

Bachelorarbeit

Topologische Horseshoes, Fixpunktindex und Chaos

Björn Gebhard

Matrikelnummer 2002677

4. Oktober 2012

Justus Liebig Universität Giessen

Mathematisches Institut

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Lani-Wayda

Inhaltsverzeichnis

0.1	Einleitung	3
0.2	Notation	3
1	Fixpunktindex im \mathbb{R}^n	4
1.1	Abbildungsgrad von BROUWER	4
1.2	Fixpunktindex	4
2	Fixpunktindex für Iterationen	7
2.1	Hauptaussage	7
2.2	Hilfsaussagen	7
2.3	Beweis von Satz 2.1.2	11
3	Topologische Horseshoes	14
3.1	U- und G-Horseshoe	14
3.2	Vereinfachende Bedingungen	15
3.3	Eigenschaften	17
4	Chaos	20
4.1	Bernoulli-Shift	20
4.2	Semikonjugation von Shift u. Horseshoe	22
5	Anwendung	25
5.1	Allgemein	25
5.2	Bouncing-Ball-Map	25

0.1 Einleitung

Um dynamische Systeme, die sich numerisch scheinbar rein zufällig und vollkommen unvorhersehbar verhalten, besser zu verstehen, versucht man in ihnen Eigenschaften, die man dem Begriff „Chaos“ unterordnet, strikt nachzuweisen. Piotr Zgliczyński stellt dafür in seiner Arbeit *Fixed point index for iterations of maps, topological horseshoe and chaos* relativ einfache geometrische Bedingungen für zweidimensionale Abbildungen auf, die ohne Ansprüche an Ableitungen auskommen. Die Grundidee dabei ist, eine kompliziertere Abbildung mittels geeigneter Homotopien auf eine einfache Modellabbildung zurückzuführen, die leichter zu untersuchen ist bzw. bei der „chaotisches“ Verhalten bekannt ist. Unter bestimmten Voraussetzungen kann man die Homotopieinvarianz des Fixpunktindex ausnutzen und Eigenschaften von der einen auf die andere Abbildung übertragen.

In dieser Bachelorarbeit wird zunächst der Fixpunktindex mit den nötigen Eigenschaften eingeführt, um dann in Kapitel 2 einen Kernsatz Zgliczyński's zu zeigen. Dieser besagt, dass zwei durch eine passende Homotopie verbundene Abbildungen „ähnliche“ periodische Orbits besitzen.

In Kapitel 3 werden als Modellabbildungen affin lineare „Horseshoes“ betrachtet, die eine Vielzahl periodischer Orbits besitzen. Abbildungen, die auf diese zurückgeführt werden können, werden als topologische Horseshoes definiert.

Kapitel 4 behandelt verschiedene Aspekte von chaotischer Dynamik und erläutert, inwiefern topologische Horseshoes chaotisch sind.

Zum Abschluss wird mit Zgliczyński's Sätzen ein topologischer Horseshoe in der „Bouncing-Ball-Map“ nachgewiesen.

0.2 Notation

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei die euklidische Metrik.

Für $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ ist $\text{dist}(x, U) = \inf \{d(x, y) : y \in U\}$,
 $\text{dist}(U, V) = \inf \{d(x, y) : x \in U, y \in V\}$, $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \varepsilon\}$ und
 $B_\varepsilon(U) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(y, U) < \varepsilon\}$.

Für Homotopien $H : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall, H stetig) schreibe H_t statt $H(t, \cdot)$. Weiter bezeichne $\overset{\circ}{U}$ das Innere, \overline{U} den Abschluss und ∂U den Rand von U .

1 Fixpunktindex im \mathbb{R}^n

1.1 Abbildungsgrad von Brouwer

1.1.1 Satz/Definition

Sei $W := \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und beschränkt, } f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig, } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}$.

Es gibt genau eine Abbildung $\deg : W \rightarrow \mathbb{Z}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (D1) $\deg(\text{id}, \Omega, y) = 1$ für $y \in \Omega$
 (D2) $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y)$, falls $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ offen, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ und $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$
 (D3) $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $\forall t \in [0, 1] : y(t) \notin H_t(\partial\Omega) \Rightarrow \forall t_1, t_2 \in [0, 1] : \deg(H_{t_1}, \Omega, y(t_1)) = \deg(H_{t_2}, \Omega, y(t_2))$.

Die Zahl $\deg(f, \Omega, y)$ heißt *Abbildungsgrad* von f auf Ω bezüglich y .

Existenz und Eindeutigkeit von \deg wird in [1] gezeigt. Ebenfalls dort befindet sich der Beweis zu folgender Aussage:

1.1.2 Bemerkung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $S_f := \{x \in \Omega : \det(J_f(x)) = 0\}$ und $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f)$.

Dann lässt sich der Abbildungsgrad über

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(\det(J_f(x)))$$

berechnen.

1.2 Fixpunktindex

Im Folgenden Teil sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $\text{Fix}(f) := \{x \in \Omega : f(x) = x\}$ die Menge der Fixpunkte von f .

1.2.1 Definition

Für $\text{Fix}(f) \cap \partial\Omega = \emptyset$ ist der *Fixpunktindex* von f bezüglich Ω definiert durch

$$\text{Ind}(f, \Omega) := \deg(\text{id} - f, \Omega, 0).$$

Anmerkungen:

1. Wegen $\text{Fix}(f) \cap \partial\Omega = \emptyset \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{R}^n \setminus (\text{id} - f)(\partial\Omega)$ ist der Fixpunktindex wohldefiniert.
2. Für Ω kompakt, f wie oben setze $\text{Ind}(f, \Omega) = \text{Ind}(f, \mathring{\Omega})$.
3. Ist $\Omega' \subset \Omega$, f wie oben und $\text{Fix}(f) \cap \partial\Omega' = \emptyset$, so ist mit $\text{Ind}(f, \Omega')$ $\text{Ind}(f|_{\Omega'}, \Omega')$ gemeint.

1.2.2 Lemma

Der Fixpunktindex besitzt folgende Eigenschaften:

- (I1) $\text{Ind}(f, \Omega) \neq 0 \Rightarrow \text{Fix}(f) \neq \emptyset$
- (I2) Gibt es $\Omega' \subset \Omega$ offen mit $\text{Fix}(f) \subset \Omega'$, so gilt: $\text{Ind}(f, \Omega') = \text{Ind}(f, \Omega)$. (Ausschneidungseigenschaft)
- (I3) Ist $H : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und gilt für alle $t \in [0, 1]$ $\text{Fix}(H_t) \cap \partial\Omega = \emptyset$, so sind für beliebige $t_1, t_2 \in [0, 1]$ die Indices $\text{Ind}(H_{t_1}, \Omega)$ und $\text{Ind}(H_{t_2}, \Omega)$ gleich. (Homotopieinvarianz)

Beweis. Zunächst ist $\text{Fix}(f) \cap \partial\Omega = \emptyset \Leftrightarrow 0 \notin (\text{id} - f)(\partial\Omega) = (\text{id} - f)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega \cup \emptyset))$.

Mit (D2) folgt:

$$\begin{aligned} \text{Ind}(f, \Omega) &= \deg(\text{id} - f, \Omega, 0) \stackrel{(D2)}{=} \deg(\text{id} - f, \Omega, 0) + \deg(\text{id} - f, \emptyset, 0) \\ &= \text{Ind}(f, \Omega) + \text{Ind}(f, \emptyset). \end{aligned}$$

Also $\text{Ind}(f, \emptyset) = 0$.

