $B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$ stattfinden gilt also

$$\begin{aligned} c(a, \xi) + c(\xi, \eta) + c(\eta, b) &\leq I(\tilde{p}_m) + I(\tilde{q}_m) + I(\tilde{r}_m) \\ &\stackrel{1.4.7}{\leq} I_{-\infty, -t_\varepsilon}(q_m) + I_{-t_\varepsilon, t_\varepsilon}(q_m) + I_{t_\varepsilon, \infty}(q_m) + 4\kappa\varepsilon^2 \\ &= I(q_m) + 4\kappa\varepsilon^2 \stackrel{m \geq m_1}{\leq} c(a, b) + \varepsilon + 4\kappa\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Es folgt $c(a, b) \geq c(a, \xi) + c(\xi, \eta) + c(\eta, b)$ und man sieht, dass $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^n \setminus \{a, b\}$ sein müssen. Die Gleichheit erhalten wir also aus Lemma 2.2.1.

Um $I(q^*) = c(\xi, \eta)$ zu zeigen wenden wir dieses Ergebnis auf die eben durchgeführte Abschätzung (2.4) an und erhalten

$$I(\tilde{p}_m) + I(\tilde{q}_m) + I(\tilde{r}_m) \leq c(a, \xi) + c(\xi, \eta) + c(\eta, b) + \varepsilon + 4\kappa\varepsilon^2,$$

woraus

$$I(\tilde{q}_m) \leq c(\xi, \eta) + \varepsilon + 4\kappa\varepsilon^2$$

für alle $m \geq m_1$ folgt. Daher ist aufgrund der schwachen Unterhalbstetigkeit von $I_{-t_\varepsilon, t_\varepsilon}$ und der Wahl von t_ε

$$\begin{aligned} c(\xi, \eta) + \varepsilon + 4\kappa\varepsilon^2 &\geq \liminf_{m \rightarrow \infty} I(\tilde{q}_m) \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} I_{-t_\varepsilon, t_\varepsilon}(q_m) \geq I_{-t_\varepsilon, t_\varepsilon}(q^*) \\ &\stackrel{(b)}{\geq} I(q^*) - \varepsilon \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ ergibt sich also $I(q^*) \leq c(\xi, \eta)$ und aus $q^* \in \Gamma(\xi, \eta)$ schließlich

$$I(q^*) = c(\xi, \eta).$$

Die anderen beiden Fälle lassen sich analog zeigen. Hierbei teilt man q_m in nur zwei statt drei Abbildungen auf. \square

Wir sind nun in der Lage Strobels Satz zu zeigen:

Beweis von Satz 2.1.2. Sei $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Wir nennen eine Menge von heteroklinen Lösungen $(Q_i)_{i=1}^l$, $l \in \mathbb{N}$ mit $I(Q_i) = c(Q_i(-\infty), Q_i(\infty))$, $1 \leq i \leq l$ eine *unvollständige Kette* zwischen a und b falls

- (a) $Q_1(-\infty) \neq a$ oder $Q_l(\infty) \neq b$ oder $Q_i(\infty) \neq Q_{i+1}(-\infty)$ für ein $i \in \{1, \dots, l-1\}$
- (b) $c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(Q_i) + \sum_{j=1}^m c(\xi_j, \eta_j)$, wobei $m \in \mathbb{N}$ gleich der Anzahl der Lücken aus (a) ist und ξ_j, η_j passende Punkte aus \mathbb{Z}^n sind mit $\xi_j \neq \eta_j$.

Jede unvollständige Kette $(Q_i)_{i=1}^l$ mit

$$c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(Q_i) + c(\xi, \eta)$$

für passende $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^n$, $\xi \neq \eta$ lässt sich nach Lemma 2.1.6 und Proposition 2.2.2 entweder zu einer heteroklinen Kette von a nach b vervollständigen - d.h. man findet ein $Q_{l+1} \in \Gamma(\xi, \eta)$ mit $I(Q_{l+1}) = c(\xi, \eta)$, sodass nach eventueller Umnummerierung $(Q_i)_{i=1}^{l+1}$ eine heterokline Kette von a nach b ist - oder zu einer unvollständigen Kette bestehend aus $l+1$ Elementen erweitern. Entsprechend lässt sich auch jede unvollständige Kette $(Q_i)_{i=1}^l$ mit mehr als einer Lücke zu einer unvollständigen Kette mit $l+1$ Elementen erweitern.

Wir wählen nun eine getrennt minimierende Folge $(q_m)_m \subset \Gamma(a, b)$. Zu dieser Folge gibt es $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^n$, $\xi \neq \eta$ und eine Grenzfunktion $q^* \in \Gamma(\xi, \eta)$ mit $I(q^*) = c(\xi, \eta)$. Außerdem gilt nach Proposition 2.2.2

$$c(a, b) = c(a, \xi) + I(q^*) + c(\eta, b)$$

(Für $\xi \in \mathbb{Z}^n$ ist $c(\xi, \xi)$ als 0 zu lesen.) D.h. entweder ist $c(a, b) = I(q^*)$ und somit q^* eine heterokline Kette von a nach b der Länge 1 oder (q^*) ist eine unvollständige Kette von a nach b . Nehmen wir nun an diese lässt sich nie vervollständigen. Dann würde man

induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$ eine unvollständige Kette $(Q_i)_{i=1}^l$ zwischen a und b finden. D.h. für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$ und entsprechenden $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{Z}^n$, $\xi_j \neq \eta_j$:

$$c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(Q_i) + \sum_{j=1}^m c(\xi_j, \eta_j) \stackrel{1.4.4}{>} l\gamma,$$

was einen Widerspruch zu $c(a, b) < \infty$ ist. Daher muss es also immer eine heterokline Kette von a nach b geben. Strobels Satz ist also bewiesen. \square

Mit dem Beweis erhalten wir folgende detailliertere Version von Strobels Satz:

Satz 2.2.3 (Strobel). *Seien (V1)-(T3) erfüllt, sowie $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Dann existiert eine heterokline Kette $(Q_i)_{i=1}^l$, $l \in \mathbb{N}$ zu (\star) , die a mit b verbindet und für die*

$$I(Q_i) = c(Q_i(-\infty), Q_i(\infty)) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l$$

und

$$c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(Q_i)$$

gilt.

2.3. Der Fall q^* konstant

Für eine spätere Aussage benötigen wir noch Informationen über den Fall 2.1.4(v)(b). Das ist der Fall, in dem eine minimierende Folge, von der wir nicht ausgehen können, dass sie getrennt minimierend ist, eine konstante Grenzfunktion besitzt.

Lemma 2.3.1. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ verschieden, $(q_m)_m \subset \Gamma(a, b)$ mit $I(q_m) \rightarrow c(a, b)$ und für die Grenzfunktion q^* aus Proposition 2.1.4 gelte $q^* \equiv \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{a, b\}$. Dann gilt*

$$c(a, b) = c(a, \xi) + c(\xi, b). \quad (2.5)$$

Außerdem existiert eine heterokline Kette $(Q_i)_{i=1}^l$ von a nach b mit Länge $l > 1$, sodass jedes Q_i jeweils I über $\Gamma(Q_i(-\infty), Q_i(\infty))$ minimiert und $c(a, b) = \sum_i I(Q_i)$ gilt.

Beweis. Haben wir (2.5) gezeigt, so folgt die Existenz der heteroklinen Kette mit Länge größer 1 aus 2.2.3. Man findet nämlich zu a und ξ sowie zu ξ und b Ketten $(Q_i)_{i=1}^l, (P_j)_{j=1}^k$, $l, k \in \mathbb{N}$ mit $c(a, \xi) = \sum_i I(Q_i)$, $c(\xi, b) = \sum_j I(P_j)$. Setzt man $Q_{l+j} := P_j$ für $1 \leq j \leq k$, so ist $(Q_i)_{i=1}^{l+k}$ eine heterokline Kette von a nach b mit Länge $l + k > 1$ und

$$c(a, b) \stackrel{(2.5)}{=} c(a, \xi) + c(\xi, b) = \sum_{i=1}^{l+k} I(Q_i).$$

Außerdem gilt $I(Q_i) = c(Q_i(-\infty), Q_i(\infty))$ für alle $1 \leq i \leq l + k$ (Satz 2.2.3).

Bleibt also nur Gleichung (2.5) zu zeigen. Der Beweis hierfür ähnelt dem von Proposition 2.2.2. Seien also $a, b, \xi, (q_m)_m, q^*$ wie oben und $\varepsilon > 0$. Wegen $q_m \rightarrow q^*$ in $C_{loc}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (2.1.4(ii)) existiert ein Index m_0 ab dem

$$q_m(0) \in B_\varepsilon(\xi)$$

gilt. Für $m \geq m_0$ setzen wir $\tilde{q}_m, \tilde{p}_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{q}_m(t) = \begin{cases} q_m(t) & t < 0 \\ q_m(0) \dashrightarrow \xi & t \in [0, 1] \\ \xi & t > 1, \end{cases}$$

$$\tilde{p}_m(t) = \begin{cases} \xi & t < -1 \\ \xi \dashrightarrow q_m(0) & t \in [-1, 0] \\ q_m(t) & t > 0. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{q}_m \in \Gamma(a, \xi)$, $\tilde{p}_m \in \Gamma(\xi, b)$ und es gilt für $m \geq m_0$

$$\begin{aligned} c(a, \xi) + c(\xi, b) &\leq I(\tilde{q}_m) + I(\tilde{p}_m) \stackrel{1.4.7}{\leq} I(q_m) + 2\kappa\varepsilon^2 \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} c(a, b) + 2\kappa\varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} c(a, b). \end{aligned}$$

Die Gleichheit in (2.5) erhalten wir schließlich aus der „Dreiecksungleichung“ (2.2.1). \square

2.4. Elementare heterokline Lösungen

Definition 2.4.1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ und es gebe $Q \in \Gamma(a, b)$ mit $I(Q) = c(a, b)$, d.h. Q ist eine heterokline Lösung zu (\star) von a nach b . Dann heißt Q elementare heterokline Lösung, falls keine heterokline Kette $(P_i)_{i=1}^l$ von a nach b mit Länge $l > 1$ existiert, die

$$I(P_i) = c(P_i(-\infty), P_i(\infty)) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l$$

und

$$c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(P_i)$$

erfüllt.

Aus Strobels Satz erhalten wir folgendes Korollar:

Korollar 2.4.2. Für alle verschiedenen $a, b \in \mathbb{Z}^n$ existiert eine heterokline Kette zu (\star) , die a mit b verbindet und nur aus elementaren heteroklinen Lösungen besteht.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ verschieden. Wir setzen

$$M := \left\{ l \in \mathbb{N} \mid \exists (Q_i)_{i=1}^l \text{ htrkl. Kette von } a \text{ nach } b \text{ mit Länge } l \text{ und } c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(Q_i) \right\}.$$

Dann ist M nach Satz 2.2.3 nicht leer und beschränkt, denn für $l \in M$ folgt

$$c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(Q_i) \stackrel{1.4.4}{\geq} l\gamma.$$

Für $\tilde{l} := \max M$ besteht die dazugehörige heterokline Kette $(Q_i)_{i=1}^{\tilde{l}}$ demnach nur aus elementaren heteroklinen Lösungen. \square

Bemerkung 2.4.3. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ verschieden.

- (a) Ist $q \in \Gamma(a, b)$ eine elementare heterokline Lösung von (\star) , so ist für alle $v \in \mathbb{Z}^n$ die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(t) + v \in \mathbb{R}^n$ eine elementare heterokline Lösung zwischen $a + v$ und $b + v$.
- (b) Ist $q \in \Gamma(a, b)$ eine elementare heterokline Lösung des autonomen Systems (\star_a) , so ist die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(-t) \in \mathbb{R}^n$ eine elementare heterokline Lösung von b nach a .
- (c) Es gibt mindestens $n + 1$ verschiedene elementare heterokline Lösungen von (\star) , die in a starten und mindestens ebenso viele, die in a enden. (Zwei heterokline Lösungen q, \tilde{q} heißen hier verschieden, falls $q(\mathbb{R}) \neq \tilde{q}(\mathbb{R})$.) Im autonomen Fall (\star_a) sind es sogar mindestens $2n$ elementare heterokline Lösungen, die in a starten bzw. in a enden.

Beweis. (a) folgt aus den Periodizitätsbedingungen (V1) und (T1).

(b): Für $q \in E$ sei $q_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto q(-t)$ die Abbildung mit rückwärtslaufender Zeit. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ verschieden. Dann ist

$$\Gamma(a, b) = \{q_- \mid q \in \Gamma(b, a)\}. \quad (2.6)$$

Im autonomen Fall gilt außerdem

$$I(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}^T A(q) \dot{q} - V(q) dt = - \int_{\infty}^{-\infty} \dot{q}_-^T A(q_-) \dot{q}_- - V(q_-) ds = I(q_-). \quad (2.7)$$

Aus (2.6) und (2.7) folgt

$$c(a, b) = \inf_{q \in \Gamma(a, b)} I(q) \stackrel{(2.6)}{=} \inf_{q \in \Gamma(b, a)} I(q_-) \stackrel{(2.7)}{=} \inf_{q \in \Gamma(b, a)} I(q) = c(b, a).$$

Unter nochmaliger Verwendung von (2.7) lässt sich aus dieser Gleichung die Behauptung zeigen.

(c): Nach (a) können wir ohne Einschränkung $a = 0$ annehmen. Die Menge $B \subset \mathbb{Z}^n$ enthalte alle Punkte, die Endpunkt einer in 0 beginnenden elementaren Heteroklinen sind. Nehmen wir $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ an. (Für $\#B = \infty$ ist nichts mehr zu zeigen.)

Durch Korollar 2.4.2 wissen wir, dass wir jeden Punkt in \mathbb{Z}^n durch eine in 0 beginnende elementare heterokline Kette erreichen, d.h. nach (a) gilt

$$\text{span}_{\mathbb{N}_0} B := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \mid \lambda_i \in \mathbb{N}_0 \right\} = \mathbb{Z}^n.$$

Wir können also aus B eine Basis $(b_i)_{i=1}^n$ des \mathbb{R}^n wählen. Gäbe es in B keinen weiteren Endpunkt außer diesen n , so wäre

$$\sum_{i=1}^n (-1)b_i \in \mathbb{Z}^n \setminus \text{span}_{\mathbb{N}_0} B,$$

ein Widerspruch. Folglich gibt es im allgemeinen Fall mindestens $n+1$ elementare heterokline Lösungen, die in 0 starten und paarweise verschiedene Endpunkte besitzen. Durch passende Translation erhält man nach (a) ebenso viele elementare heterokline Lösungen mit paarweise verschiedenen Startpunkten und Endpunkt 0.

Im autonomen Fall ist nach (b) und (a) auch $\{-b_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ in B enthalten. Da $(b_i)_{i=1}^n$ linear unabhängig waren, gibt es also mindestens je $2n$ in 0 startende und endende elementare heterokline Kurven. \square

Wir werden elementare heterokline Lösungen in Kapitel 3 weiter behandeln.

2.5. Beispiel: Pendelgleichungen

Bemerkung 2.5.1. Strobels Satz 2.2.3 und auch nachfolgende Resultate bleiben gültig, wenn man die Bedingungen (V1)-(T3) leicht abändert, sodass die stationären Lösungen des Systems (\star) nicht mehr in \mathbb{Z}^n liegen, sondern in einem allgemeinen Gitter $G \subset \mathbb{R}^n$. D.h. wir fordern

(V1') $V \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und für ein $T_0 > 0$ und eine Basis $(v_i)_{i=1}^n$ des \mathbb{R}^n gelte
 $V(t + T_0, q) = V(t, q) = V(t, q + v_i)$ für alle $(t, q) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $1 \leq i \leq n$,

(V2') $V(t, v_0) = 0 > V(t, q)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n \setminus (v_0 + \sum_{i=1}^n (v_i \mathbb{Z}))$,

(T1') $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ und alle a_{ij} genügen (V1'),

(T2') $A(t, q)$ ist positiv definit für alle $(t, q) \in \mathbb{R}^{1+n}$,

(T3') $B = A + A^T$.

Hier wird \mathbb{Z}^n durch das (affine) Gitter $G = v_0 + \sum_{i=1}^n (v_i \mathbb{Z})$ ersetzt und die Periodenlänge beträgt nun T_0 statt 1.

Beispiele, die (V1')-(T3') erfüllen sind alle möglichen Variationen von Pendelgleichungen: Multipendel, gekoppelte Pendel, inverse Pendel, getriebene Pendel, ...

Als wohl einfachstes Beispiel betrachten wir die Bewegung eines ebenen Pendels:

Beispiel 2.5.2. Der Winkel q zwischen Faden und Ruhelage (siehe Abbildung 2.1) erfüllt

$$\ddot{q} + \sin(q) = 0. \tag{2.8}$$

Hier sind physikalische Parameter auf 1 gesetzt. Mit Potential $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $V(q) = -\cos(q) - 1$ und kinetischer Energie $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(p) = \frac{1}{2}p^2$ gehört (2.8) zum Fall (\star_{as}) . Das Gitter G mit den (instabilen) stationären Punkten ist hier $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. (Diese Punkte

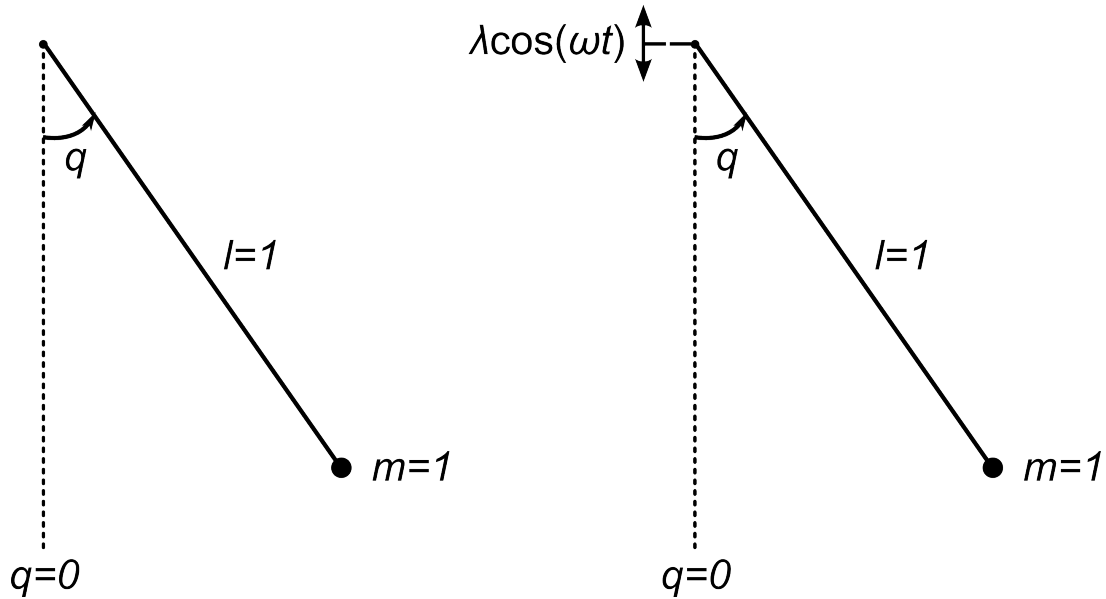


Abbildung 2.1: Einfaches Pendel und Kapitza Pendel

entsprechen Lösungen, in denen das Pendel nach oben "hängt".) Da das System autonom ist, gibt es nach Bemerkung 2.4.3(c) zu jedem Punkt $a \in G$ 4 heterokline Lösungen, die a mit $G \setminus \{a\}$ verbinden. Diese müssen in $a \pm 2\pi$ beginnen bzw. enden, da sonst das Gitter G nicht aus diesen heteroklinen Lösungen erzeugt werden kann. Außerdem kann es keine weiteren in a beginnenden oder endenden heteroklinen Kurven geben, denn:

Sei q eine Heterokline von a nach $b \in G$, $b > a + 2\pi$. Die Trajektorie von q bildet zusammen mit der Trajektorie der umgekehrten Lösung q_- eine geschlossene Kurve

$$\mathcal{C} = \{ (q(t), \dot{q}(t)) \mid t \in \mathbb{R} \} \cup \{ (q_-(t), \dot{q}_-(t)) \mid t \in \mathbb{R} \} \cup \{ (a, 0), (b, 0) \} \subset \mathbb{R}^2$$

im Phasenraum. Die Kurve \mathcal{C} ist wegen $\dot{q}_-(t) = -\dot{q}(-t)$ symmetrisch zur Geraden $\dot{q} = 0$ und umfasst ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω . Es gilt $(a, b) \times \{0\} \subset \Omega$ und $(\mathbb{R} \setminus [a, b]) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Nach unserer Wahl von b schneiden sich daher \mathcal{C} und $\mathcal{C} + 2\pi$ in Punkten, die keine stationären Lösungen von (2.8) sind. Da $\mathcal{C} + 2\pi$ auch aus heteroklinen Lösungen besteht, würden sich bei dieser Wahl des Endpunktes b zwei verschiedene Trajektorien im Phasenraum schneiden.

Insgesamt existieren also genau die heteroklinen Lösungen, die benachbarte Gitterpunkte verbinden.

Natürlich ist das gesamte Phasenportrait der Pendelgleichung schon lange bekannt (etwa durch Betrachtung von Niveaumengen der in diesem Fall konstanten Energie $H = T + V$, siehe Abbildung 2.2). Die obigen Überlegungen bleiben aber für beliebige autonome Systeme (\star_a) auf \mathbb{R}^1 gültig, solange (V1')-(T3') erfüllt ist.

Als nicht autonome Beispiele dienen getriebene Pendel, wie etwa Kapitza Pendel. Bei diesem (starrten) Pendel oszilliert die Aufhängung nach oben und unten (siehe Abbildung 2.1).

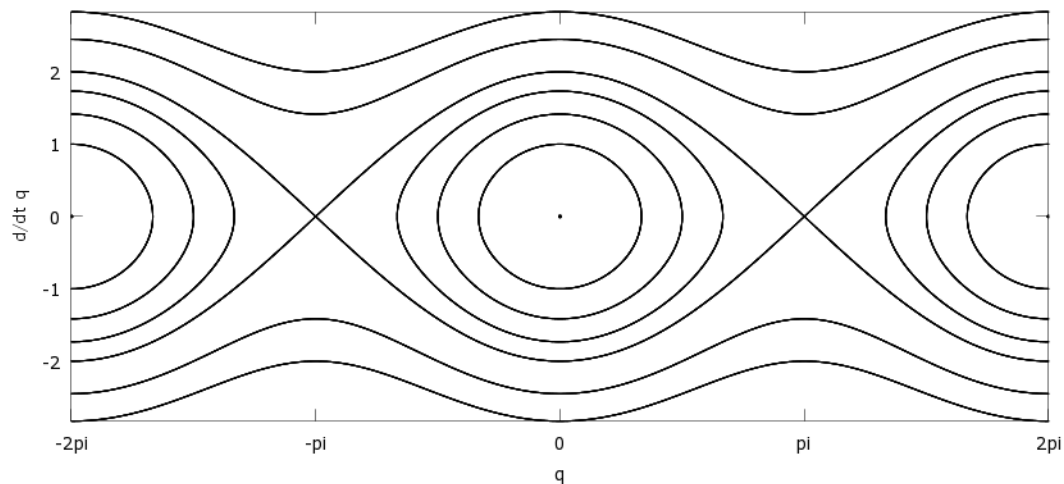


Abbildung 2.2: Phasenportrait einfaches Pendel

Beispiel 2.5.3. Die Bewegungsgleichung des Kapitzas Pendel ist bis auf einige Konstanten von der Form

$$\ddot{q} + (1 + \lambda \cos(\omega t)) \sin(q) = 0, \quad (2.9)$$

wobei $\omega > 0$ die Frequenz und $\lambda \in (0, 1)$ die Amplitude der äußeren Oszillation sein soll. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(t, q, p) = \frac{1}{2}p^2 + (1 + \lambda \cos(\omega t)) (\cos(q) + 1).$$

Für eine Herleitung siehe z.B. Aufgabe 15.7 in [12].

Anmerkung zu Kapitel 2: Aussage 2.1.3 und auch die nachfolgenden Überlegungen zu elementaren heteroklinen Lösungen (2.4.1 und 2.4.2) findet man in [2]. Die Grundidee des Beweises von Proposition 2.1.4(v) stammt aus [1] (Beweis von Proposition 3.12). Inwieweit der hier vorgestellte Beweis von Strobels Satz mit dem Originalbeweis übereinstimmt, ist unklar. Die Thesis [3] von Strobel stand dem Autor nicht als Quelle zu Verfügung.

Kapitel 3

Von Ketten zu „echten“ heteroklinen Lösungen

Das folgende Kapitel stellt den zentralen Teil dieser Masterarbeit dar. Wir zeigen ebenfalls variationell, dass man unter Annahme einer „Nicht-Entartungsbedingung“ zwischen zwei verschiedenen Punkten in \mathbb{Z}^n unendlich viele heterokline Lösungen findet. Anhand von Beispiel 2.5.2 sehen wir, dass dazu eine weitere Bedingung auch notwendig ist. Das gesamte Kapitel basiert auf [2].

3.1. Anfangswerte elementarer heterokliner Lösungen

Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Wir definieren die Menge der Abbildungen, die I auf $\Gamma(a, b)$ minimieren durch

$$\mathcal{H}(a, b) := \{ q \in \Gamma(a, b) \mid I(q) = c(a, b) \}.$$

Falls $\mathcal{H}(a, b)$ nicht leer ist, ist nach 1.4.1 jedes $q \in \mathcal{H}(a, b)$ eine heterokline Lösung von (\star) , die a mit b verbindet. Insbesondere gilt $\mathcal{H}(a, b) \subset C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten in diesem Abschnitt die zugehörige Menge der Anfangswerte

$$S(a, b) := \{ q(0) \in \mathbb{R}^n \mid q \in \mathcal{H}(a, b) \}.$$

Bemerkung 3.1.1. Es gilt $a, b \in \overline{S(a, b)} \setminus S(a, b)$.

Beweis. Sei $q \in \mathcal{H}(a, b)$. Nach Bemerkung 1.4.2 ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $q(\cdot - k)$ ebenfalls in $\mathcal{H}(a, b)$. Das bedeutet $\{ q(k) \mid k \in \mathbb{Z} \} \subset S(a, b)$. Wegen $q(k) \rightarrow b$ für $k \rightarrow \infty$ bzw. $q(k) \rightarrow a$ für $k \rightarrow -\infty$ sind a und b demnach im Abschluss von $S(a, b)$.

Angenommen es gelte $a \in S(a, b)$, d.h. es gibt $q \in \mathcal{H}(a, b)$ mit $q(0) = a$. Nehmen wir weiter an es gebe ein $t_0 < 0$ mit $q(t_0) \neq a$. Dann muss es $\varepsilon > 0$ und Punkte $t_1 < t_2 < 0$ geben mit $q(t_1) \in \partial B_\varepsilon(a)$, $q(t_2) \in \partial B_{2\varepsilon}(a)$ und $q([t_1, t_2]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$. Nach Lemma 1.4.3 ist dann $I_{-\infty, 0}(q) > \beta_\varepsilon \varepsilon > 0$. Betrachten wir aber $\tilde{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{q}(t) := \begin{cases} a & t < 0 \\ q(t) & t \geq 0, \end{cases}$$

so ist $\tilde{q} \in \Gamma(a, b)$ und wir erhalten den Widerspruch

$$c(a, b) \leq I(\tilde{q}) = I_{0, \infty}(q) < I_{0, \infty}(q) + I_{-\infty, 0}(q) = I(q) = c(a, b).$$

Folglich muss $q|_{(-\infty, 0]} \equiv 0$ sein. Wegen $I(q) = c(a, b)$ ist q differenzierbar. Also ist $\dot{q}(0) = 0$. Außerdem ist q eine Lösung unseres Hamiltonschen Systems (\star) . Damit erfüllt q das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(B(t, q)\dot{q}) - (\dot{q}^T A(t, q)\dot{q})_q + V_q(t, q) = 0 \\ q(0) = a, \quad \dot{q}(0) = 0, \end{cases}$$

welches aber von der stationären Lösung $\mathbb{R} \ni t \mapsto a \in \mathbb{R}^n$ in eindeutiger Weise (siehe Bemerkung 1.2.1 und 1.2.3) gelöst wird. Also muss $q \equiv a$ sein, im Widerspruch zu $q \in \Gamma(a, b)$. Daher ist $a \notin S(a, b)$ und analog dazu $b \notin S(a, b)$. \square

Definition 3.1.2. Wir bezeichnen die Zusammenhangskomponenten von a bzw. b in $S(a, b)$ mit $C_a(a, b)$ bzw. $C_b(a, b)$. (Vergleiche auch Anhang A.)

Ziel dieses Abschnittes ist es folgende Aussage über die Anfangswerte von elementaren heteroklinen Lösungen zu zeigen:

Lemma 3.1.3 („All or Nothing Lemma“). *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ verschieden, sodass $\mathcal{H}(a, b)$ eine elementare heterokline Lösung enthalte. Dann tritt genau einer der beiden Fälle ein:*

- (i) $C_a(a, b) = C_b(a, b)$
- (ii) $C_a(a, b) = \{a\}$ und $C_b(a, b) = \{b\}$.