Zu (I1):

Sei $\text{Fix}(f) = \emptyset$. D.h., $0 \notin (\text{id} - f)(\bar{\Omega})$. Aus (D2) mit $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$ ergibt sich:

$$\text{Ind}(f, \Omega) = \text{Ind}(f, \emptyset) + \text{Ind}(f, \emptyset) = 0.$$

Zu (I2):

Sei $\Omega' \subset \Omega$ offen und $\text{Fix}(f) \subset \Omega'$. Das bedeutet, $0 \notin (\text{id} - f)(\bar{\Omega} \setminus \Omega')$, insbesondere also auch $0 \notin (\text{id} - f)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega' \cup \Omega \setminus \Omega'))$ und $\text{Fix}(f|_{(\Omega \setminus \Omega')}) = \emptyset$, mit (D2) und (I1) folgt:

$$\text{Ind}(f, \Omega) \stackrel{(D2)}{=} \text{Ind}(f, \Omega') + \underbrace{\text{Ind}(f, \Omega \setminus \Omega')}_{=0, (I1)} = \text{Ind}(f, \Omega').$$

Zu (I3):

Sei $H : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und für alle $t \in [0, 1]$ gelte $\text{Fix}(H_t) \cap \partial\Omega = \emptyset$. D.h., $\forall t \in [0, 1]$ ist $0 \notin (\text{id} - H_t)(\partial\Omega)$.

Mit $\tilde{H} : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{H}_t(x) := x - H_t(x)$ und $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y \equiv 0$ ergibt sich aus (D3) für $t_1, t_2 \in [0, 1]$:

$$\text{Ind}(H_{t_1}, \Omega) = \deg(\tilde{H}_{t_1}, \Omega, y(t_1)) \stackrel{(D3)}{=} \deg(\tilde{H}_{t_2}, \Omega, y(t_2)) = \text{Ind}(H_{t_2}, \Omega).$$

□

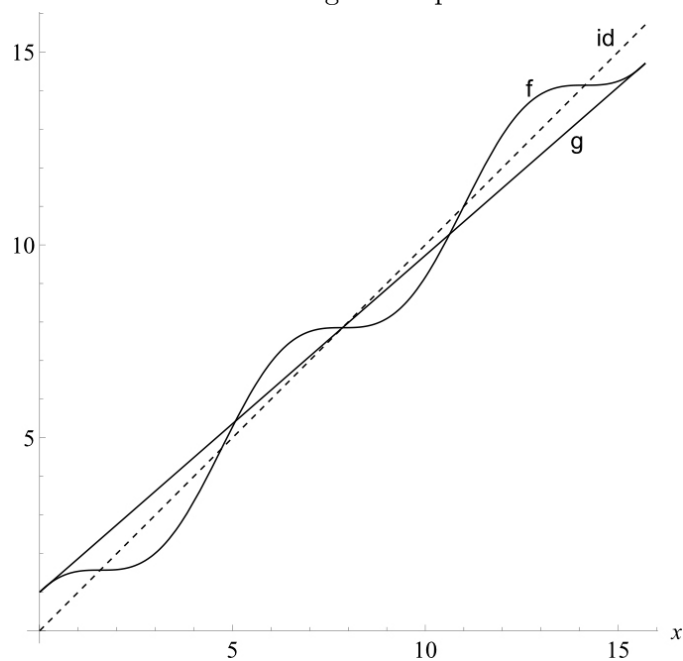
1.2.3 Beispiel

Betrachte $f : [0, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \cos(x) + x$ und $g : [0, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \left(1 - \frac{2}{5\pi}\right)x + 1$. g besitzt in $\Omega := (0, 5\pi)$ einen Fixpunkt $x_0 = \frac{5\pi}{2}$. Der zugehörige Index ist $\text{Ind}(g, \Omega) = \text{sgn}((\text{id} - g)'(x_0)) = 1$.

Mittels linearer Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $H_t(x) := tf(x) + (1-t)g(x)$ können g und f ineinander so überführt werden, dass am Rand von Ω keine Fixpunkte von H_t auftreten:

Für $t \in [0, 1]$ ist $H_t(0) = t + 1 - t = 1 \neq 0$ und $H_t(5\pi) = t(-1 + 5\pi) + (1-t)(5\pi - 1) = 5\pi - 1 \neq 5\pi$. Also $\text{Fix}(H_t) \cap \partial\Omega = \emptyset$. Mit (I3) ist also auch $\text{Ind}(f, \Omega) = 1$. f besitzt also nach (I1) in $(0, 5\pi)$ einen Fixpunkt bzw. \cos eine Nullstelle, was keine Überraschung ist. Allerdings sieht man, dass die Anzahl der Fixpunkte unter Homotopien nicht invariant ist: $\text{Fix}(g) = \left\{\frac{5\pi}{2}\right\} \neq \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{9\pi}{2}\right\} = \text{Fix}(f)$.

Abbildung 1: Beispiel



2 Fixpunktindex für Iterationen

2.1 Hauptaussage

2.1.1 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $s \in \mathbb{N}_0$, $A_0, \dots, A_s \subset M$ paarweise disjunkt und $A = \bigcup_{j=0}^s A_j$.

1. Die in A unter f *invariante Menge* ist definiert als $\text{Inv}(A, f) := \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} (f|_A)^i(A)$.
2. A heißt *isolierende Umgebung* von f , falls A kompakt ist und $\text{Inv}(A, f) \subset \overset{\circ}{A}$.
3. Für $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \{0, \dots, s\}^{m+1}$ setze

$$\begin{aligned} A_\alpha^f &:= A_{\alpha_0} \cap f^{-1}(A_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f^{-m}(A_{\alpha_m}) \\ &= \left\{ x \in A_{\alpha_0} : f^j(x) \in A_{\alpha_j}, j = 1, \dots, m \right\}. \end{aligned}$$

4. Eine Homotopie $H : [0, 1] \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *durch A isoliert*, falls A für alle $t \in [0, 1]$ eine isolierende Umgebung von H_t ist. D.h., A ist kompakt und für alle $t \in [0, 1]$ ist $\text{Inv}(A, H_t) \subset \overset{\circ}{A}$.

Ziel dieses Abschnittes ist es, folgenden Satz zu beweisen:

2.1.2 Satz (Invarianz des Fixpunktindex für Iterationen)

Sei $s \in \mathbb{N}_0$, für $i = 0, \dots, s$ seien $N_i \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, paarweise disjunkt mit $\overline{N_i} = N_i$ und $N := \bigcup_{i=0}^s N_i$. Gibt es zu $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig eine Homotopie $H : [0, 1] \times N \rightarrow \mathbb{R}^n$, die durch N isoliert wird und f mit g verbindet (d.h. $H_0 = f$, $H_1 = g$), so sind für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \{0, \dots, s\}^{m+1}$ die Fixpunktindices $\text{Ind}(f^{m+1}, N_\alpha^f)$ und $\text{Ind}(g^{m+1}, N_\alpha^g)$ definiert und gleich.

2.2 Hilfsaussagen

Als Vorbereitung zunächst einige kleinere Aussagen bzgl. der Topologie des \mathbb{R}^n :

2.2.1 Lemma

Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $\overline{A \setminus B} \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{B}$
2. A abgeschlossen $\Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset A$
3. A offen $\Rightarrow A \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{(A \cap B)}$

Beweis. Zu 1.

Sei $x \in \overline{A \setminus B}$. Dann ex. eine Folge $(x_n) \subset A \setminus B$ mit $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in A$, somit $x \in \overline{A}$. Außerdem ist $x_n \notin B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $x \notin \overset{\circ}{B}$, sonst ex. (da $\overset{\circ}{B}$ offen) ein $\varepsilon > 0$ mit $x_n \notin B_\varepsilon(x) \subset B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Konvergenz.

Zu 2.

Sei A abgeschlossen und $x \in \overline{\overset{\circ}{A}} \Rightarrow \exists (x_n) \subset \overset{\circ}{A} \subset A: x_n \rightarrow x$. Da A abgeschlossen, folgt $x \in A$.

Zu 3.