Aus diesem Lemma ergibt sich im Anschluss unsere „Nicht-Entartungsbedingung“ für die Existenz von heteroklinen Lösungen zwischen stationären Lösungen aus \mathbb{Z}^n . Der Name „All or Nothing Lemma“ geht auf Rabinowitz ([2]) zurück und drückt die Gegensätzlichkeit der beiden möglichen Fälle aus. Ein wesentlicher Bestandteil des Beweises ist es, dass zu einem Anfangswert $z \in S(a, b)$ genau eine zugehörige heterokline Lösung $q \in \mathcal{H}(a, b)$ mit $q(0) = z$ existiert. Die Lösungen $\mathcal{H}(a, b)$ sind also in eindeutiger Weise durch ihre Anfangspositionen $S(a, b)$ bestimmt. Wir wollen dies in mehreren Schritten zeigen.

Lemma 3.1.4. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ verschieden. Die Menge $\mathcal{H}(a, b)$ ist in der C^2 -Norm beschränkt, d.h.*

$$\sup_{q \in \mathcal{H}(a, b)} \|q\|_{C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Beweis. Wir betrachten nur $\mathcal{H}(a, b) \neq \emptyset$. Wir wissen nach Lemma 2.1.3, dass es eine Konstante $c_0 > 0$ gibt mit

$$\sup_{q \in \mathcal{H}(a, b)} \|q\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} \leq c_0 \quad \text{und} \quad \sup_{q \in \mathcal{H}(a, b)} \|q\|_E \leq c_0. \quad (3.1)$$

Als nächstes benutzen wir, dass jedes $q \in \mathcal{H}(a, b)$ die Gleichung (\star) (und damit auch $(\star\star)$) erfüllt um \ddot{q} abzuschätzen. Für $q \in \mathcal{H}(a, b)$ erhalten wir aus $(\star\star)$ zu einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$

$$|\ddot{q}| = \left| (B(t, q))^{-1} \left[- \left(\frac{d}{dt} B(t, q) \right) \dot{q} + (\dot{q}^T A(t, q)\dot{q})_q - V_q(t, q) \right] \right|. \quad (3.2)$$

Hier gilt mit einer passenden Konstanten $c_1 > 0$, die aus der Äquivalenz von Matrixnormen hervorgeht, folgendes:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} B(t, q) \right\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} &\leq \|B_t(t, q)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} + \left\| [\langle \nabla_q b_{ij}(t, q), \dot{q} \rangle]_{i,j=1}^n \right\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \\ &\leq \tilde{b} + c_1 \max_{i,j} |\langle \nabla_q b_{ij}(t, q), \dot{q} \rangle| \leq \tilde{b} + c_1 \tilde{b} |\dot{q}| \end{aligned}$$

sowie

$$|(\dot{q}^T A(t, q) \dot{q})_q| \leq n^2 \tilde{b} |\dot{q}|^2, \quad |V_q(t, q)| \leq \tilde{b} \quad \text{und} \quad \|(B(t, q))^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \tilde{b}.$$

Man erhält also aus (3.2) die Abschätzung

$$|\ddot{q}(t)| \leq c_2 (1 + |\dot{q}(t)| + |\dot{q}(t)|^2) \quad \text{für alle } q \in \mathcal{H}(a, b), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

mit einer passenden Konstanten $c_2 > 0$ unabhängig von q und t .

Als nächstes zur ersten Ableitung. Wir entwickeln $q \in \mathcal{H}(a, b)$ um $t \in \mathbb{R}$ mit Integralrestglied:

$$q(t+1) = q(t) + \dot{q}(t) + \int_0^1 (1-s) \ddot{q}(t+s) ds.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\dot{q}(t)| &\leq 2c_0 + \int_0^1 |\ddot{q}(t+s)| ds \stackrel{(3.3)}{\leq} 2c_0 + c_2 \int_t^{t+1} 1 + |\dot{q}(s)| + |\dot{q}(s)|^2 ds \\ &\leq 2c_0 + c_2 \left(1 + \|q\|_E \sqrt{1} + \|q\|_E^2\right) \stackrel{(3.1)}{\leq} 2c_0 + c_2(1 + c_0 + c_0^2) =: c_3. \end{aligned}$$

Somit haben wir für alle $q \in \mathcal{H}(a, b)$

$$\begin{aligned} \|q\|_{C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} &\leq \|q\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} + \|\dot{q}\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} + \|\ddot{q}\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} \\ &\stackrel{(3.3)}{\leq} c_0 + c_3 + c_2(1 + c_3 + c_3^2) < \infty. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.5. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ mit $\mathcal{H}(a, b) \neq \emptyset$. Jede Folge $(q_m)_m \subset \mathcal{H}(a, b)$ besitzt eine Teilfolge, die in $C_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gegen eine Lösung q^* des Hamiltonschen Systems (\star) konvergiert. Außerdem erfüllt q^* alle Eigenschaften aus Proposition 2.1.4.*

Beweis. Sei $(q_m)_m \subset \mathcal{H}(a, b)$. Wegen $I(q_m) = c(a, b)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es nach Proposition 2.1.4 ein $q^* \in E$ mit $q_m \rightarrow q^*$ in $C_{loc}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ entlang einer Teilfolge, die wir auch wieder $(q_m)_m$ nennen. Wir zeigen $q^* \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $q_m \rightarrow q^*$ in $C_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Die Folgen $(\dot{q}_m)_m$ und $(\ddot{q}_m)_m$ sind in $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (insbesondere auch in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$) nach 3.1.4 beschränkt durch eine Konstante $c > 0$. Außerdem ist $(\dot{q}_m)_m$ gleichgradig stetig, denn für $r, s \in K$ gilt:

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |\dot{q}_m(s) - \dot{q}_m(r)| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \int_r^s |\ddot{q}_m(t)| dt \leq c|r-s| \rightarrow 0 \quad \text{für } |r-s| \rightarrow 0.$$

Um die gleichgradige Stetigkeit von $(\ddot{q}_m)_m$ zu zeigen, definieren wir die rechte Seite von $(\star\star)$ als

$$f : \mathbb{R}^{1+2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, q, p) \mapsto (B(t, q))^{-1} \left[- \left(\frac{d}{dt} B(t, q) \right) p + (p^T A(t, q) p)_q - V_q(t, q) \right]. \quad (3.4)$$

Aufgrund der Voraussetzungen (V1)-(T3) ist f stetig differenzierbar und 1-periodisch in t und allen Koordinaten von q . Daher sind die Normen der Ableitungen $|f_t|$, $\|f_q\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$ und $\|f_p\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$ auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{B_c(0)} \subset \mathbb{R}^{1+2n}$ beschränkt durch ein $\tilde{c} > 0$.

Da jedes q_m eine Lösung von (\star) bzw. $(\star\star)$ ist, gilt für $r, s \in K$

$$\begin{aligned} \sup_{m \in \mathbb{N}} |\ddot{q}_m(s) - \ddot{q}_m(r)| &= \sup_{m \in \mathbb{N}} |f(s, q_m(s), \dot{q}_m(s)) - f(r, q_m(r), \dot{q}_m(r))| \\ &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \int_r^s \left| \frac{d}{dt} f(t, q_m(t), \dot{q}_m(t)) \right| dt \\ &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \int_r^s \tilde{c} (1 + |\dot{q}_m(t)| + |\ddot{q}_m(t)|) dt \\ &\leq \tilde{c} (1 + 2c) |s - r| \rightarrow 0 \quad \text{für } |r - s| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also ist auch $(\ddot{q}_m)_m$ gleichgradig stetig. Wir haben also beschränkte und gleichgradig stetige Folgen $(\dot{q}_m)_m, (\ddot{q}_m)_m \subset C^0(K, \mathbb{R}^n)$. Nach Arzela-Ascoli existieren wie in 1.3.3 Funktionen $g, h \in C^0(K, \mathbb{R}^n)$, sodass nach Übergang zu einer Teilfolge $(\dot{q}_{\varphi(m)})_m$ gegen g und $(\ddot{q}_{\varphi(m)})_m$ gegen h jeweils in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ konvergiert. Außerdem gilt $q_{\varphi(m)} \rightarrow q^*$ in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ und da die Konvergenz jeweils gleichmäßig ist, ist $q^*_{|_K} \in C^2(K, \mathbb{R}^n)$ und $\dot{q}^*_{|_K} = g, \ddot{q}^*_{|_K} = h$, denn beispielsweise gilt für $t, t_0 \in K$

$$q^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} q_{\varphi(m)}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(q_{\varphi(m)}(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{q}_{\varphi(m)}(s) ds \right) \stackrel{\text{glm. Konv.}}{=} q^*(t_0) + \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Wir finden also zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ eine Teilfolge von $(q_m)_m$, die gegen q^* in $C^2(K, \mathbb{R}^n)$ konvergiert. Wir zeigen nun noch, dass dadurch die gesamte Folge $(q_m)_m$ gegen q^* in $C^2(K, \mathbb{R}^n)$ konvergieren muss, was dann $q_m \rightarrow q^*$ in $C^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ impliziert.

Wir wissen bereits $q_m \rightarrow q^*$ in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$. Angenommen es gibt eine Teilfolge $(q_{\psi(m)})_m \subset (q_m)_m$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $\|q_{\psi(m)} - q^*\|_{C^2(K, \mathbb{R}^n)} \geq \varepsilon$ gilt. Nach Arzela-Ascoli können wir wieder ohne Einschränkung annehmen, dass ein $\tilde{q} \in C^2(K, \mathbb{R}^n)$ existiert mit $\|\tilde{q} - q^*\|_{C^2(K, \mathbb{R}^n)} \geq \varepsilon$ und $q_{\psi(m)} \rightarrow \tilde{q}$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^2(K, \mathbb{R}^n)}$. Dies impliziert aber bereits $\|\tilde{q} - q^*\|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} > 0$, im Widerspruch zu $q_{\psi(m)} \rightarrow \tilde{q}$ und $q_{\psi(m)} \rightarrow q^*$ in $C^0(K, \mathbb{R}^n)$. Also gilt $q_m \rightarrow q^*$ in $C^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Weiter gilt, da die Abbildung f aus (3.4) stetig ist, für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\ddot{q}^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \ddot{q}_m(t) \stackrel{(\star\star)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} f(t, q_m(t), \dot{q}_m(t)) = f(t, q^*(t), \dot{q}^*(t)).$$

Damit ist q^* eine Lösung des Hamiltonschen Systems (\star) . □

Für $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ erweitern wir nun $S(a, b)$ um die zugehörigen Anfangsgeschwindigkeiten und definieren

$$K(a, b) := \{ (q(0), \dot{q}(0)) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q \in \mathcal{H}(a, b) \}.$$

Die Werte in $K(a, b)$ bestimmen nach Picard-Lindelöf die Lösungen von $(\star\star)$ eindeutig. In dem nächsten Lemma zeigen wir, dass dafür bereits allein die Anfangswerte des Ortes $S(a, b)$ ausreichen.

Lemma 3.1.6. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$ verschieden und $\mathcal{H}(a, b)$ enthalte eine elementare heterokline Lösung. Dann gilt:*

- (i) $\overline{K(a, b)} = K(a, b) \dot{\cup} \{ (a, 0), (b, 0) \}$ und $\overline{S(a, b)} = S(a, b) \dot{\cup} \{ a, b \}$
- (ii) Die Projektion $P : \overline{K(a, b)} \rightarrow \overline{S(a, b)}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. (i) „ \supset “:

In Bemerkung 3.1.1 haben wir $a, b \in \overline{S(a, b)} \setminus S(a, b)$ gezeigt. Daraus folgt die Inklusion

$$\overline{S(a, b)} \supset S(a, b) \dot{\cup} \{ a, b \}.$$

Auch sind $(a, 0), (b, 0) \notin K(a, b)$. Bleibt also noch $(a, 0), (b, 0) \in \overline{K(a, b)}$ zu zeigen.

Dazu sei $q \in \mathcal{H}(a, b)$. Nach Bemerkung 1.4.2 ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ auch $(q(m), \dot{q}(m)) \in K(a, b)$. Das bedeutet die Folge $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $q_m := q(\cdot + m)$ ist enthalten in $\mathcal{H}(a, b)$ und besitzt damit nach 3.1.5 eine Teilfolge, die gegen eine Lösung q^* von (\star) in C_{loc}^2 konvergiert. Von q^* wissen wir außerdem, dass die Grenzwerte $q^*(\pm\infty)$ in \mathbb{Z}^n liegen und entweder $q^*(-\infty) \neq q^*(\infty)$ gilt oder q^* konstant ist (Prop. 2.1.4).

Behauptung: $q^* \equiv b$

Beweis. Zu $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$ gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $q([t_0, \infty)) \subset B_\varepsilon(b)$. D.h. für alle $m > t_0$ ist $q_m([0, \infty)) \subset B_\varepsilon(b)$ und somit $q^*(\infty) = b$.

Weiter gibt es einen Zeitpunkt $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $q^*(t_1) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(q^*(-\infty))$ und wegen $q_m \rightarrow q^*$ in C_{loc}^0 einen Index, ab dem $q_m(t_1)$ in $B_\varepsilon(q^*(-\infty))$ liegen muss. Also erhalten wir für m hinreichend groß

$$B_\varepsilon(q^*(-\infty)) \ni q_m(t_1) = q(t_1 + m) \rightarrow b \quad \text{für } m \rightarrow \infty,$$

woraus $q^*(-\infty) = b$ folgt.

Insgesamt gilt $q^*(\infty) = q^*(-\infty) = b$ und somit tritt nach Proposition 2.1.4 der Fall $q^* \equiv b$ ein. \square

Daher konvergiert $(q_m)_m$ in $C_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gegen die stationäre Lösung $\mathbb{R} \ni t \mapsto b \in \mathbb{R}^n$ und wir erhalten

$$(b, 0) = \lim_{m \rightarrow \infty} (q_m(0), \dot{q}_m(0)) \in \overline{K(a, b)}.$$

Das selbe gilt analog für $(a, 0)$ und wir haben dadurch die Inklusion

$$\overline{K(a, b)} \supset K(a, b) \dot{\cup} \{ (a, 0), (b, 0) \}$$

gezeigt.

„ \subset “:

Sei nun $z = (z_1, z_2) \in \overline{K(a, b)} \setminus \{(a, 0), (b, 0)\}$. Es gibt also eine Folge $(q_m)_m \subset \mathcal{H}(a, b)$ mit $q_m(0) \rightarrow z_1$ und $\dot{q}_m(0) \rightarrow z_2$. Nach 3.1.5 und 2.1.4 gibt es von dieser Folge eine Teilfolge $(q_m)_m$ und ein $q^* \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $q_m \rightarrow q^*$ in $C_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$
- $I(q^*) \leq c(a, b)$
- $q^*(\pm\infty) \in \mathbb{Z}^n$
- $q^*(-\infty) \neq q^*(\infty)$ oder q^* ist konstant in \mathbb{Z}^n .

Schließen wir zunächst den Fall, dass q^* eine stationäre Lösung ist, aus. Wäre $q^* \equiv \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{a, b\}$, so existiert nach Lemma 2.3.1 eine heterokline Kette $(Q_i)_{i=1}^l$ von a nach b mit Länge $l > 1$ und

$$I(Q_i) = c(Q_i(-\infty), Q_i(\infty)) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l \quad \text{und} \quad c(a, b) = \sum_{i=1}^l I(Q_i).$$

Das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $\mathcal{H}(a, b)$ eine elementare heterokline Lösung enthält. Außerdem kann q^* nicht identisch a oder b sein, da aus

$$(q_m(0), \dot{q}_m(0)) \rightarrow z \quad \text{und} \quad q_m \rightarrow q^* \text{ in } C_{loc}^2$$

folgt $(q^*(0), \dot{q}^*(0)) = z \notin \{(a, 0), (b, 0)\}$.

Bleibt also nur noch der Fall $q^*(-\infty) \neq q^*(\infty)$. Wäre hier $q^*(-\infty) \neq a$ oder $q^*(\infty) \neq b$ so erhalten wir nach Proposition 2.2.2 und Satz 2.2.3 ebenfalls eine heterokline Kette, die der Existenz einer elementaren heteroklinen Lösung in $\mathcal{H}(a, b)$ widerspricht. Folglich gilt $q^* \in \Gamma(a, b)$ und damit nicht nur $I(q^*) \leq c(a, b)$, sondern $I(q^*) = c(a, b)$. Das bedeutet

$$z = (q^*(0), \dot{q}^*(0)) \in K(a, b)$$

und wir haben

$$\overline{K(a, b)} \subset K(a, b) \dot{\cup} \{(a, 0), (b, 0)\}$$

gezeigt. Die entsprechende Inklusion für $S(a, b)$ folgt analog. Damit ist Teil (i) bewiesen.

(ii):

Wir wollen zeigen, dass $P : \overline{K(a, b)} \rightarrow \overline{S(a, b)}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1$ ein Homöomorphismus ist. Die Stetigkeit von P ist kein Problem. Um zu zeigen, dass P bijektiv ist, reicht es nach Teil (i) zu zeigen, dass die Einschränkung in Quelle und Ziel $\tilde{P} : K(a, b) \rightarrow S(a, b)$ $z \mapsto P(z)$ bijektiv ist. Diese Einschränkung ist offenbar surjektiv.

Behauptung: \tilde{P} ist injektiv.

Beweis. Seien $q, p \in \mathcal{H}(a, b)$ mit $q(0) = p(0)$. Wir definieren die Abbildung $\tilde{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{q}(t) := \begin{cases} q(t) & t \leq 0 \\ p(t) & t > 0. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{q} \in \Gamma(a, b)$. Wäre nun $I_{-\infty,0}(q) < I_{-\infty,0}(p)$, so erhielten wir den Widerspruch

$$c(a, b) \leq I(\tilde{q}) = I_{-\infty,0}(q) + I_{0,\infty}(p) < I(p) = c(a, b).$$

Also ist $I_{-\infty,0}(q) = I_{-\infty,0}(p)$ und damit

$$I(\tilde{q}) = I(p) = c(a, b).$$

Nach Proposition 1.4.1 ist $\tilde{q} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, und damit insbesondere die Ableitung in 0 stetig, d.h. $\dot{\tilde{q}}(0) = \dot{q}(0) = \dot{p}(0)$. \square

Daher ist P bijektiv. Weiter ist $\overline{K(a, b)}$ nach Lemma 3.1.4 beschränkt und somit kompakt. Da P bijektiv und stetig ist, folgt aus Lemma A.4, dass P bereits ein Homöomorphismus ist. \square

Mit diesen Vorbereitungen können wir das „All or Nothing Lemma“ beweisen.

Beweis von Lemma 3.1.3. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$ und $\mathcal{H}(a, b)$ enthalte eine elementare heterokline Lösung. Falls 3.1.3(ii) gilt, so kann offensichtlich 3.1.3(i) nicht gelten. Wir nehmen nun das Gegenteil von (ii) an, d.h. den Fall $C_a(a, b) \neq \{a\}$ oder $C_b(a, b) \neq \{b\}$, und zeigen, dass dann die beiden Zusammenhangskomponenten $C_a(a, b)$ und $C_b(a, b)$ gleich sind, d.h. (i) gilt.

Sei also $C_b(a, b) \neq \{b\}$ (oder analog dazu $C_a(a, b) \neq \{a\}$). Aus Lemma 3.1.6 wissen wir, dass die Anfangspositionen $S(a, b)$ bereits die gesamten Lösungen $\mathcal{H}(a, b)$ eindeutig bestimmen. Für $k \in \mathbb{Z}$ sind daher die folgenden Abbildungen wohldefiniert:

$$f_k : \overline{S(a, b)} \rightarrow \overline{S(a, b)}, \quad f_k(z) = \begin{cases} q(-k) & \text{falls } z = q(0) \in S(a, b) \\ z & \text{falls } z = a \text{ oder } z = b. \end{cases}$$

Da die rechte Seite unseres Hamiltonschen Systems $(\star\star)$ stetig differenzierbar ist, hängt die Lösung stetig differenzierbar von den Anfangswerten ab (siehe [9]). Insbesondere sind die Abbildungen $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ stetig. Daher ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ das Bild $f_k(C_b(a, b))$ ebenfalls zusammenhängend und außerdem ist immer $b \in f_k(C_b(a, b))$. Da $C_b(a, b)$ die größte zusammenhängende Menge in $\overline{S(a, b)}$ ist, die b enthält, gilt

$$f_k(C_b(a, b)) \subset C_b(a, b) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Nach unserer Annahme enthält $C_b(a, b)$ ein von b verschiedenes Element $z \in S(a, b)$, d.h. es gibt $q \in \mathcal{H}(a, b)$ mit $z = q(0)$. Wir erhalten wegen $q \in \Gamma(a, b)$, dass im Limes für $k \rightarrow \infty$ gilt

$$f_k(q(0)) = q(-k) \rightarrow a.$$

Nach (3.5) ist also a im Abschluss von $C_b(a, b)$, was aber als Zusammenhangskomponente bereits abgeschlossen ist (siehe A.2). Folglich ist $a \in C_b(a, b)$ und somit nach A.2(iv)

$$C_a(a, b) = C_b(a, b).$$

Damit ist Lemma 3.1.3 bewiesen. \square

3.2. Eine „Nicht-Entartungsbedingung“

Definition 3.2.1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq b$. Die Menge $\mathcal{H}(a, b)$ der heteroklinen Lösungen zwischen a und b heißt nicht entartet, falls $\mathcal{H}(a, b)$ eine elementare heterokline Lösung enthält und für die Anfangswerte $\overline{S(a, b)}$ der Fall

$$(ii) \quad C_a(a, b) = \{a\} \quad \text{und} \quad C_b(a, b) = \{b\}$$

aus Lemma 3.1.3 eintritt.

Weiter heißt $q \in \mathcal{H}(a, b)$ nicht entartete heterokline Lösung, falls $\mathcal{H}(a, b)$ nicht entartet ist.

Korollar 3.2.2. *Es sei $\mathcal{H}(a, b)$ nicht entartet. Dann existieren für alle $\rho \in (0, \frac{1}{3}]$ offene Umgebungen $\mathcal{O}_a \subset B_\rho(a)$ von a und $\mathcal{O}_b \subset B_\rho(b)$ von b mit*

$$(\partial\mathcal{O}_a \cup \partial\mathcal{O}_b) \cap \overline{S(a, b)} = \emptyset.$$

Beweis. Sei $\mathcal{H}(a, b)$ nicht entartet und $\rho \in (0, \frac{1}{3}]$. Nach Lemma 3.1.4 ist $\overline{S(a, b)} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (und als metrischer Raum auch Hausdorff). Außerdem sind die Mengen $\{a\}$ und $V := \overline{S(a, b)} \setminus B_{\frac{\rho}{2}}(a)$ in $\overline{S(a, b)}$ abgeschlossen. Wir können also Whyburn's Lemma (siehe A.3) anwenden.

Da die Zusammenhangskomponente $C_a(a, b)$ nur den Punkt a enthält, gibt es keine zusammenhängende Menge $W \subset \overline{S(a, b)}$, die $\{a\} \cap W \neq \emptyset$ und $V \cap W \neq \emptyset$ erfüllt. Nach Whyburn's Lemma existiert also eine Zerlegung von $\overline{S(a, b)}$ in zwei disjunkte, offene Teilmengen U_a und V_1 , sodass $\{a\} \subset U_a$ und $V \subset V_1$ gilt.

Wegen $\overline{S(a, b)} = U_a \dot{\cup} V_1$ sind U_a und V_1 auch abgeschlossen in $\overline{S(a, b)}$. Da $\overline{S(a, b)} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, sind U_a und V_1 zwei disjunkte kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^n , das heißt es existiert $\varepsilon \in (0, \frac{\rho}{2})$ mit $B_\varepsilon(U_a) \cap B_\varepsilon(V_1) = \emptyset$.

Setze $\mathcal{O}_a := B_\varepsilon(U_a)$. Dann ist sowohl $\mathcal{O}_a \subset B_\rho(a)$, als auch $\partial\mathcal{O}_a \cap \overline{S(a, b)} = \emptyset$ erfüllt.

In gleicher Weise konstruiert man eine Menge \mathcal{O}_b . □

Bemerkung 3.2.3. Wird die Nicht-Entartungsbedingung von $\mathcal{H}(a, b)$ nicht erfüllt, so tritt 3.1.3(i) ein. D.h. es gibt eine zusammenhängende Menge von heteroklinen Lösungen zwischen a und b . Im autonomen Fall besteht diese Menge aus $\{q(\cdot + \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit einem $q \in \mathcal{H}(a, b)$. Die nachfolgenden Resultate sind also für (\star_a) nicht gültig.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen $\mathcal{H}(a, b)$ nicht entartet ist. Rabinowitz bemerkt dazu in [2], dass dies der Fall ist, wenn das Potential von der Form $V(t, q) = a(t)W(q)$ ist und die Bedingung (V1') mit hinreichend großer minimaler Periode $T_0 > 0$ erfüllt ist. Das würde auf unser Beispiel 2.5.3 mit hinreichend klein gewähltem ω zutreffen.

3.3. Existenz „echter“ heterokliner Lösungen

Nun kommen wir zum Hauptresultat:

Satz 3.3.1 (Rabinowitz). *Es gelten die Voraussetzungen (V1)-(T3) und es sei $(P_i)_{i=1}^l$, $l \in \mathbb{N}$ eine Kette von nicht entarteten heteroklinen Lösungen unseres Systems (\star) mit $\xi_0 := P_1(-\infty) \in \mathbb{Z}^n$, $\xi_i := P_i(\infty) \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq i \leq l$.*

Dann gibt es zwischen ξ_0 und ξ_l unendlich viele verschiedene heterokline (bzw. homokline, falls $l \geq 2$ und $\xi_0 = \xi_l$) Lösungen von (\star) . Diese unterscheiden sich in der Zeit, die sie Nahe ξ_i , $1 \leq i \leq l-1$ verbringen.

Wir finden also nahe einer nicht entarteten heteroklinen Kette unendlich viele heterokline Lösungen, die Anfangs- und Endpunkt der Kette ohne weitere „Zwischenhalte“ in \mathbb{Z}^n verbindet. (Dies soll auch das Bild in der Einleitung darstellen.)

Der Beweis erfolgt ebenfalls über ein Variationsproblem. Entscheidend wird hierbei sein, dass unsere Nicht-Entartungsbedingung ein Vergleichsproblem auf einer Teilmenge von $\Gamma(\xi_{i-1}, \xi_i)$ ermöglicht, dessen kritisches Niveau echt größer $c(\xi_{i-1}, \xi_i)$ ist. Führen wir zunächst das neue Variationsproblem ein:

Ab sofort sei $(P_i)_{i=1}^l$, $l \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte, nicht entarteten heterokline Kette mit

$$\xi_0 := P_1(-\infty) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{und} \quad \xi_i := P_i(\infty) \in \mathbb{Z}^n, \quad 1 \leq i \leq l. \quad (3.6)$$

Zu dieser Kette und zu jedem $\rho \in (0, \frac{1}{3}]$ gibt es nach Korollar 3.2.2 offene Umgebungen $\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \subset B_\rho(\xi_{i-1})$ von ξ_{i-1} sowie $\mathcal{O}_i^\downarrow \subset B_\rho(\xi_i)$ von ξ_i , die

$$\left(\partial \mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \cup \partial \mathcal{O}_i^\downarrow \right) \cap \overline{S(\xi_{i-1}, \xi_i)} = \emptyset \quad (3.7)$$

für alle $1 \leq i \leq l$ erfüllen. Mit diesen Umgebungen und $m \in \mathbb{Z}^{2l}$ mit $m_{i+1} > m_i$, $1 \leq i \leq 2l-1$ definieren wir die Mengen

$$X_m^\rho := \left\{ q \in \Gamma(\xi_0, \xi_l) \mid q(m_{2i-1}) \in \overline{\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow}, q(m_{2i}) \in \overline{\mathcal{O}_i^\downarrow}, 1 \leq i \leq l \right\}.$$

Wir wollen nun I über passenden X_m^ρ minimieren um heterokline Lösungen zwischen ξ_0 und ξ_l zu finden. Dazu setze

$$b_m^\rho := \inf_{q \in X_m^\rho} I(q).$$

Proposition 3.3.2. *Sei $r \in (0, \frac{1}{3}]$ und dazu $\rho = \rho(r) \in (0, \frac{1}{3}]$ hinreichend klein. Außerdem sei $m \in \mathbb{Z}^{2l}$ mit $m_{i+1} > m_i$ für $1 \leq i \leq 2l-1$ und $m_{2i+1} - m_{2i} \geq 2$ für $1 \leq i \leq l-1$.*

Dann gibt es ein $Q = Q_m^\rho \in X_m^\rho$, welches I über X_m^ρ minimiert und für alle $1 \leq i \leq l-1$ die Inklusionen

- (i) $Q((-\infty, m_1]) \subset \overline{B_r(\xi_0)}$
- (ii) $Q([m_{2i}, m_{2i+1}]) \subset \overline{B_r(\xi_i)}$
- (iii) $Q([m_{2l}, \infty)) \subset \overline{B_r(\xi_l)}$.

erfüllt.