Sei A offen. $\overline{\overset{\circ}{A}}$ ist die größte offene Menge, die noch in \overline{A} enthalten ist. Da A offen ist und $A \subset \overline{A}$, ist $A \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$.

Zu 4.

" \subset " Sei $x \in \overline{A \cup B}$. Dann ist $x \in \overline{A}$ oder $x \in \overline{B}$. Es gibt also eine Folge $(x_n) \subset A \cup B$, die gegen x konvergiert.

" \supset " $\overline{A \cup B}$ ist abgeschlossen und umfasst $A \cup B$. $\overline{\overline{A \cup B}}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $A \cup B$ enthält. Also $\overline{\overline{A \cup B}} \subset \overline{A \cup B}$.

Zu 5.

" \subset " gilt, da $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ als Schnitt zweier offener Mengen offen ist und außerdem enthalten ist in $A \cap B$.

" \supset " Sei $x \in (A \cap B)^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset A \cap B$. Damit $B_\varepsilon(x) \subset A$ und $B_\varepsilon(x) \subset B$. Also $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. \square

Um Satz 2.1.2 mithilfe der Homotopieinvarianz (I3) zeigen zu können, benötigt man $\text{Fix}(H_t^{m+1}) \cap \partial N_\alpha^{H_t} = \emptyset$ für alle $t \in [0, 1]$. Deswegen wird im nächsten Lemma der Rand von N , welcher nach Voraussetzung disjunkt zu $\text{Inv}(N, H_t)$ ist, „ausgedehnt“:

2.2.2 Lemma

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $N \subset M$ kompakt mit $\overline{\overset{\circ}{N}} = N$, $H: [0, 1] \times M \rightarrow M$ eine durch N isolierte Homotopie.

Dann gibt es $D \subset M$ offen mit $\overline{D} \subset \overset{\circ}{N}$ und $\text{Inv}(N, H_t) \subset D$ für alle $t \in [0, 1]$.

Beweis. In 3 Schritten:

Behauptung 2.1. Es gibt $W \subset M \times [0, 1]$ offen mit $\partial N \times [0, 1] \subset W$ und so, dass gilt $\forall (x, t) \in W$ gilt $x \notin \text{Inv}(N, H_t)$.

Beweis. Sei $x \in \partial N$ und $t \in [0, 1]$. Da H durch N isoliert wird, ist $\text{Inv}(N, H_t) \subset \overset{\circ}{N}$, also $x \notin \text{Inv}(N, H_t) = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} (H_t|_N)^k(N)$. Es gibt also $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $x \notin (H_t|_N)^k(N)$ bzw. $k \in \mathbb{N}$ mit $x \notin H_t^k(N)$ oder $H_t^k(x) \notin N$.

Behauptung. Es existieren $\delta, \varepsilon > 0$, so dass

$$\forall (x', t') \in \underbrace{B_\varepsilon(x) \cap M \times (t - \delta, t + \delta) \cap [0, 1]}_{=: B_{(\varepsilon, \delta)}^*(x, t)} : x' \notin H_{t'}^k(N) \text{ oder } H_{t'}^k(x') \notin N.$$

Beweis. Fall (i): $x \notin H_t^k(N)$

Da N kompakt und H_t stetig ist, also auch H_t^k , ist $H_t^k(N)$ kompakt. $\{x\}$ ist abgeschlossen und somit $\text{dist}(x, H_t^k(N)) =: d_0 > 0$. Die Abbildung $\tilde{d} : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{d}(x', t') := \text{dist}(x', H_{t'}^k(N))$ ist mit nachfolgendem Lemma 2.2.3 stetig. Es gibt also zu $\frac{d_0}{2} > 0$ Zahlen $\varepsilon, \delta > 0$, so dass für alle $(x', t') \in B_{(\varepsilon, \delta)}^*(x, t)$ gilt: $\tilde{d}(x', t') > \frac{d_0}{2} > 0$.

Das heißt, für diese (x', t') ist $\text{dist}(x', H_{t'}^k(N)) > 0$, also $x' \notin H_{t'}^k(N)$.

Fall (ii): $H_t^k(x) \notin N$

Aus N kompakt folgt $d_0 := \text{dist}(H_t^k(x), N) > 0$. Wegen der Stetigkeit von H gibt es zu $\frac{d_0}{2} > 0$ Zahlen $\varepsilon, \delta > 0$, so dass für alle Paare $(x', t') \in B_{(\varepsilon, \delta)}^*(x, t)$ gilt $d(H_t^k(x), H_{t'}^k(x')) < \frac{d_0}{2}$. Also ist für $(x', t') \in B_{(\varepsilon, \delta)}^*(x, t)$:

$$\text{dist}(H_{t'}^k(x'), N) \geq \text{dist}(H_t^k(x), N) - d(H_t^k(x), H_{t'}^k(x')) > d_0 - \frac{d_0}{2} = \frac{d_0}{2} > 0.$$

Somit ist $H_{t'}^k(x') \notin N$ für $(x', t') \in B_{(\varepsilon, \delta)}^*(x, t)$. Das bedeutet, für solche Paare (x', t') ist $x' \notin H_{t'}^{-k}(N) \supset (H_{t'|N})^{-k}(N)$. \square

Es gibt also zu einem beliebigem Paar $(x, t) \in \partial N \times [0, 1]$ passende $\varepsilon_{x,t} > 0$ und $\delta_{x,t} > 0$ mit

$$\forall (x', t') \in \underbrace{B_{(\varepsilon_{x,t}, \delta_{x,t})}^*(x, t)}_{=: U_{x,t}} : x' \notin \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (H_{t'|N})^k(N) = \text{Inv}(N, H_t).$$

Setze

$$W := \bigcup_{(x,t) \in \partial N \times [0,1]} U_{x,t}.$$

W ist als Vereinigung in $M \times [0, 1]$ offener Mengen in $M \times [0, 1]$ offen, enthält $\partial N \times [0, 1]$ und für alle $(x, t) \in W$ ist $x \notin \text{Inv}(N, H_t)$. \square

Behauptung 2.2. Es gibt $V \subset M$ offen mit $\partial N \subset V$ und $\bar{V} \times [0, 1] \subset W$.

Beweis. Sei $(x, t) \in \partial N \times [0, 1] \subset W$. Da W offen ist, existiert $\varepsilon_{x,t} > 0$ und ein in $[0, 1]$ offenes Intervall $T_{x,t}$ mit $t \in T_{x,t}$, so dass $\overline{B_{\varepsilon_{x,t}}(x) \times T_{x,t}} \subset W$. (Der Abschluss ist bezüglich der Teilraumtopologie von $M \subset \mathbb{R}^n$ zu sehen.) Da $\{x\} \times [0, 1]$ kompakt ist, gibt es $t_1, \dots, t_m \in [0, 1]$ mit $\{x\} \times [0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^m (B_{\varepsilon_{x,t_i}}(x) \times T_{x,t_i})$. Mit $\rho_x := \min \{\varepsilon_{x,t_i} : i \in \{1, \dots, m\}\}$ ist $\overline{B_{\rho_x}(x) \times [0, 1]} \subset W$.

Nun wird ∂N wiederum von $\{B_{\rho_x}(x) : x \in \partial N\}$ überdeckt, es gibt also auch hier eine endliche Teilüberdeckung $\{B_{\rho_{x_1}}(x_1), \dots, B_{\rho_{x_l}}(x_l) : x_i \in \partial N, i \in \{1, \dots, l\}\}$ von ∂N . Definiere

$$V := \left(\bigcup_{i=1}^l B_{\rho_{x_i}}(x_i) \right) \cap M.$$

Dann ist V offen in M , $\partial N \subset V$ und es gilt

$$\overline{V} \times [0, 1] = \overline{\bigcup_{i=1}^l B_{\rho_{x_i}}(x_i) \times [0, 1]} \stackrel{\substack{2.2.1 \\ \text{Teil 4}}}{=} \bigcup_{i=1}^l \underbrace{\left(\overline{B_{\rho_{x_i}}(x_i)} \times [0, 1] \right)}_{\subset W} \subset W,$$

da es sich um eine endliche Vereinigung handelt. \square

Behauptung 2.3. $D := \overset{\circ}{N} \setminus \overline{V}$ hat die gewünschten Eigenschaften.