Beweis. Seien r und m wie angegeben und $\rho \in (0, \frac{1}{3}]$ erfülle

$$2\kappa\rho^2 < \beta_{\frac{r}{2}} \frac{r}{2}.$$

Sei $(q_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X_m^\rho$ eine I minimierende Folge, d.h. $I(q_j) \rightarrow b_m^\rho$ für $j \rightarrow \infty$. Nach Lemma 2.1.3 ist $(q_j)_j$ in E beschränkt und besitzt somit eine schwach konvergente Teilfolge (ebenfalls $(q_j)_j$ genannt). D.h. es existiert $Q \in E$ mit $q_j \rightharpoonup Q$ in E und nach 1.3.4 $q_j \rightarrow Q$ in $C_{loc}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Weiter ist nach 1.4.6 und 1.4.5 $I(Q) \leq b_m^\rho$ und $Q(\pm\infty) \in \mathbb{Z}^n$.

Aufgrund der Konvergenz in C_{loc}^0 gilt $Q(m_{2i}) \in \mathcal{O}_i^\downarrow$ und $Q(m_{2i-1}) \in \mathcal{O}_{i-1}^\uparrow$ für alle $1 \leq i \leq l$. Damit Q ein Element von X_m^ρ ist müssen wir also nur noch zeigen, dass $Q(-\infty) = \xi_0$ und $Q(\infty) = \xi_l$ ist. Dazu zeigen wir die Aussagen (i) und (iii).

(i): Angenommen es gibt ein $t \in (-\infty, m_1]$ mit $|Q(t) - \xi_0| > r$. Dann existiert ein Index $j_0 \in \mathbb{N}$, ab dem auch $|q_j(t) - \xi_0| > r$ gilt. Wegen $q_j(-\infty) = \xi_0$ existiert also für diese j ein Intervall $[r_j, s_j] \subset (-\infty, m_1]$ mit $q_j(r_j) \in \partial B_{\frac{r}{2}}(\xi_0)$, $q_j(s_j) \in \partial B_r(\xi_0)$ und $q_j([r_j, s_j]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{r}{2}}(\mathbb{Z}^n)$. Daher ist nach 1.4.3

$$I_{-\infty, m_1}(q_j) \geq \beta_{\frac{r}{2}} \frac{r}{2}. \quad (3.8)$$

Für $j \geq j_0$ setzen wir nun $p_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$p_j(t) := \begin{cases} \xi_0 & t < m_1 - 1 \\ \xi_0 \dashrightarrow q_j(m_1) & t \in [m_1 - 1, m_1] \\ q_j(t) & t > m_1. \end{cases}$$

Dann ist $p_j \in X_m^\rho$ und es gilt

$$I_{-\infty, m_1}(p_j) = I_{m_1-1, m_1}(p_j) \stackrel{1.4.7}{\leq} \kappa\rho^2, \quad (3.9)$$

da $q_j(m_1) \in \overline{\mathcal{O}_0^\uparrow} \subset \overline{B_\rho(\xi_0)}$. Das heißt wir erhalten den Widerspruch

$$\begin{aligned} b_m^\rho &\leq I(p_j) = I_{-\infty, m_1}(p_j) + I_{m_1, \infty}(q_j) \\ &\stackrel{(3.9)}{\leq} \kappa\rho^2 + I(q_j) - I_{-\infty, m_1}(q_j) \\ &\stackrel{(3.8)}{\leq} \kappa\rho^2 - \beta_{\frac{r}{2}} \frac{r}{2} + I(q_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \kappa\rho^2 - \beta_{\frac{r}{2}} \frac{r}{2} + b_m^\rho, \end{aligned}$$

was nach Wahl von ρ echt kleiner b_m^ρ ist. Damit haben wir (i) gezeigt. In gleicher Weise erhält man (iii). Aus (i) und (iii) sowie $Q(\pm\infty) \in \mathbb{Z}^n$ folgt $Q(-\infty) = \xi_0$ und $Q(\infty) = \xi_l$. Also ist $Q \in X_m^\rho$ und $I(Q) = b_m^\rho$.

Bleibt noch (ii) zu zeigen. Dafür passen wir das Argument aus dem Beweis von (i) leicht an:

Sei $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Wieder nehmen wir $|Q(t) - \xi_i| > r$ für ein $t \in [m_{2i}, m_{2i+1}]$ an und erhalten

$$I_{m_{2i}, m_{2i+1}}(q_j) \geq \beta_{\frac{r}{2}} \frac{r}{2}$$

ab einem Index $j_0 \in \mathbb{N}$. Die Vergleichsfolge $(p_j)_{j \geq j_0} \subset X_m^\rho$ sieht hier so aus:

$$p_j(t) := \begin{cases} q_j(t) & t < m_{2i} \\ q_j(m_{2i}) \dashrightarrow \xi_i & t \in [m_{2i}, m_{2i} + 1] \\ \xi_i & t \in (m_{2i} + 1, m_{2i+1} - 1) \\ \xi_i \dashrightarrow q_j(m_{2i+1}) & t \in [m_{2i+1} - 1, m_{2i+1}] \\ q_j(t) & t > m_{2i+1}. \end{cases}$$

Mit dieser Folge erhalten wir aus

$$I_{m_{2i}, m_{2i+1}}(p_j) - I_{m_{2i}, m_{2i+1}}(q_j) \leq 2\kappa\rho^2 - \beta_{\frac{r}{2}} \frac{r}{2} < 0$$

analog zum Beweis von (i) einen Widerspruch. \square

Es gibt also zu $r > 0$ beliebig klein und $m \in \mathbb{Z}^{2l}$ eine passende Abbildung $Q = Q_m^\rho$, die I über einer Teilmenge von E minimiert, ξ_0 mit ξ_l verbindet und vorgeschriebene Zeiten $m_{2i+1} - m_{2i} \geq 2$ in $B_r(\xi)$ verbringt.

Damit ein solches Q auch wirklich eine heterokline Lösung von (\star) ist, muss noch die Regularität von Q gezeigt werden. Wir wenden dazu wieder Proposition 1.4.1 an und sehen, da die Umgebungen \mathcal{O}_i^\downarrow und $\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow$ offen sind, dass die Variationsbedingung (1.6) von (X_m^ρ, Q) erfüllt wird, falls für alle $1 \leq i \leq l$

$$Q(m_{2i}) \in \mathcal{O}_i^\downarrow \quad \text{und} \quad Q(m_{2i-1}) \in \mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \quad (3.10)$$

gilt. Wir werden zeigen, dass (3.10) erfüllt ist, wenn die Differenzen $m_{i+1} - m_i$ groß genug sind. Die Größe der Differenzen $m_{2i+1} - m_{2i}$ beeinflusst, in welchem Abstand Q in $[m_{2i}, m_{2i+1}]$ zu ξ_i verläuft, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 3.3.3. *Sei $r \in (0, \frac{1}{3}]$, dazu $\rho = \rho(r) \in (0, \frac{1}{3}]$ wie in 3.3.2 und $\varepsilon \in (0, \rho]$. Weiter sei $m = m(\rho, \varepsilon) \in \mathbb{Z}^{2l}$ mit $m_{i+1} > m_i$ für alle $1 \leq i \leq 2l - 1$ so gewählt, dass die Differenzen $m_{2i+1} - m_{2i}$, $1 \leq i \leq l - 1$ hinreichend groß sind.*

Dann gibt es Teilintervalle

- (i) $T_0 = (-\infty, \tau_0 + 1] \subset (-\infty, m_1]$
- (ii) $T_i = [\tau_i - 1, \tau_i + 1] \subset [m_{2i}, m_{2i+1}]$, $1 \leq i \leq l - 1$
- (iii) $T_l = [\tau_l - 1, \infty) \subset [m_{2l}, \infty)$,

sodass für $Q = Q_m^\rho \in X_m^\rho$ aus Proposition 3.3.2 und für alle $0 \leq i \leq l$ die Inklusion

$$Q(T_i) \subset B_\varepsilon(\xi_i) \quad (3.11)$$

gilt.

Beweis. Seien r, ρ und ε wie angegeben. Wir setzen

$$N := \left(1 + \frac{2\kappa\rho^2}{\beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{2}}\right) \quad \text{und} \quad \lambda := \max \left\{ 2, \frac{2\kappa\rho^2}{\alpha_{\frac{\varepsilon}{2}}} \right\} \quad (3.12)$$

und wählen $m \in \mathbb{Z}^{2l}$ mit $m_{i+1} > m_i$, $1 \leq i \leq 2l - 1$ sowie

$$m_{2i+1} - m_{2i} > N\lambda \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq l - 1. \quad (3.13)$$

Sei dazu $Q = Q_m^\rho \in X_m^\rho$ aus Proposition 3.3.2. Da $Q \in \Gamma(\xi_0, \xi_l)$ ist, finden wir für $i = 0$ und $i = l$ die geforderten Intervalle T_0, T_l ohne weiteres. Sei nun $i \in \{1, \dots, l - 1\}$.

Behauptung 1: $I_{m_{2i}, m_{2i+1}}(Q) \leq 2\kappa\rho^2$.

Beweis. Die Abbildung $\tilde{Q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{Q}(t) := \begin{cases} Q(t) & t < m_{2i} \\ Q(m_{2i}) \dashrightarrow \xi_i & t \in [m_{2i}, m_{2i} + 1] \\ \xi_i & t \in (m_{2i} + 1, m_{2i+1} - 1) \\ \xi_i \dashrightarrow Q(m_{2i+1}) & t \in [m_{2i+1} - 1, m_{2i+1}] \\ Q(t) & t > m_{2i+1} \end{cases}$$

ist ebenfalls ein Element aus X_m^ρ mit linearen Übergängen in $B_\rho(\xi_i)$. Somit gilt

$$I(Q) \stackrel{3.3.2}{=} b_m^\rho \leq I(\tilde{Q}),$$

woraus

$$I_{m_{2i}, m_{2i+1}}(Q) \leq I_{m_{2i}, m_{2i+1}}(\tilde{Q}) \stackrel{1.4.7}{\leq} 2\kappa\rho^2$$

folgt. □

Behauptung 2: Jedes Teilintervall von $[m_{2i}, m_{2i+1}]$ mit Länge größer λ enthält einen Punkt \hat{t} , für den

$$Q(\hat{t}) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_i) \quad (3.14)$$

gilt.

Beweis. Sei $T = [r, s] \subset [m_{2i}, m_{2i+1}]$ ein Intervall, sodass (3.14) für kein $t \in T$ gilt, d.h. $Q(T) \subset \overline{B_r(\xi_i)} \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_i)$. Aus Behauptung 1 folgt unmittelbar

$$2\kappa\rho^2 \geq I_{r,s}(Q) \geq \int_r^s -V(t, Q) \geq \alpha_{\frac{\varepsilon}{2}}(s - r),$$

also $s - r \leq \lambda$. □

Nach Voraussetzung (3.13) und den Definitionen (3.12) gibt es in $[m_{2i}, m_{2i+1}]$ mindestens $\lfloor N \rfloor$ paarweise disjunkte Intervalle mit Länge größer λ . D.h. wir finden nach Behauptung 2 wenigstens $\lfloor N \rfloor$ verschiedene Intervalle der Form $[t_k - 1, t_k + 1] \subset [m_{2i}, m_{2i+1}]$, die ein \hat{t}_k enthalten, für das $Q(\hat{t}_k) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_i)$ gilt.

Nehmen wir nun an (3.11) wäre für alle diese Intervalle falsch, so gäbe es in diesen Intervallen neben \hat{t}_k auch Zeitpunkte, in denen Q zu ξ_i Abstand größer ε besitzt. D.h. wir finden wiederum Teilintervalle $[r_k, s_k] \subset [t_k - 1, t_k + 1]$, $1 \leq k \leq \lfloor N \rfloor$ mit $Q(r_k) \in \partial B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_i)$,

$Q(s_k) \in \partial B_\varepsilon(\xi_i)$ und $Q([r_k, s_k]) \subset \overline{B_\varepsilon(\xi_i)} \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi_i)$. Nach Behauptung 1 und Lemma 1.4.3 wäre also

$$2\kappa\rho^2 \geq I_{m_{2i}, m_{2i+1}}(Q) \geq \sum_{k=1}^{\lfloor N \rfloor} I_{r_k, s_k}(Q) \geq \lfloor N \rfloor \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{2},$$

was aber der Definition von N widerspricht (siehe (3.12)). \square

Als nächstes führen wir das anfangs erwähnte Hilfsvariationsproblem ein. Mit diesem können wir anschließend (3.10) per Widerspruchsbeweis zeigen. Setze also für $\rho \in (0, \frac{1}{3}]$ und $1 \leq i \leq l$

$$\Lambda^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) = \left\{ q \in \Gamma(\xi_{i-1}, \xi_i) \mid q(0) \in \partial\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \cup \partial\mathcal{O}_i^\downarrow \right\},$$

wobei wir zu gegebenem ρ die selben Umgebungen $\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow$ bzw. \mathcal{O}_i^\downarrow wählen, die wir für die Definition von X_m^ρ in (3.7) zu diesem ρ gewählt haben. Außerdem setze

$$d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) = \inf_{q \in \Lambda^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i)} I(q).$$

Lemma 3.3.4. *Für alle $\rho \in (0, \frac{1}{3}]$ und alle $1 \leq i \leq l$ gilt*

$$d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) > c(\xi_{i-1}, \xi_i).$$

Beweis. Sei $\rho \in (0, \frac{1}{3}]$ und $1 \leq i \leq l$. Offenbar ist $d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) \geq c(\xi_{i-1}, \xi_i)$.

Angenommen $d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) = c(\xi_{i-1}, \xi_i)$. Dann gibt es eine Folge $(q_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \Lambda^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i)$ mit $I(q_j) \rightarrow c(\xi_{i-1}, \xi_i)$. Da $q_j(0) \in \partial\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \cup \partial\mathcal{O}_i^\downarrow$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, ist $(q_j)_j \subset \Gamma(\xi_{i-1}, \xi_i)$ eine getrennt minimierende Folge, denn:

Nach Proposition 2.1.4 konvergiert $(q_j)_j$ entlang einer Teilfolge in C_{loc}^0 gegen eine Funktion $q^* \in E$ mit den Eigenschaften $q^*(\pm\infty) \in \mathbb{Z}^n$, $I(q^*) \leq c(\xi_{i-1}, \xi_i)$ und es gilt entweder q^* konstant oder $q^*(-\infty) \neq q^*(\infty)$. Aus der Konvergenz in C_{loc}^0 und der Abgeschlossenheit von $\partial\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \cup \partial\mathcal{O}_i^\downarrow$ folgt $q^*(0) \in \partial\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \cup \partial\mathcal{O}_i^\downarrow \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$. Daher kann q^* nicht konstant sein, mit anderen Worten $(q_j)_j$ ist getrennt minimierend.