Beweis. D ist offen in M , da $D = \overset{\circ}{N} \setminus \overline{V} = \overset{\circ}{N} \cap (M \setminus \overline{V})$ Schnitt zweier offener Mengen ist.

Weiter ist $\overline{D} \subset \overset{\circ}{N}$, denn:

$$\overline{D} = \overline{\overset{\circ}{N} \setminus \overline{V}} \stackrel{\substack{2.2.1 \\ \text{Teil 1}}}{\subset} \overline{\overset{\circ}{N} \setminus \overline{V}} \stackrel{\substack{2.2.1 \\ V \text{ offen, Teil 3} \\ N \text{ abg., Teil 2}}}{\subset} N \setminus V \stackrel{\substack{\subset \\ \partial N \subset V}}{\subset} N \setminus \partial N = \overset{\circ}{N}.$$

Und es gilt $\text{Inv}(N, H_t) \subset D \forall t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} t \in [0, 1], x \in \text{Inv}(N, H_t) \subset \overset{\circ}{N} &\Rightarrow (x, t) \notin W \supset \overline{V} \times [0, 1] \Rightarrow x \notin \overline{V} \\ &\Rightarrow x \in \overset{\circ}{N} \setminus \overline{V} = D. \end{aligned}$$

\square

\square

2.2.3 Lemma

Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $H : I \times N \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Dann ist $\tilde{d} : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{d}(x, t) := \text{dist}(x, H_t(N))$ stetig.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $t \in I$. Es gilt für alle $y \in H_t(N)$:

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{dist}(x_1, H_t(N)) &= \inf_{y \in H_t(N)} d(x_1, y) \leq \inf_{y \in H_t(N)} \{d(x_1, x_2) + d(x_2, y)\} \\ &= d(x_1, x_2) + \inf_{y \in H_t(N)} d(x_2, y) = d(x_1, x_2) + \text{dist}(x_2, H_t(N)). \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie der Metrik ist auch

$$\text{dist}(x_2, H_t(N)) \leq d(x_1, x_2) + \text{dist}(x_1, H_t(N)).$$

Insgesamt also $|\tilde{d}(x_1, t) - \tilde{d}(x_2, t)| \leq d(x_1, x_2)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$. Da H auf den kompakten Mengen N und I gleichmäßig stetig ist, existiert $\tilde{\delta} > 0$, so dass $d(H_{t_0}(y), H_t(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t \in (t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}) \cap I$ und $y \in N$. Setze $\delta = \min\{\tilde{\delta}, \frac{\varepsilon}{2}\}$.

Für $(x, t) \in B_\delta(x_0) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap I$ und für beliebiges $y \in N$ gilt:

$$d(x, H_{t_0}(y)) \leq d(x, H_t(y)) + \underbrace{d(H_t(y), H_{t_0}(y))}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < d(x, H_t(y)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{dist}(x, H_{t_0}(N)) &= \inf_{y \in N} d(x, H_{t_0}(y)) \leq \inf_{y \in N} d(x, H_t(y)) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \text{dist}(x, H_t(N)) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Analog gilt auch

$$\text{dist}(x, H_t(N)) \leq \text{dist}(x, H_{t_0}(N)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also $|\tilde{d}(x, t_0) - \tilde{d}(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} |\tilde{d}(x_0, t_0) - \tilde{d}(x, t)| &\leq |\tilde{d}(x_0, t_0) - \tilde{d}(x, t_0)| + |\tilde{d}(x, t_0) - \tilde{d}(x, t)| \\ &\leq d(x, x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \delta + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

2.3 Beweis von Satz 2.1.2

Beweis. Seien also $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in Satz 2.1.2 und es gebe eine Homotopie $H : [0, 1] \times N \rightarrow \mathbb{R}^n$, die durch N isoliert wird und f mit g verbindet.

Z.Z. $\forall m \in \mathbb{N} \forall \alpha \in \{0, \dots, s\}^{m+1}: \text{Ind}(f^{m+1}, N_\alpha^f) = \text{Ind}(g^{m+1}, N_\alpha^g)$

Zunächst wähle $L > 0$ so, dass $N \subset [-L, L]^n$ und $H([0, 1] \times N) \subset [-L, L]^n$. Nach Tietze (siehe [2]) kann man H stetig zu einer Abbildung $\tilde{H} : [0, 1] \times [-L, L]^n \rightarrow [-L, L]^n$ fortsetzen, um $H = \tilde{H}|_{[0, 1] \times N}$ iterieren zu können, ohne den Definitionsbereich zu verlassen. Im Folgenden ist mit H die Fortsetzung \tilde{H} gemeint.

Seien nun $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \{0, \dots, s\}^{m+1}$ fest.

Nach Lemma 2.2.2 existiert $C^\star \subset N$ offen mit $\overline{C^\star} \subset \overset{\circ}{N}$ und $\text{Inv}(N, H_t) \subset C^\star$ für alle $t \in [0, 1]$. $\overline{C^\star}$ ist wiederum kompakt und $\text{Inv}(N, H_t) \subset C^\star \underset{2.2.1, \text{Teil 3}}{\subset} \overset{\circ}{\overline{C^\star}}$. Nochmaliges

Anwenden des Lemmas liefert eine offene Menge $D \subset \overline{C^*}$ mit $\overline{D} \subset \overset{\circ}{\overline{C^*}}$ und $\text{Inv}(N, H_t) \subset D$ für alle $t \in [0, 1]$. Mit $C := \overset{\circ}{\overline{C^*}}$ gilt für alle $t \in [0, 1]$:

$$\overline{D} \subset C, \overline{C} = \overset{\circ}{\overline{C^*}} \underset{2.2.1, \text{Teil 2}}{\subset} \overline{C^*} \subset \overset{\circ}{N} \text{ und } \text{Inv}(N, H_t) \subset D.$$

Setze für $i \in \{0, \dots, s\}$ $C_i := C \cap N_i$ und $D_i := D \cap N_i$. Da $\partial D_i, \partial C_i$ und ∂N_i kompakte und paarweise disjunkte Mengen sind, ist $\text{dist}(\partial D_i, \partial C_i) > 0$ und $\text{dist}(\partial C_i, \partial N_i) > 0$ ($\forall i \in \{0, \dots, s\}$). Es gibt also ein $\delta_i > 0$, so dass $B_{\delta_i}(D_i) \subset C_i$ und $B_{\delta_i}(C_i) \subset \overset{\circ}{N}_i$. Setze $\delta = \min\{\delta_i | i \in \{0, \dots, s\}\}$.

Die Invarianz des Fixpunktindex wird jetzt zunächst lokal gezeigt.

Sei $t^* \in [0, 1]$ und $k \in \{0, \dots, m\}$. Da $[0, 1] \times [-L, L]^n$ kompakt ist, ist H^k gleichmäßig stetig. Es gibt also ein in $[0, 1]$ offenes Intervall T_k mit $t^* \in T_k$, so dass für alle $t_1, t_2 \in T_k$ und für alle $x \in [-L, L]^n$ gilt: $d(H_{t_1}^k(x), H_{t_2}^k(x)) < \delta$. Mit $T := \bigcap_{k=1}^m T_k$ folgt:

$$\forall t_1, t_2 \in T \forall x \in [-L, L]^n \forall k \in \{0, \dots, m\} : d(H_{t_1}^k(x), H_{t_2}^k(x)) < \delta.$$

Behauptung 2.4. $\forall t \in T : D_\alpha^{H_t} \subset C_\alpha^{H_{t^*}} \subset (N_\alpha^{H_t})^\circ$

Beweis. Sei $t \in T$ und $x \in D_\alpha^{H_t}$. Das bedeutet, für $k \in \{0, \dots, m\}$ ist $H_t^k(x) \in D_{\alpha_k}$. Wegen $B_\delta(D_{\alpha_k}) \subset C_{\alpha_k}$ und $d(H_t^k(x), H_{t^*}^k(x)) < \delta$ ist $H_{t^*}^k(x) \in C_{\alpha_k}$ ($\forall k \in \{0, \dots, m\}$). Also $x \in C_\alpha^{H_{t^*}}$.

Analog folgt wegen $B_\delta(C_i) \subset \overset{\circ}{N}_i$ für $i \in \{1, \dots, s\}$ auch

$$\begin{aligned} C_\alpha^{H_{t^*}} &\subset \overset{\circ}{N}_{\alpha_0} \cap H_t^{-1}(\overset{\circ}{N}_{\alpha_1}) \cap \dots \cap H_t^{-m}(\overset{\circ}{N}_{\alpha_m}) \\ &\subset \underset{H_t^{-1}(\overset{\circ}{N}_i) \text{ offen}}{\overset{\circ}{N}_{\alpha_0} \cap (H_t^{-1}(N_{\alpha_1}))^\circ \cap \dots \cap (H_t^{-m}(N_{\alpha_m}))^\circ} \\ &\underset{2.2.1, \text{Teil 5}}{=} (N_\alpha^{H_t})^\circ. \end{aligned}$$

□

Behauptung 2.5. $\forall t \in [0, 1] \forall x \in N_\alpha^{H_t} \setminus D_\alpha^{H_t} : H_t^{m+1}(x) \neq x$

Beweis. Angenommen für ein $t \in [0, 1]$ existiert ein $x \in N_\alpha^{H_t} \setminus D_\alpha^{H_t}$ mit $H_t^{m+1}(x) = x$. Dann ist der Orbit $O(x) = \{x, H_t(x), \dots, H_t^m(x)\}$ enthalten in $\text{Inv}(N, H_t)$. Aber für ein $k \in \{0, \dots, m\}$ ist $H_t^k(x) \in N_{\alpha_k} \setminus D_{\alpha_k}$. Also $H_t^k(x) \notin D$. Dies steht im Widerspruch zu $\text{Inv}(N, H_t) \subset D \forall t \in [0, 1]$. Es gibt also keine Fixpunkte von H_t^{m+1} in $N_\alpha^{H_t} \setminus D_\alpha^{H_t}$. □

Weiter folgt aus Behauptung 2.4, dass für beliebiges $t \in T$ die Mengen $\partial C_\alpha^{H_{t^*}}$ und $\partial N_\alpha^{H_t}$ enthalten sind in $N_\alpha^{H_t} \setminus D_\alpha^{H_t}$. Mit Behauptung 2.5 erhält man also $\text{Fix}(H_t^{m+1}) \cap \partial C_\alpha^{H_{t^*}} = \text{Fix}(H_t^{m+1}) \cap \partial N_\alpha^{H_t} = \emptyset$. Die Fixpunktindices $\text{Ind}(H_t^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}})$, $\text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}})$, $\text{Ind}(H_t^{m+1}, N_\alpha^{H_t})$ und $\text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, N_\alpha^{H_{t^*}})$ sind demnach wohldefiniert.

Wegen $\text{Fix}(H_t^{m+1}) \subset D_\alpha^{H_t} \subset C_\alpha^{H_{t^*}} \subset (N_\alpha^{H_t})^\circ$ liefert die Ausschneidungseigenschaft des Fixpunktindex (I2):

$$\text{Ind}(H_t^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}}) = \text{Ind}(H_t^{m+1}, N_\alpha^{H_t}) \quad \forall t \in T$$

und damit insbesondere auch

$$\text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}}) = \text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, N_\alpha^{H_{t^*}}).$$

Wähle nun ein abgeschlossenes Intervall $S \subset T$ (positiver Länge) mit $t^* \in S$. Dies geht, da T offen ist. S ist homöomorph zu $[0, 1]$ und $\text{Fix}(H_t^{m+1}) \cap \partial C_\alpha^{H_{t^*}} = \emptyset$ für alle $t \in S$. Mit der Homotopieinvarianz (I3) erhält man also:

$$\text{Ind}(H_t^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}}) = \text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}}) \quad \forall t \in S.$$

Also gilt insgesamt für alle $t \in S$:

$$\text{Ind}(H_t^{m+1}, N_\alpha^{H_t}) = \text{Ind}(H_t^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}}) = \text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, C_\alpha^{H_{t^*}}) = \text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, N_\alpha^{H_{t^*}}).$$

Die lokale Invarianz ist damit gezeigt.

Sei nun $t_i \in [0, 1]$ und S_i das wie oben konstruierte Intervall mit $t_i \in S_i$ und

$$\text{Ind}(H_t^{m+1}, N_\alpha^{H_t}) = \text{Ind}(H_{t_i}^{m+1}, N_\alpha^{H_{t_i}}) \quad \forall t \in S_i. \quad (\star)$$

Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ existieren $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ mit $\bigcup_{i=1}^k S_i = [0, 1]$. Ist $k = 1$, so ist man fertig. Ansonsten sei $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ ein Index mit $0 \in S_{i_0}$.

Behauptung. $\exists i_1 \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_0\}$ mit $S_{i_0} \cap S_{i_1} \neq \emptyset$

Beweis. S_{i_0} ist von der Form $[0, a]$ mit $a \in [0, 1)$. Ang. es gebe keinen solchen Index i_1 . Da die Intervalle S_i kompakt sind, wäre $0 < \varepsilon := \min\{\text{dist}(a, S_i) : i \neq i_0\} < 1 - a$. Damit wäre der Punkt $a + \frac{\varepsilon}{2}$ in $[0, 1]$, aber nicht in $\bigcup_{i=1}^k S_i$, Widerspruch. \square

Induktiv ergibt sich eine Anordnung (i_0, \dots, i_{k-1}) der Indices $\{1, \dots, k\}$, so dass gilt:

$$0 \in T_{i_0}, 1 \in S_{i_{k-1}} \text{ und } \forall j \in \{0, \dots, k-2\} : S_{i_j} \cap S_{i_{j+1}} \neq \emptyset.$$

Also gilt mit (\star) :

$$\forall t, t^* \in [0, 1] : \text{Ind}(H_t^{m+1}, N_\alpha^{H_t}) = \text{Ind}(H_{t^*}^{m+1}, N_\alpha^{H_{t^*}}).$$

Und somit auch

$$\text{Ind}(f^{m+1}, N_\alpha^f) = \text{Ind}(g^{m+1}, N_\alpha^g).$$

\square

Ist in der Situation von Satz 2.1.2 beispielsweise $s = 4$ und ist $\text{Ind}(f^4, N_{(4,2,3,0)}^f) \neq 0$, dann gibt es Punkte $x, y \in N_4$, für die gilt: $f(x) \in N_2$, $f^2(x) \in N_3$, $f^3(x) \in N_0$ und $f^4(x) = x$, sowie $g(y) \in N_2$, $g^2(y) \in N_3$, $g^3(y) \in N_0$ und $g^4(y) = y$. Die beiden Abbildungen besitzen also ähnliche periodische Orbits.

3 Topologische Horseshoes

Als mögliche Modellabbildungen, auf welche Abbildungen im \mathbb{R}^2 mittels Homotopien gemäß den Anforderungen von Satz 2.1.2 zurückgeführt werden, dienen die sogenannten Horseshoe Abbildungen.

3.1 U- und G-Horseshoe

Sei $N_0 := [-1, 1] \times [-1, -0.5]$, $N_1 := [-1, 1] \times [0.5, 1]$ und $N = N_0 \cup N_1$.