Falls nun $q^*(-\infty) = \xi_{i-1}$ und $q^*(\infty) = \xi_i$ gilt, so ist $q^* \in \mathcal{H}(\xi_{i-1}, \xi_i)$ und damit $q^*(0) \in \partial\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \cup \partial\mathcal{O}_i^\downarrow \cap S(\xi_{i-1}, \xi_i)$, was aber nach (3.7) leer ist.

Im anderen Fall, sprich $q^*(-\infty) \neq \xi_{i-1}$ oder $q^*(\infty) \neq \xi_i$, erhalten wir aus Proposition 2.2.2 und Satz 2.2.3 eine heterokline Kette $(R_j)_{j=1}^k$ von ξ_{i-1} nach ξ_i mit Länge k größer 1 und $c(\xi_{i-1}, \xi_i) = \sum_k I(R_k)$. Diese Kette widerspricht aber der Tatsache, dass $\mathcal{H}(\xi_{i-1}, \xi_i)$ durch die Betrachtung einer nicht entarteten heterokline Kette $(P_i)_{i=1}^l$ (siehe (3.6)) eine elementare heterokline Lösung enthält.

Insgesamt muss also $d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) > c(\xi_{i-1}, \xi_i)$ gelten. \square

Nun können wir die Regularitätsbedingung (3.10) zeigen:

Lemma 3.3.5. *Seien $r \in (0, \frac{1}{3}]$ und $\rho = \rho(r)$ wie in 3.3.2.*

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{Z}^{2l}$ mit $m_{i+1} - m_i$ hinreichend groß - abhängig von ρ und $(P_i)_{i=1}^l$:

$$Q(m_{2i}) \in \mathcal{O}_i^\downarrow \quad \text{und} \quad Q(m_{2i-1}) \in \mathcal{O}_{i-1}^\uparrow, \quad 1 \leq i \leq l, \quad (3.10)$$

wobei $Q = Q_m^\rho \in X_m^\rho$ aus 3.3.2 ist.

Beweis. Seien r, ρ wie oben angegeben und $\varepsilon \in (0, \rho]$ mit

$$6\kappa\varepsilon^2 < \min_{1 \leq i \leq l} [d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) - c(\xi_{i-1}, \xi_i)], \quad (3.15)$$

was nach Lemma 3.3.4 möglich ist.

Wir können nach Bemerkung 1.4.2 ohne Einschränkung annehmen, dass unsere zu Beginn dieses Abschnitts gewählte nicht entartete heterokline Kette $(P_i)_{i=1}^l$ für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$

$$P_i((-\infty, 0]) \subset B_\varepsilon(\xi_{i-1}) \cap \overline{\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow}$$

erfüllt.

Wir wählen nun $m \in \mathbb{Z}^{2l}$ mit $m_{i+1} - m_i, 1 \leq i \leq 2l - 1$ so groß, dass zum Einen die Voraussetzungen aus Lemma 3.3.3 erfüllt sind und zum Anderen für $1 \leq i \leq l$

$$P_i([m_{2i} - m_{2i-1}, \infty)) \subset B_\varepsilon(\xi_i) \cap \overline{\mathcal{O}_i^\downarrow} \quad (3.16)$$

gilt.

Seien nun $Q = Q_m^\rho \in X_m^\rho$ wie in Proposition 3.3.2 und $(T_i)_{i=0}^l$ Intervalle mit entsprechenden $\tau_i \in T_i$ wie in Lemma 3.3.3. Das heißt es gilt:

- (a) $T_0 = (-\infty, \tau_0 + 1] \subset (-\infty, m_1]$
 $T_i = [\tau_i - 1, \tau_i + 1] \subset [m_{2i}, m_{2i+1}], 1 \leq i \leq l - 1$
 $T_l = [\tau_l - 1, \infty) \subset [m_{2l}, \infty)$
- (b) $Q(T_i) \subset B_\varepsilon(\xi_i), 0 \leq i \leq l$
- (c) $I(Q) = b_m^\rho$.

Nehmen wir nun an (3.10) gilt nicht für ein $i \in \{1, \dots, l\}$. Wegen $Q \in X_m^\rho$ bedeutet dies

$$Q(m_{2i}) \in \partial\mathcal{O}_i^\downarrow \quad \text{oder} \quad Q(m_{2i-1}) \in \partial\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow. \quad (3.17)$$

Für dieses i setzen wir $\tilde{P} := P_i(\cdot - m_{2i-1}) \in \Gamma(\xi_{i-1}, \xi_i)$. Dadurch ist

- (d) $\tilde{P}((-\infty, m_{2i-1}]) \subset B_\varepsilon(\xi_{i-1}) \cap \overline{\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow}$
 $\tilde{P}([m_{2i}, \infty)) \subset B_\varepsilon(\xi_i) \cap \overline{\mathcal{O}_i^\downarrow}$
- (e) $I(\tilde{P}) = c(\xi_{i-1}, \xi_i)$.

Wir benötigen zwei Hilfsabbildungen um einen Widerspruch zu zeigen. Setze $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$R(t) = \begin{cases} \xi_{i-1} & t < \tau_{i-1} - 1 \\ \xi_{i-1} \dashrightarrow Q(\tau_{i-1}) & t \in [\tau_{i-1} - 1, \tau_{i-1}] \\ Q(t) & t \in (\tau_{i-1}, \tau_i) \\ Q(\tau_i) \dashrightarrow \xi_i & t \in [\tau_i, \tau_i + 1] \\ \xi_i & t > \tau_i + 1. \end{cases}$$

Man beachte m_{2i-1} und m_{2i} liegen nach (a) im Intervall (τ_{i-1}, τ_i) . Nach unserer Annahme (3.17) ist daher

$$R(m_{2i}) \in \partial\mathcal{O}_i^\downarrow \quad \text{oder} \quad R(m_{2i-1}) \in \partial\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow$$

und somit $R(\cdot + m_{2i})$ oder $R(\cdot + m_{2i-1})$ eine Abbildung aus $\Lambda^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i)$. Aus (b) und 1.4.7 folgt

$$\begin{aligned} d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) &\leq I(R(\cdot + m_{2i})) \quad [\text{oder} \leq I(R(\cdot + m_{2i-1}))] \\ &\stackrel{1.4.2}{=} I(R) \stackrel{1.4.7}{\leq} 2\kappa\varepsilon^2 + I_{\tau_{i-1}, \tau_i}(Q). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Als nächstes betrachten wir eine Abbildung, die zeigt, dass $Q \in X_m^\rho$ nicht optimal - im Sinne von I minimierend - gewesen sein kann. Wir definieren $\tilde{Q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{Q}(t) = \begin{cases} Q(t) & t < \tau_{i-1} - 1 \\ Q(\tau_{i-1} - 1) \dashrightarrow \xi_{i-1} & t \in [\tau_{i-1} - 1, \tau_{i-1}] \\ \xi_{i-1} \dashrightarrow \tilde{P}(\tau_{i-1} + 1) & t \in (\tau_{i-1}, \tau_{i-1} + 1) \\ \tilde{P}(t) & t \in [\tau_{i-1} + 1, \tau_i - 1] \\ \tilde{P}(\tau_i - 1) \dashrightarrow \xi_i & t \in (\tau_i - 1, \tau_i) \\ \xi_i \dashrightarrow Q(\tau_i + 1) & t \in [\tau_i, \tau_i + 1] \\ Q(t) & t > \tau_i + 1. \end{cases}$$

Dann liegt \tilde{Q} in der Tat in X_m^ρ , denn: Wegen $m_{2i}, m_{2i-1} \in [\tau_{i-1} + 1, \tau_i - 1]$ und (d) gilt

$$\tilde{Q}(m_{2i}) = \tilde{P}(m_{2i}) \in \overline{\mathcal{O}_i^\downarrow} \quad \text{und} \quad \tilde{Q}(m_{2i-1}) = \tilde{P}(m_{2i-1}) \in \overline{\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow}.$$

In allen anderen m_j , $j \in \{1, \dots, 2l\} \setminus \{2i-1, 2i\}$ stimmt \tilde{Q} mit Q überein, also $\tilde{Q} \in X_m^\rho$.

Weiter finden wegen (b) und (d) alle linearen Übergänge ε -Nahe an \mathbb{Z}^n statt. Wir können daher abschätzen:

$$\begin{aligned} I(Q) - I(\tilde{Q}) &\stackrel{1.4.7}{\geq} I_{\tau_{i-1}-1, \tau_i+1}(Q) - I_{\tau_{i-1}+1, \tau_i-1}(\tilde{P}) - 4\kappa\varepsilon^2 \\ &\geq I_{\tau_{i-1}, \tau_i}(Q) - I(\tilde{P}) - 4\kappa\varepsilon^2 \\ &\stackrel{(3.18)+(e)}{\geq} d^\rho(\xi_{i-1}, \xi_i) - c(\xi_{i-1}, \xi_i) - 6\kappa\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Da wir ε in (3.15) klein genug gewählt haben, ergibt sich der Widerspruch

$$b_m^\rho \leq I(\tilde{Q}) < I(Q) \stackrel{(c)}{=} b_m^\rho.$$

Damit ist auch dieses Lemma bewiesen. \square

Man beachte an dieser Stelle die Abhängigkeiten der benötigten Parameter $\rho = \rho(r)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, (P_i)_{i=1}^l)$ und $m = m(\rho, \varepsilon, (P_i)_{i=1}^l)$. Zusammenfassend haben wir also unter Benutzung von Proposition 3.3.2, Lemma 3.3.5 und 1.4.1 folgendes gezeigt:

Satz 3.3.6. *Seien (V1)-(T3) erfüllt. Gibt es eine nicht entartete heterokline Kette $(P_i)_{i=1}^l$, die die Punkte $\xi_0 \in \mathbb{Z}^n$ und $\xi_l \in \mathbb{Z}^n$ über die stationären Punkte $(\xi_i)_{i=1}^{l-1} \subset \mathbb{Z}^n$ verbindet, so existiert für alle $r \in (0, \frac{1}{3}]$ und zu jedem $m \in \mathbb{Z}^{2l}$ mit hinreichend großen Abständen $m_{i+1} - m_i$, $1 \leq i \leq 2l - 1$ eine Lösung Q des Hamiltonschen Systems (\star) , die folgendes erfüllt:*

$$(i) \quad Q(-\infty) = \xi_0 \text{ und } Q(\infty) = \xi_l$$

$$(ii) \quad Q((-\infty, m_1]) \subset \overline{B_r(\xi_0)}$$

$$(iii) \quad Q([m_{2i}, m_{2i+1}]) \subset \overline{B_r(\xi_i)}, \quad 1 \leq i \leq l - 1$$

$$(iv) \quad Q([m_{2l}, \infty)) \subset \overline{B_r(\xi_l)}.$$

Hierbei hängt die Größe der Abstände $m_{i+1} - m_i$ von r und der Kette $(P_i)_{i=1}^l$ ab.

Es folgt unmittelbar Satz 3.3.1.

Kapitel 4

Chaotische Konsequenzen

Zum Abschluss dieser Arbeit ziehen wir noch einige Folgerungen aus dem vorherigen Abschnitt. Unter anderem zeigen wir durch Einbettung eines Bernoulli-Shifts, dass unser System (\star) im nicht-entarteten Fall chaotische Dynamik enthält.

4.1. Unendliche heterokline Ketten

Definition 4.1.1. Sei $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$ eine Menge von heteroklinen Lösungen. Wir nennen eine heterokline Kette $(P_i)_{i=1}^l$ von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ erzeugt, falls zu jedem $i \in \{1, \dots, l\}$ ein $\hat{i} \in \{1, \dots, k\}$ und ein $\eta \in \mathbb{Z}^n$ existiert, sodass $P_i = \hat{P}_{\hat{i}} + \eta$.

Bemerkung 4.1.2. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.3.6 hängt die Größe der Abstände $m_{i+1} - m_i$ von r und der Kette $(P_i)_{i=1}^l$ ab. Wird diese Kette allerdings von nicht entarteten heteroklinen Lösungen $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$ erzeugt, so hängt die nötige Größe der Differenzen $m_{i+1} - m_i$ nur von r und $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ ab.

Beweis. Zunächst beachte, dass bei der Konstruktion der Mengen X_m^ρ in (3.7) die Umgebungen \mathcal{O}_i^\downarrow bzw. $\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow$ als Translate voneinander gewählt werden können, wann immer zwei entsprechende heterokline Lösungen der Kette lediglich um $j \in \mathbb{Z}^n$ verschoben zueinander sind.

Ist nun $(P_i)_{i=1}^l$, $l \in \mathbb{N}$ von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$ erzeugt, so sieht man im Beweis von Lemma 3.3.5, genauer in (3.15), (3.13) und schließlich (3.16), dass $m_{i+1} - m_i$ nun nur noch von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ und r abhängt. \square

Wir betrachten nun auch „unendliche“ heterokline Ketten:

Definition 4.1.3. Analog zu Definition 2.1.1 und 2.4.1 heißt $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (nicht entartete) heterokline Kette zu (\star) , falls jede Abbildung P_i eine (nicht entartete) heterokline Lösung von (\star) ist und $P_i(\infty) = P_{i+1}(-\infty)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt.

Weiter heißt $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ endlich erzeugt, falls eine Menge $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$ von heteroklinen Lösungen existiert, sodass für jedes $l \in \mathbb{N}$ die endliche Kette $(P_i)_{i=-l}^l$ von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ gemäß 4.1.1 erzeugt wird.

Korollar 4.1.4. Sei $r \in (0, \frac{1}{3}]$ und $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine nicht entartete, endlich erzeugte heterokline Kette zu (\star) . Dann existiert zu jedem $m \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ mit hinreichend großen Differenzen $m_{i+1} - m_i$ eine Lösung Q von (\star) , die

$$Q([m_{2i}, m_{2i+1}]) \subset \overline{B_r(P_i(\infty))}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

Beweis. Sei $r \in (0, \frac{1}{3}]$ und $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine nicht entartete, endlich erzeugte heterokline Kette zu (\star) . Für $i \in \mathbb{Z}$ setze $\xi_i := P_i(\infty)$. Die erzeugende Menge von nicht entarteten Heteroklinen sei $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Weiter wählen wir zu r die Zahl $\rho = \rho(r) \in (0, r]$ wie in Proposition 3.3.2 genügend klein, sowie $m \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ mit hinreichend großen Abständen - abhängig von ρ und $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ -, sodass für jede endliche, von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ erzeugte Kette die Voraussetzungen von Lemma 3.3.5 erfüllt sind. Dies ist nach Bemerkung 4.1.2 möglich. Außerdem wählen wir noch Umgebungen $\mathcal{O}_i^\downarrow \subset B_\rho(\xi_i)$, $\mathcal{O}_{i-1}^\uparrow \subset B_\rho(\xi_{i-1})$, $i \in \mathbb{Z}$, die (3.7) erfüllen. Diese sind hier ebenfalls nur abhängig von ρ und $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$.