3.1.1 Definition

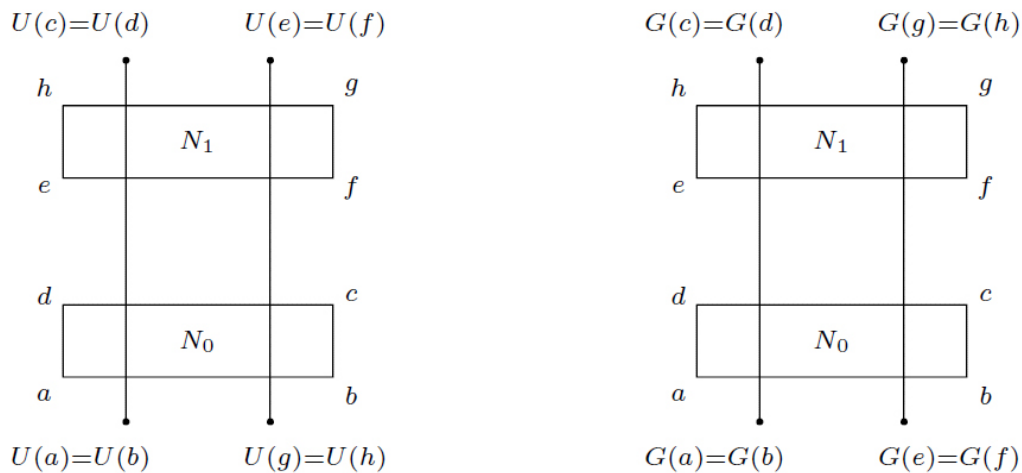
Die Abbildungen $U : N \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G : N \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$U(x) := \begin{cases} (-0.5, 5(x_2 + 0.75)), & \text{für } x \in N_0 \\ (0.5, -5(x_2 - 0.75)), & \text{für } x \in N_1 \end{cases}$$

$$G(x) := \begin{cases} (-0.5, 5(x_2 + 0.75)), & \text{für } x \in N_0 \\ (0.5, 5(x_2 - 0.75)), & \text{für } x \in N_1 \end{cases}$$

heißen U- bzw. G-Horseshoe.

Abbildung 2: U- und G-Horseshoe, Quelle: [4]



3.1.2 Satz/Bemerkung

$f \in \{U, G\}$ ist C^1 und es gilt:

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \{0, 1\}^{m+1} : \text{Ind}(f^{m+1}, N_\alpha^f) \in \{-1, 1\}.$$

Beweis. Sei $f \in \{U, G\}$ und $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \{0, 1\}^{m+1}$. Die Differenzierbarkeit ist klar, da f auf jeder Zusammenhangskomponente C^1 ist.

Es gilt $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x_2 = y_2$. Betrachte also zunächst die Projektion p von f auf die zweite Komponente, d.h., setze $P_0 := [-1, -0.5]$, $P_1 := [0.5, 1]$, $P := P_0 \cup P_1$ und $p : P \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) := (\pi_2 \circ f)(0, x)$, wobei $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_2$.

Da die Einschränkung von p auf $P_\alpha^p \cap p^{-(m+1)}(P_{\alpha_0})$ affin linear ist, insbesondere also invertierbar, ist $P_\alpha^p \cap p^{-(m+1)}(P_{\alpha_0})$ ein Intervall der Form $[a, b] \subset P_{\alpha_0}$. Dieses Intervall wird unter p^{m+1} stetig auf P_{α_0} abgebildet. Mit dem nachfolgenden Lemma 3.1.3 gibt es also einen Punkt $y^* \in P_\alpha^p \cap p^{-(m+1)}(P_{\alpha_0}) \subset P_\alpha^p$ mit $p^{m+1}(y^*) = y^*$. Da p^{m+1} affin linear ist, ist y^* eindeutig und im Inneren von P_α^p , denn: $p^{m+1}(\partial P_\alpha^p) = \partial p^{m+1}(P_\alpha^p) = \partial p(P_{\alpha_m}) = \pm 1.25 \notin P$.

Zurück zu f :

Setze jetzt

$$x^* = \begin{cases} (-0.5, y^*) & , \text{ für } \alpha_m = 0 \\ (0.5, y^*) & , \text{ für } \alpha_m = 1 \end{cases}$$

Dann ist $x^* \in (N_\alpha^f)^\circ$ der einzige Fixpunkt von f^{m+1} in N_α^f .

Weiter ist für $x \in N$:

$$\begin{aligned} J_{(\text{id}-f^{m+1})}(x) &= J_{\text{id}}(x) - J_{f^{m+1}}(x) = I_2 - J_f(f^m(x)) \cdot J_f(f^{m-1}(x)) \cdot \dots \cdot J_f(f(x)) \cdot J_f(x) \\ &= I_2 - A_m \cdot \dots \cdot A_0, \end{aligned}$$

wobei $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ für $f = G$ bzw. $A_i \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right\}$ für $f = U$. In jedem Fall ist $J_{(\text{id}-f^{m+1})}(x)$ regulär. Mit Bemerkung 1.1.2 ist also:

$$\text{Ind}(f^{m+1}, N_\alpha^f) = \text{sgn}(\det(J_{(\text{id}-f^{m+1})}(x^*))) \in \{-1, 1\}.$$

□

3.1.3 Lemma

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f([a, b]) \supset [a, b]$. Dann existiert $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Beweis. Wegen $f([a, b]) \supset [a, b]$ gibt es $x_a, x_b \in [a, b]$ mit $f(x_a) \leq a$ und $f(x_b) \geq b$. Die Abbildung $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ ist stetig und es gilt $g(x_a) = f(x_a) - x_a \leq 0$, sowie $g(x_b) = f(x_b) - x_b \geq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x_0 \in [x_a, x_b]$ (bzw. $[x_b, x_a]$) mit $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. □

3.2 Vereinfachende Bedingungen

Sei N wie oben. Im Folgenden stellt sich die Frage, wann eine stetige Abbildung $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit dem U- oder G-Horseshoe gemäß Satz 2.1.2 verbunden werden kann.

3.2.1 Definition

Sei $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ mit $a \leq b$, $c \leq d$ ein Rechteck. Definiere $V(P) := \{a\} \times [c, d] \cup \{b\} \times [c, d]$ als vertikalen und $W(P) := [a, b] \times \{c\} \cup [a, b] \times \{d\}$ als horizontalen Rand von P . Für Vereinigungen von Rechtecken $A = \bigcup_{i \in I} P_i$, $P_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ setze $V(A) := \bigcup_{i \in I} V(P_i)$ und $W(A) := \bigcup_{i \in I} W(P_i)$.

3.2.2 Bedingung

Erfüllt eine Abbildung $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Bedingungen

$$(B1) \quad f(W(N)) \cap N = \emptyset$$

$$(B2) \quad f(N) \cap V(N) = \emptyset$$

so ist N isolierende Umgebung von f .

Beweis. N ist kompakt.

Sei $x \in \text{Inv}(N, f)$. Dann ist x insbesondere enthalten in $f(N) \cap N \cap f^{-1}(N)$. Wegen $x \in f(N)$ folgt aus (B2) $x \notin V(N)$. Außerdem gilt:

$$x \in f^{-1}(N) \Rightarrow f(x) \in N \stackrel{(B1)}{\Rightarrow} f(x) \notin f(W(N)) \Rightarrow x \notin W(N).$$

Insgesamt gilt also $x \in N \setminus (V(N) \cup W(N)) = N \setminus \partial N = \overset{\circ}{N}$. Demnach ist $\text{Inv}(N, f) \subset \overset{\circ}{N}$ und damit N isolierende Umgebung von f . \square

3.2.3 Definition (topologischer Horseshoe)

1. Eine Homotopie $H : [0, 1] \times N \rightarrow \mathbb{R}^2$, die zwei Abbildungen $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ verbindet (d.h. $H_0 = g$, $H_1 = f$) heißt *zulässig* falls für jedes $t \in [0, 1]$ die Bedingungen (B1) und (B2) von H_t erfüllt werden.
2. Eine stetige Abbildung $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *topologischer Horseshoe*, falls es eine zulässige Homotopie H gibt, die f mit einer der Horseshoe-Abbildungen U oder G verbindet.

3.2.4 Kriterium

Sei $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig. Gibt es $\delta > 0$, so dass $f(N) \subset \{(x, y) : -1 + \delta < x < 1 - \delta\}$ und erfüllt f zusätzlich

$$(\star_G) \quad \begin{cases} f([-1, 1] \times \{-1\}) \subset \{(x, y) : y < -1\} \\ f([-1, 1] \times \{-0.5\}) \subset \{(x, y) : y > 1\} \\ f([-1, 1] \times \{0.5\}) \subset \{(x, y) : y < -1\} \\ f([-1, 1] \times \{1\}) \subset \{(x, y) : y > 1\} \end{cases}$$

oder

$$(\star_U) \begin{cases} f([-1, 1] \times \{-1\}) \subset \{(x, y) : y < -1\} \\ f([-1, 1] \times \{-0.5\}) \subset \{(x, y) : y > 1\} \\ f([-1, 1] \times \{0.5\}) \subset \{(x, y) : y > 1\} \\ f([-1, 1] \times \{1\}) \subset \{(x, y) : y > -1\} \end{cases}$$

so ist f ein topologischer Horseshoe.

Beweis. Erfüllt f die Bedingungen (\star_G) , so ist die lineare Homotopie $H : [0, 1] \times N \rightarrow \mathbb{R}^2$, $H_t(x) := (1 - t)f(x) + tG(x)$ zwischen f und G eine zulässige Homotopie:

Denn, es gilt

$$\begin{aligned} G([-1, 1] \times \{-1\}) &= -1.25 < -1, \\ G([-1, 1] \times \{-0.5\}) &= 1.25 > 1, \\ G([-1, 1] \times \{0.5\}) &= -1.25 < -1, \\ G([-1, 1] \times \{1\}) &= 1.25 > 1. \end{aligned}$$

Da f und G linear verbunden werden, gelten die Bedingungen (\star_G) auch für H_t mit beliebigem $t \in [0, 1]$. Es gilt also für alle $t \in [0, 1]$:

$$H_t(W(N)) = H_t([-1, 1] \times \{-1, -0.5, 0.5, 1\}) \subset \{(x, y) : y > 1 \vee y < -1\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus N.$$

Daraus folgt $H_t(W(N)) \cap N = \emptyset \forall t \in [0, 1]$, also Bedingung (B1).

Weiter ist $G(N) \subset \{(x, y) : x = -0.5 \vee x = 0.5\}$. Wieder aufgrund der Linearität der Homotopie gilt für alle $t \in [0, 1]$:

$$H_t(N) \subset \{(x, y) : \min\{-0.5, -1 + \delta\} \leq x \leq \max\{0.5, 1 - \delta\}\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus V(N).$$

Also $H_t(N) \cap V(N) = \emptyset \forall t \in [0, 1]$, Bedingung (B2).

Der Fall f erfüllt (\star_U) geht analog, nur dass f jetzt linear mit dem U-Horseshoe verbunden wird. \square

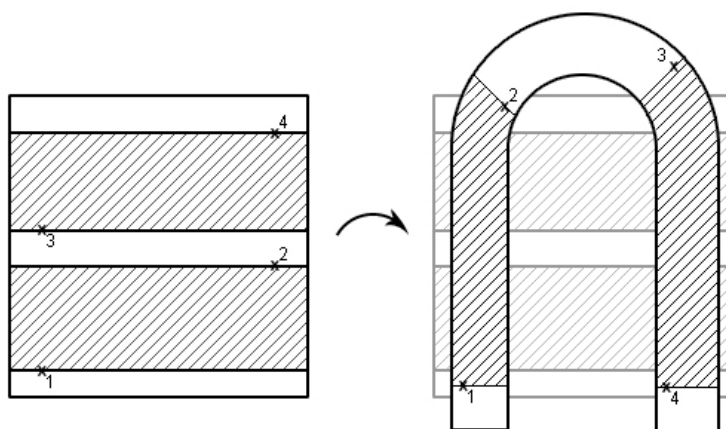
3.2.5 Bemerkung

Die Bedingungen 3.2.2 und 3.2.4 sind rein geometrische Bedingungen bzw. C^0 Bedingungen. Ein topologischer Horseshoe $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist also eine Abbildung, die in eine Richtung genügend (nicht unbedingt gleichmäßig) streckend wirkt, so dass die horizontalen Ränder von N jeweils unter- und oberhalb von N abgebildet werden, und in die andere Richtung genügend zusammenziehend, so dass das Bild von N nicht die vertikalen Ränder trifft. (Siehe Abbildung 3.)

3.3 Eigenschaften

Im nächsten Satz und dem darauffolgenden Abschnitt wird gezeigt, warum U und G als Modellabbildungen benutzt werden, m.a.W. welche Eigenschaften topologische Horseshoes haben.

Abbildung 3: Wirkung eines Horseshoes



3.3.1 Satz (periodische Orbits)

Sei $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein topologischer Horseshoe. Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ und zu jeder endlichen Folge $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \{0, 1\}^{m+1}$ Punkte $x, y \in N$ für die gilt:

$$\begin{aligned} f^i(x) &\in N_{\alpha_i} \text{ für } i \in \{0, \dots, m\} \text{ und } f^{m+1}(x) = x, \\ f^i(y) &\in N_{\alpha_i} \text{ für } i \in \{0, \dots, m\} \text{ und } f^{m+1}(y) \notin N. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \{0, 1\}^{m+1}$. Da f ein topologischer Horseshoe ist, gibt es eine zulässige Homotopie $H : [0, 1] \times N \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $H_0 = f$ und $H_1 \in \{U, G\}$. Für H_1 gilt nach 3.1.2, dass $\text{Ind}(H_1^{m+1}, N_\alpha^{H_1}) \in \{-1, 1\}$ ist. Da die Voraussetzungen von Satz 2.1.2 von einer zulässigen Homotopie erfüllt werden, ist also auch $\text{Ind}(f^{m+1}, N_\alpha^f) \in \{-1, 1\}$. Mit (I1) gibt es also ein $x \in N_\alpha^f$ mit $f^{m+1}(x) = x$. Das heißt, für $i \in \{0, \dots, m\}$ ist $f^i(x) \in N_{\alpha_i}$ und $f^{m+1}(x) = x$.

Zur Existenz von y :

Die eben gezeigte Aussage angewandt auf die Folgen $(\alpha_0, \dots, \alpha_1, 0)$ bzw. $(\alpha_0, \dots, \alpha_1, 1)$ liefert Punkte $x_0, x_1 \in N$ mit $x_0 \in N_\alpha^f$ und $f^{m+1}(x_0) \in N_0$ sowie $x_1 \in N_\alpha^f$ und $f^{m+1}(x_1) \in N_1$.

Betrachte nun die Strecke γ von x_0 nach x_1 , d.h. $\gamma : [0, 1] \rightarrow N_{\alpha_0}$, $\gamma(t) := (1-t)x_0 + tx_1$, und setze

$$\begin{aligned} A_0 &:= \left\{ t \in [0, 1] \mid \forall s \in [0, t] : \gamma(s) \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_0) \right\}, \\ A_1 &:= \left\{ t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_1) \right\} \end{aligned}$$

sowie $t_0 := \sup A_0$ und $t_1 := \inf A_1$.