Sei $m^{(l)} := (m_{-2l-1}, \dots, m_{2l}) \in \mathbb{Z}^{4l+2}$. Zu jeder endlichen Kette $(P_i)_{i=-l}^l$, $l \in \mathbb{N}$ finden wir nach 3.3.2/3.3.5 in der dazugehörigen Menge $X_{m^{(l)}}^\rho$ eine Lösung Q_l von (\star) , die folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) $Q_l((-\infty, m_{-2l-1}]) \subset \overline{B_r(\xi_{-l-1})}$,
- (b) $Q_l([m_{2i}, m_{2i+1}]) \subset \overline{B_r(\xi_i)}$, $-l \leq i \leq l-1$,
- (c) $Q_l([m_{2l}, \infty)) \subset \overline{B_r(\xi_l)}$,
- (d) $I(Q_l) = b_{m^{(l)}}^\rho$,
- (e) $Q_l(m_{2i}) \in \mathcal{O}_i^\downarrow$, $Q_l(m_{2i-1}) \in \mathcal{O}_{i-1}^\uparrow$, $-l \leq i \leq l$.

Behauptung 1: Es gibt $c_1 = c_1((\hat{P}_i)_{i=1}^k, r) > 0$, sodass für alle $l, i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$I_{m_i, m_{i+1}}(Q_l) \leq c_1.$$

Behauptung 2: Zu $K \subset \mathbb{R}$ kompakt gibt es $c_2 = c_2((\hat{P}_i)_{i=1}^k, r, K) > 0$, sodass für alle $l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\|Q_l\|_{C^2(K, \mathbb{R}^n)} \leq c_2.$$

Die Beweise der Behauptungen enthalten nichts wirklich Neues und werden zunächst übersprungen.

Sei $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine gegen \mathbb{R} aufsteigende Folge kompakter Teilmengen von \mathbb{R} , d.h. $K_j \subset K_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = \mathbb{R}$. Nach Behauptung 2 gibt es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c^{(j)} > 0$ mit

$$\sup_{l \in \mathbb{N}} \|Q_l\|_{C^2(K_j, \mathbb{R}^n)} \leq c^{(j)}.$$

Daher sind für alle $j \in \mathbb{N}$ die Einschränkungen $(Q_l|_{K_j})_l$ und $(\dot{Q}_l|_{K_j})_l$ gleichgradig stetig. Da $(Q_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Lösungen von (\star) ist, gilt dies ebenso für $(\ddot{Q}_l|_{K_j})_l$. (Siehe Beweis von 3.1.5 für eine detaillierte Ausführung.)

Nach Arzela-Ascoli können wir also zu $j \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(Q_{\varphi_j(l)})_l$ von $(Q_l)_l$ wählen, sodass $(Q_{\varphi_j(l)})_l$ in $\|\cdot\|_{C^2(K_j, \mathbb{R}^n)}$ gegen ein $R_j \in C^2(K_j, \mathbb{R}^n)$ konvergiert. Induktiv kann dies

so geschehen, dass stets $(Q_{\varphi_j(t)})_l$ eine Teilfolge von $(Q_{\varphi_{j-1}(t)})_l$ ist, wobei $(Q_{\varphi_0(t)})_l = (Q_l)_l$ ist.

Wir definieren die gesuchte Lösung $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $Q(t) = R_j(t)$ für irgendein j mit $t \in K_j$. Die Abbildung Q ist wohldefiniert, da die K_j aufsteigend und die Teilfolgen $(Q_{\varphi_j(t)})_l$ absteigend angeordnet sind. Weiter ist $Q \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und eine Lösung von (\star) , da jedes R_j ein C^2 -Limes von Lösungen ist. Und auch die gewünschte Eigenschaft von Q ist erfüllt, denn: Sei $i \in \mathbb{Z}$. Für alle $l > |i|$ gilt (b). Somit gilt $R_j([m_{2i}, m_{2i+1}]) \subset \overline{B_r(\xi_i)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $K_j \supset [m_{2i}, m_{2i+1}]$. Bleiben also nur noch die beiden Behauptungen zu zeigen:

Beweis von Behauptung 1. Setze $c_1 := 2\kappa r^2 + \max_{1 \leq i \leq k} I(\hat{P}_i)$ und seien $i, l \in \mathbb{Z}$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

Fall 1: $i < -2l - 1$ oder $i \geq 2l$

Betrachte z.B. für $i < -2l - 1$ die Abbildung $\tilde{Q}_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{Q}_l(t) := \begin{cases} \xi_{-l-1} & t < m_{-2l-1} - 1 \\ \xi_{-l-1} \dashrightarrow Q_l(m_{-2l-1}) & t \in [m_{-2l-1} - 1, m_{-2l-1}] \\ Q_l(t) & t > m_{-2l-1}. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{Q}_l \in X_{m^{(l)}}^\rho$ und somit

$$I_{m_i, m_{i+1}}(Q_l) \leq I_{-\infty, m_{-2l-1}}(Q_l) \stackrel{(d)}{\leq} I_{-\infty, m_{-2l-1}}(\tilde{Q}_l) \stackrel{1.4.7+(a)}{\leq} \kappa r^2 \leq c_1.$$

Für $i \geq 2l$ analog.

Fall 2: $-2l - 1 \leq i < 2l$ und i gerade

Sei $i = 2j$ mit $j \in \{-l, \dots, l-1\}$. Hier definieren wir $\tilde{Q}_l \in X_{m^{(l)}}^\rho$ durch

$$\tilde{Q}_l(t) := \begin{cases} Q_l(t) & t < m_{2j} \\ Q_l(m_{2j}) \dashrightarrow \xi_j & t \in [m_{2j}, m_{2j} + 1] \\ \xi_j & t \in (m_{2j} + 1, m_{2j+1} - 1) \\ \xi_j \dashrightarrow Q_l(m_{2j+1}) & t \in [m_{2j+1} - 1, m_{2j+1}] \\ Q_l(t) & t > m_{2j+1} \end{cases}$$

und erhalten wie in Fall 1: $I_{m_i, m_{i+1}}(Q_l) \leq I_{m_{2j}, m_{2j+1}}(\tilde{Q}_l) \leq 2\kappa r^2 \leq c_1$.

Fall 3: $-2l - 1 \leq i < 2l$ und i ungerade

Sei $i = 2j - 1$ mit $j \in \{-l, \dots, l\}$. Nach der Wahl von m und 1.4.2 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die zugehörige heterokline Lösung P_j zwischen ξ_{j-1} und ξ_j die Inklusionen

$$P_j((-\infty, m_{2j-1}]) \subset \overline{\mathcal{O}_{j-1}^\uparrow} \subset B_r(\xi_{j-1}) \quad \text{und} \quad P_j([m_{2j}, \infty)) \subset \overline{\mathcal{O}_j^\downarrow} \subset B_r(\xi_j)$$

erfüllt. (Vergleiche (3.16) und Punkt (d) im Beweis von Lemma 3.3.5.) Setze nun $\tilde{Q}_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\tilde{Q}_l(t) := \begin{cases} Q_l(t) & t < m_{2j-1} - 1 \\ Q_l(m_{2j-1} - 1) \dashrightarrow P_j(m_{2j-1}) & t \in [m_{2j-1} - 1, m_{2j-1}] \\ P_j(t) & t \in (m_{2j-1}, m_{2j}) \\ P_j(m_{2j}) \dashrightarrow Q_l(m_{2j+1}) & t \in [m_{2j}, m_{2j} + 1] \\ Q_l(t) & t > m_{2j} + 1. \end{cases}$$

Wieder ist $\tilde{Q}_l \in X_{m^{(l)}}^\rho$ und aus $I(Q_l) = b_{m^{(l)}}^\rho \leq I(\tilde{Q}_l)$ folgt

$$I_{m_i, m_{i+1}}(Q_l) \leq I_{m_{2j-1}-1, m_{2j}+1}(Q_l) \leq I_{m_{2j-1}-1, m_{2j}+1}(\tilde{Q}_l) \leq 2\kappa r^2 + I(P_j) \leq c_1.$$

Für die letzte Ungleichung beachte, dass $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ erzeugt wird und somit $I(P_j) = I(\hat{P}_{\hat{i}} + \hat{j}) = I(\hat{P}_{\hat{i}})$ für ein $\hat{i} \in \{1, \dots, k\}$ und $\hat{j} \in \mathbb{Z}^n$ gilt. \square

Beweis von Behauptung 2. Seien $i, l \in \mathbb{Z}$. Es reicht die Aussage für $K = [m_i, m_{i+1}]$ zu zeigen, da sich jede kompakte Menge in \mathbb{R} durch endlich viele dieser Intervalle überdecken lässt. Sei $t \in [m_i, m_{i+1}]$. Es gilt für ein passendes $\xi \in \{\xi_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} |Q_l(t)| &\leq |Q_l(t) - Q_l(m_i)| + |Q_l(m_i)| \leq \left(\int_{m_i}^t \dot{Q}_l^T \dot{Q}_l \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{t - m_i} + |Q_l(m_i)| \\ &\leq \sqrt{\tilde{a} I_{m_i, m_{i+1}}(Q_l)} \sqrt{m_{i+1} - m_i} + |Q_l(m_i)| \\ &\stackrel{\text{Beh.1}}{\leq} \sqrt{\tilde{a} c_1 (m_{i+1} - m_i)} + |\xi| + r =: \tilde{c}((\hat{P}_i)_{i=1}^k, r, i). \end{aligned}$$

Also ist $\|Q_l\|_{C^0([m_i, m_{i+1}], \mathbb{R}^n)} \leq \tilde{c}$.

Da jedes Q_l eine Lösung von $(\star\star)$ ist, erhalten wir wie in (3.3) eine von l unabhängige Konstante \tilde{c} , sodass für alle $t \in [m_i, m_{i+1}]$ gilt

$$\left| \ddot{Q}_l(t) \right| \leq \tilde{c} \left(1 + \left| \dot{Q}_l(t) \right| + \left| \dot{Q}_l(t) \right|^2 \right).$$

Nun folgt durch Abschätzen von $\left| \dot{Q}_l(t) \right|$ analog zum Beweis von Lemma 3.1.4 (ab (3.3)) die behauptete Aussage. \square

\square

Bemerkung 4.1.5. Ein analoges Resultat gilt für nicht entartete, endlich erzeugte heterokline Ketten der Form $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$, siehe [2]. In diesem Fall existiert zu passendem $m \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ eine Lösung Q von (\star) , die

- (i) $Q(-\infty) = P_1(-\infty)$
- (ii) $Q((-\infty, m_1]) \subset \overline{B_r(P_1(-\infty))}$
- (iii) $Q([m_{2i}, m_{2i+1}]) \subset \overline{B_r(P_i(\infty))}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

erfüllt.

4.2. Shift-Semikonjugation

Sei $\Sigma_k := \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$, $k \geq 2$ der biinfinite Folgenraum aus k Symbolen und $\sigma : \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$, $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ der zugehörige Bernoulli-Shift.

Bemerkung 4.2.1. Versieht man Σ_k mit der Metrik

$$d(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} 4^{-|j|} \delta(x_j, y_j), \quad \text{wobei} \quad \delta(a, b) := \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist σ ein „chaotischer“ Homöomorphismus.

Hier ist chaotisch im Sinne von Devaney gemeint, d.h. σ ist topologisch transitiv, sensitiv abhängig von den Anfangswerten und periodische Orbits liegen dicht in Σ_k . (Siehe z.B. [10] für diese Definition von Chaos und einer Betrachtung des Shifts auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$. Für die biinfinite Version siehe [11].) Die genannten Eigenschaften sind in unserem Fall weniger von Interesse. Wir benutzen hier eine etwas schwächere Definition von chaotischer Dynamik, die gleichbedeutend mit der Existenz einer Semikonjugation zu einem Bernoulli-Shift ist:

Definition 4.2.2. Sei X metrischer Raum und $\phi : X \rightarrow X$ stetig. Falls es eine stetige und surjektive Abbildung $\tau : X \rightarrow \Sigma_k$ für ein $k \geq 2$ gibt, sodass $\tau \circ \phi = \sigma \circ \tau$ gilt, so ist ϕ semikonjugiert zum Shift auf k Symbolen und wir nennen ϕ chaotisch.

Ziel ist es, aus (\star) ein solches ϕ und ein passendes τ zu gewinnen.

Sei $r \in (0, \frac{1}{3}]$ und $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$, $k \geq 2$ eine Menge von nicht entarteten heteroklinen Lösungen, die in 0 beginnen und paarweise verschiedene Endpunkte $\hat{P}_i(\infty) =: b_i \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq i \leq k$ besitzen. Zu diesen Heteroklinen und r wählen wir $m \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ mit hinreichend großen und äquidistanten Abständen $m_{i+1} - m_i \equiv \delta$, sodass jede von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ erzeugte Kette $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Lösung von (\star) gemäß Korollar 4.1.4 impliziert, die

$$Q([m_{2i}, m_{2i+1}]) \subset \overline{B_r(P_i(\infty))}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Grob gesagt finden wir also zu jeder Abfolge von Richtungen $(b_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \{b_1, \dots, b_k\}$ eine Lösung, die diesen Richtungsvorgaben folgt. Dies präzisieren wir durch eine Semikonjugation zum Shift auf k Symbolen.

Bemerkung 4.2.3. Ist $x \in \overline{B_r(\mathbb{Z}^n)}$ so gibt es ein eindeutiges Element $Z(x) \in \mathbb{Z}^n \cap \overline{B_r(x)}$. Wir erhalten also eine stetige Abbildung $Z : \overline{B_r(\mathbb{Z}^n)} \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $x \mapsto Z(x)$. Für alle $x \in \overline{B_r(\mathbb{Z}^n)}$ und $\eta \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$Z(x + \eta) = Z(x) + \eta. \tag{4.1}$$

Beweis. Wohldefiniertheit und Stetigkeit von Z sind klar. Seien x, η wie oben. Dann gilt

$$Z(x + \eta) \in \overline{B_r(x + \eta)} \cap \mathbb{Z}^n = \overline{B_r(x)} \cap \mathbb{Z}^n + \eta.$$

Also ist $Z(x + \eta) - \eta = Z(x)$. □

Anschließend definieren wir $\Delta := 2\delta$,

$$\mathcal{Q} := \left\{ Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Lösung von } (\star) \mid Q(0) \in \overline{B_r(0)} \text{ und für alle } j \in \mathbb{Z} \text{ gilt} \right. \\ \left. Z(Q(j\Delta)) - Z(Q((j-1)\Delta)) \in \{b_1, \dots, b_k\} \right\}$$

sowie die Anfangswerte der Lösungen aus \mathcal{Q} durch

$$S := \left\{ \left(Q(0), \dot{Q}(0) \right) \mid Q \in \mathcal{Q} \right\}.$$

Auf S definiere die Abbildungen $\psi, \phi : S \rightarrow S$,

$$\psi \left(Q(0), \dot{Q}(0) \right) := \left(Q(\Delta), \dot{Q}(\Delta) \right) \quad \text{und} \quad \phi := (\psi_1 - Z \circ \psi_1, \psi_2),$$

d.h.

$$\phi \left(Q(0), \dot{Q}(0) \right) = \left(Q(\Delta) - Z(Q(\Delta)), \dot{Q}(\Delta) \right).$$

Die Abbildung ϕ ist wohldefiniert: Zum Einen bestimmen die Anfangswerte aus S die zugehörigen Lösungen in eindeutiger Weise. Und um zu sehen, dass das Bild von einem Punkt $x := ((Q(0), \dot{Q}(0)) \in S$ wieder in S liegt, setze $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P(t) = Q(t + \Delta) - Z(Q(\Delta))$. Dann ist $\phi(x) = (P(0), \dot{P}(0))$ und weiter gilt $P(0) = Q(\Delta) - Z(Q(\Delta)) \in \overline{B_r(0)}$ und, da $Q \in \mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned} Z(P(j\Delta)) - Z(P((j-1)\Delta)) &= Z(Q((j+1)\Delta) - Z(Q(\Delta))) - Z(Q(j\Delta) - Z(Q(\Delta))) \\ &\stackrel{(4.1)}{=} Z(Q((j+1)\Delta)) - Z(Q(j\Delta)) \in \{b_1, \dots, b_k\}. \end{aligned}$$

Außerdem ist P aufgrund der Periodizitätsbedingungen an V und A eine Lösung von (\star) . Damit ist $P \in \mathcal{Q}$ und $\phi(x) \in S$.

Bemerkung 4.2.4. ϕ ist ein Homöomorphismus und für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\phi^j \left(Q(0), \dot{Q}(0) \right) = \left(Q(j\Delta) - Z(Q(j\Delta)), \dot{Q}(j\Delta) \right). \quad (4.2)$$

(Für $j < 0$ ist $\phi^j = (\phi^{-1})^{|j|}$.)

Beweis. Da die Abbildung ψ nichts Anderes ist als die Zeit- Δ -Abbildung zum Anfangszeitpunkt 0 des nicht autonomen System (\star) , ist ϕ stetig. Unter Benutzung von (4.1) kann man nachrechnen, dass die Inverse von ϕ gegeben ist durch

$$\phi^{-1} \left(Q(0), \dot{Q}(0) \right) = \left(Q(-\Delta) - Z(Q(-\Delta)), \dot{Q}(-\Delta) \right).$$

Damit ist ϕ homöomorph auf S .

Aussage (4.2) lässt sich induktiv und unter Benutzung von (4.1) zeigen. \square

Nun benötigen wir noch ein stetiges und surjektives $\tau : S \rightarrow \Sigma_k$, sodass

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & S \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \Sigma_k & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_k \end{array}$$

kommutiert.

Sei $\text{pr}_1 : S \rightarrow \overline{B_r(0)}$ die Projektion auf die erste Komponente und $h : S \rightarrow \{b_1, \dots, b_k\}$ definiert durch $h := Z \circ \psi_1 \circ \text{pr}_1$. Dies ist wohldefiniert, da für $Q \in \mathcal{Q}$ gilt

$$h(Q(0), \dot{Q}(0)) = Z(Q(\Delta)) = Z(Q(\Delta)) - Z(Q(0)) \in \{b_1, \dots, b_k\}.$$

Proposition 4.2.5. Die Abbildung $\tau : S \rightarrow \Sigma_k$, $x \mapsto (\tau_j(x))_{j \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\tau_j(x) = i \quad \text{genau dann, wenn} \quad h(\phi^{j-1}(x)) = b_i$$

ist eine Semikonjugation zwischen ϕ und σ .

Beweis. Zur Stetigkeit:

Konvergiere x_i gegen x in S . Da die Abbildungen h, ϕ, ϕ^{-1} stetig sind und die Menge $\{b_1, \dots, b_k\}$ diskret ist, existiert zu jedem $j \in \mathbb{Z}$ ein Index $i_j \in \mathbb{N}$, ab welchem $h(\phi^{j-1}(x_i))$ konstant ist. D.h. für alle $i \geq i_j$ gilt $\tau_j(x_i) = \tau_j(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, |j| > j_0} 4^{-|j|} < \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $i \geq \max\{i_j \mid -j_0 \leq j \leq j_0\}$

$$d(\tau(x), \tau(x_i)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 4^{-|j|} \delta(\tau_j(x), \tau_j(x_i)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}, |j| > j_0} 4^{-|j|} \delta(\tau_j(x), \tau_j(x_i)) < \varepsilon.$$

Zur Konjugation:

Sei $x \in S$ und $j \in \mathbb{Z}$. Es gilt $\tau_j(\phi(x)) = i$ genau dann, wenn $b_i = h(\phi^{j-1}(\phi(x))) = h(\phi^j(x))$ gilt. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\tau_{j+1}(x) = i$ ist. Also $\tau_{j+1}(x) = \tau_j(\phi(x))$. D.h. wir erhalten

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma((\tau_j(x))_{j \in \mathbb{Z}}) = (\tau_{j+1}(x))_{j \in \mathbb{Z}} = (\tau_j(\phi(x)))_{j \in \mathbb{Z}} = (\tau \circ \phi)(x).$$

Fehlt also nur noch die *Surjektivität* von τ :

Sei $x \in \Sigma_k$. Wir wählen eine von $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$ erzeugte heterokline Kette $(P_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ derart, dass für alle $j \in \mathbb{Z}$

$$P_j = \hat{P}_{x_j} + \eta_j \tag{4.3}$$

gilt. Die Punkte $\eta_j \in \mathbb{Z}^n$ sind dadurch bestimmt, dass $(P_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine heterokline Kette mit $P_0(\infty) = 0$ sein soll. Nach Korollar 4.1.4 existiert zu dieser Kette ein Lösung Q von (\star) , die $Q([m_{2j}, m_{2j+1}]) \subset \overline{B_r(P_j(\infty))}$ erfüllt. Insbesondere gilt

$$Q(m_{2j}) = Q(2j\delta) = Q(j\Delta) \in \overline{B_r(P_j(\infty))}.$$

Es folgt $Q(0) \in \overline{B_r(0)}$ und

$$\begin{aligned} Z(Q(j\Delta)) - Z(Q((j-1)\Delta)) &= P_j(\infty) - P_{j-1}(\infty) = P_j(\infty) - P_j(-\infty) \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \hat{P}_{x_j}(\infty) - \eta_j - \left(\hat{P}_{x_j}(-\infty) - \eta_j \right) \\ &= b_{x_j}. \end{aligned}$$

Also ist $Q \in \mathcal{Q}$. Bleibt $\tau(Q(0), \dot{Q}(0)) = x$ zu zeigen. Betrachte also für $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} h\left(\phi^{j-1}\left(Q(0), \dot{Q}(0)\right)\right) &\stackrel{(4.2)}{=} (Z \circ \psi_1)[Q((j-1)\Delta) - Z(Q((j-1)\Delta))] \\ &= Z[Q(j\Delta) - Z(Q((j-1)\Delta))] \\ &\stackrel{(4.1)}{=} Z(Q(j\Delta)) - Z(Q((j-1)\Delta)) \\ &= b_{x_j}. \end{aligned}$$

Damit gilt $\tau_j(Q(0), \dot{Q}(0)) = x_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. □

Aufgrund der Periodizitätsbedingungen (V1) – (T3) können wir das ganze System (\star) auch auf dem Torus $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ betrachten. Wir schreiben $(\star_{\mathbb{T}^n})$ für das entsprechende System auf dem Torus.

Für $T > 0$ sei Ψ_T die Zeit- T -Abbildung mit Anfangszeitpunkt 0 zu $(\star_{\mathbb{T}^n})$ und ψ_T die Zeit- T -Abbildung mit Anfangszeitpunkt 0 zu (\star) . Dann ist $(\Psi_T)_2 = (\psi_T)_2$ und mit der Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ gilt für alle $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \pi^{-1}(\{x\})$

$$(\Psi_T)_1(x) = (\pi \circ (\psi_T)_1)(y).$$

Setze weiter $\hat{\pi} : \overline{B_r(0)} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi(\overline{B_r(0)}) \times \mathbb{R}^n$, $(q, p) \mapsto (\pi(q), p)$ und $U := \hat{\pi}(S)$. Die Abbildung $\hat{\pi}$ ist ein Homöomorphismus und wir erhalten

$$\Psi_{\Delta|_U} = \hat{\pi} \circ \phi \circ \hat{\pi}^{-1}.$$

Insgesamt kommutiert also das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Psi_{\Delta|_U}} & U \\ \hat{\pi}^{-1} \downarrow & & \downarrow \hat{\pi}^{-1} \\ S & \xrightarrow{\phi} & S \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \Sigma_k & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_k \end{array}$$

Damit haben wir folgenden Satz gezeigt:

Satz 4.2.6. *Seien (V1) – (T3) erfüllt. Es gebe eine Menge von nicht entarteten heteroklinen Lösungen $(\hat{P}_i)_{i=1}^k$, $k \geq 2$ von (\star) , die in 0 beginnen und paarweise verschiedene Endpunkte $\hat{P}_i(\infty) \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq i \leq k$ besitzen. Dann gibt es für alle hinreichend großen $\Delta \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $U \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, sodass $\Psi_{\Delta|_U}$ chaotisch im Sinne einer Shift-Semikonjugation auf k Symbolen ist.*

Anhang A

Topologie

Hier sind einige bekannte Aussagen aus der Topologie, vor allem über Zusammenhang, aufgelistet.

Definition A.1. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *zusammenhängend*, falls für alle $A, B \in \mathcal{T}$ mit $X = A \dot{\cup} B$ folgt $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Eine Teilmenge $\tilde{X} \subset X$ heißt *zusammenhängend*, falls \tilde{X} mit der von X induzierten Topologie ein zusammenhängender topologischer Raum ist.

Für $x \in X$ heißt

$$C_x(X) := \bigcup \{ A \subset X \mid x \in A, A \text{ zusammenhängend} \}$$

die Zusammenhangskomponente von x in X .

Lemma A.2. Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt

- (i) $C_x(X)$ ist die größte zusammenhängende Teilmenge von X , die x enthält.
- (ii) Ist eine Teilmenge $A \subset X$ zusammenhängend, so sind auch $f(A) \subset Y$ und $\overline{A} \subset X$ zusammenhängend.
- (iii) Die Komponente $C_x(X)$ ist immer abgeschlossen.
- (iv) Die Zusammenhangskomponenten $\{ C_x(X) \mid x \in X \}$ bilden eine Partition von X .

Beweis. Siehe [7], Abschnitt 5. □

Das nächste Lemma ist als „Corollary 4“ in [8] zu finden.

Lemma A.3 (Whyburn). Sei X kompakter Hausdorff-Raum und $U, V \subset X$ abgeschlossen. Gibt es keine Zerlegung $X = U_0 \dot{\cup} V_0$ in zwei disjunkte, offene Teilmengen U_0, V_0 , welche $U \subset U_0$ und $V \subset V_0$ erfüllt, so existiert $W \subset X$ zusammenhängend mit $U \cap W \neq \emptyset$ und $V \cap W \neq \emptyset$.

Außerdem darf folgende nützliche Aussage (z.B. aus [7]) nicht fehlen:

Lemma A.4. Jede stetige und bijektive Abbildung von einem kompakten topologischen Raum in einen Hausdorff-Raum ist ein Homöomorphismus.

Anhang B

Konstantenübersicht

Konstante	siehe	Verwendung
\tilde{a}	1.2.4	$\tilde{a}^{-1} x ^2 \leq x^T A(t, y)x \leq \tilde{a} x ^2$
\tilde{b}	1.2.5	$\sup \ B(t, y)\ _{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \sup \ (B(t, y))^{-1}\ _{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}, \dots \leq \tilde{b}.$
α_ε	1.4.3	$\alpha_\varepsilon := \min_{(t, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n))} -V(t, y)$
β_ε	1.4.3	$I(q) \geq I_{r,s}(q) \geq \beta_\varepsilon q(s) - q(r) $, falls $q([r, s]) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbb{Z}^n)$
γ	1.4.4	$I_{ \Gamma(a,b)} \geq \gamma$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}^n$ mit $a \neq b$
κ, κ_r	(1.10)	$\kappa := \kappa_1, \quad I_{r,s}(\xi \dashrightarrow \eta) \leq \kappa_{ s-r } \varepsilon^2$

Literaturverzeichnis

- [1] Paul H. Rabinowitz: Periodic and heteroclinic orbits for a periodic hamiltonian system. Annales de l'I.H.P. (C) Analyse non linéaire, 6 no. 5 (1989), pp 331-346
- [2] Paul H. Rabinowitz: On a Theorem of Strobel. Calc. Var. 12, (2001), pp 399-415
- [3] Kevin H. Strobel: Multibump Solutions for a Class of Periodic Hamiltonian Systems. University of Wisconsin Thesis, (1994)
- [4] Haim Brezis: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, LLC (2011)
- [5] Hans W. Alt: Lineare Funktionalanalysis. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2012)
- [6] Jean Mawhin, Michel Willem: Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag New York, (1989)
- [7] James Dugundji: Topology. Allyn and Bacon Inc., (1966)
- [8] J.C. Alexander: A primer on connectivity. Fixed Point Theory, Lecture Notes in Mathematics Volume 886, (1981), pp 455-483
- [9] Herbert Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Walter de Gruyter Berlin - New York, (1989)
- [10] Wolfgang Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos. B.G. Teubner Stuttgart-Leipzig, (1998)
- [11] Clark Robinson: Dynamical Systems. Taylor & Francis Group LLC, (1999)
- [12] Walter Greiner: Theoretische Physik Band 2. Verlag Harri Deutsch - Thun und Frankfurt am Main (1982)

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorgelegte Thesis selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt zu haben, die ich in der Thesis angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Thesis erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze gute wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten. Gemäß § 25 Abs. 6 der Allgemeinen Bestimmungen für modularisierte Studiengänge dulde ich eine Überprüfung der Thesis mittels Anti-Plagiatssoftware.

Gießen, den 11. September 2014