Behauptung. $\gamma(t_j) \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_j)$ für $j \in \{0, 1\}$

Beweis. Wegen $t_0 = \sup A_0$ bzw. $t_1 = \inf A_1$ existieren Folgen $(t_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ in A_j mit $t_n^{(j)} \rightarrow t_j$ ($n \rightarrow \infty$). D.h. es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\gamma(t_n^{(j)}) \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_j)$. Da γ stetig ist und $N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_j) = N_{\alpha_0} \cap f^{-1}(N_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f^{-(m+1)}(N_j)$ als Schnitt abgeschlossener Mengen (N_{α_i} abgeschlossen und f^i stetig) abgeschlossen ist, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n^{(j)}) = \gamma(t_j) \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_j).$$

□

Es folgt $t_0 \neq t_1$ bzw. wegen $\gamma(0) = x_0 \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_0)$ und $\gamma(1) = x_1 \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_1)$, $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$.

Für $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ist also $f^i(\gamma(t_0)) \in N_{\alpha_i} \cap f(N_{\alpha_{i-1}}) \cap f^{-1}(N_{\alpha_{i+1}})$ bzw. für $i = m$ ist $f^m(\gamma(t_0)) \in N_{\alpha_m} \cap f(N_{\alpha_{m-1}}) \cap f^{-1}(N_0)$. Aus den Bedingungen (B1) und (B2), die ein topologischer Horseshoe erfüllt, folgt wie im Beweis von 3.2.2, dass $f^i(\gamma(t_0)) \in \overset{\circ}{N}_{\alpha_i}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$. Da $\overset{\circ}{N}_{\alpha_i}$ offen ist, existiert für $i = 1, \dots, m$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(f^i(\gamma(t_0))) \subset \overset{\circ}{N}_{\alpha_i}$. Weiter ist $f^i \circ \gamma$ stetig. Es gibt also zu $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i : i = 1, \dots, m\} > 0$ ein $\delta_i > 0$, so dass $d(f^i(\gamma(t_0)), f^i(\gamma(t))) < \varepsilon$, falls $t \in [0, 1]$, $|t - t_0| < \delta_i$.

Setze nun $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_m, t_1 - t_0\} > 0$ und außerdem für $s \in (0, 1]$ $y_s := \gamma(t_0 + s\frac{\delta}{2}) \in N_{\alpha_0}$.

Damit gilt für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $s \in (0, 1]$:

$$f^i(y_s) = f^i(\gamma(t_0 + s\frac{\delta}{2})) \in B_\varepsilon(f^i(\gamma(t_0))) \subset \overset{\circ}{N}_{\alpha_i} \Rightarrow y_s \in N_\alpha^f.$$

Da aber $t_0 = \sup A_0$ ist, existiert $s^* \in (0, 1]$ mit $f^{m+1}(y_{s^*}) \notin N_0$, sonst wäre $t_0 + \frac{\delta}{2} \in A_0$ im Widerspruch zu $t_0 = \sup A_0$.

Mit $y := y_{s^*}$ gilt also $y \in N_\alpha^f$ und $f^{m+1}(y) \notin N_0$.

$f^{m+1}(y)$ ist auch nicht enthalten in N_1 , denn: $t_0 + s^*\frac{\delta}{2} \leq t_0 + \frac{\delta}{2} < t_0 + t_1 - t_0 < t_1$ und $t_1 = \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in N_\alpha^f \cap f^{-(m+1)}(N_1)\}$.

Somit $f^i(y) \in N_{\alpha_i}$ für $i \in \{0, \dots, m\}$ und $f^{m+1}(y) \notin N$. □

3.3.2 Bemerkung

Man findet also in einem topologischen Horseshoe f zu jeder endlichen Folge bestehend aus 0 und 1, z. B. $(0, 0, 1)$, einen periodischen Punkt x , der sich unter Iteration von f in dem entsprechenden Teil von N befindet, im Beispiel: $x \in N_0$, $f(x) \in N_0$, $f^2(x) \in N_1$ und $f^3(x) = x$. Zusätzlich findet man einen Punkt y , der dem periodischen Punkt x über eine Periode folgt und dann aber außerhalb von N abgebildet wird, also „plötzlich“ ein komplett anderes Verhalten hat, woran man eine gewisse Sensitivität gegenüber den Anfangswerten erkennt.

Dazu und zu weiteren Aspekten von chaotischer Dynamik im nächsten Abschnitt mehr.

4 Chaos

Zu chaotischer Dynamik zählt man verschiedene Eigenschaften eines Systems, die dessen Komplexität und Unvorhersagbarkeit von Zuständen in der Zukunft beschreiben. Die folgende Definition einer chaotischen Abbildung ist [3] entnommen.

4.0.3 Definition

Sei (X, d) metrischer Raum, $f : X \rightarrow X$ und $S \subset X$ abgeschlossen. f heißt chaotisch auf S , falls gilt:

- (C1) $f(S) \subset S$
- (C2) periodische Punkte von f liegen dicht in S
- (C3) Es ex. $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $x \in S$ und für alle Umgebungen U von x ein $y \in U \cap S$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit:

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon.$$

(Sensitive Abhängigkeit von den Anfangswerten im Sinne von Guckenheimer)

- (C4) Für alle $A, B \subset S$ offen (und nichtleer) ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.
(topologische Transitivität)

4.1 Bernoulli-Shift

4.1.1 Definition

Sei $\Sigma_2 := (\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, d_2)$ der Raum der biinfinite Folgen, versehen mit der Metrik $d_2((x_k), (y_k)) := \sup\{2^{-|k|} \cdot |x_k - y_k| : k \in \mathbb{Z}\}$ und $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2, (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$ der (Links)shift auf Σ_2 .
 σ heißt *Bernoulli-Shift* auf 2 Symbolen.

4.1.2 Bemerkung

σ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. σ ist offensichtlich bijektiv mit Umkehrabbildung $\sigma^{-1} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2, (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$ (Rechtsshift).

σ ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und $x = (x_k) \in \Sigma_2$ mit $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ gilt für alle $y = (y_k) \in B_\delta(x)$ (bzgl. d_2):

$$d_2(\sigma(x), \sigma(y)) \leq 2d_2(x, y) < 2\delta = \varepsilon.$$

Analog ist σ^{-1} stetig. □

4.1.3 Satz

σ ist chaotisch auf Σ_2 .

Beweis. Zu (C1):

σ ist bijektiv, also $\sigma(\Sigma_2) = \Sigma_2$.

Zu (C2):

Sei $x = (x_k) \in \Sigma_2$ und $\varepsilon > 0$, wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$. Sei $M_x := (x_{-n_\varepsilon+1}, \dots, x_{n_\varepsilon-1})$ der Mittelblock von x der Länge $2n_\varepsilon - 1$. Die Folge $\tilde{x} = (\tilde{x}_k) := (\dots, M_x, M_x, M_x, \dots) \in \Sigma_2$, wobei $\tilde{x}_0 = x_0$ ist, ist periodisch mit Periodenlänge $2n_\varepsilon - 1$ ($\sigma^{2n_\varepsilon-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}$) und es gilt $d_2(x, \tilde{x}) = \sup\{2^{-|k|} \cdot |x_k - \tilde{x}_k| : k \in \mathbb{Z}\} \leq 2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Zu (C3):

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $x = (x_k) \in \Sigma_2$, U beliebige offene Umgebung von x und $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(x) \subset U$. Wähle $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n_\delta} < \delta$. Die gesuchte Folge $y = (y_k) \in \Sigma_2$ wird definiert durch

$$y_k := \begin{cases} x_k & , k \neq n_\delta \\ (x_{n_\delta} + 1) \bmod 1 & , k = n_\delta \end{cases}.$$

Dann ist $d_2(x, y) = 2^{-n_\delta} < \delta$, also $y \in B_\delta(x) \subset U$, und $d_2(\sigma^{n_\delta}(x), \sigma^{n_\delta}(y)) = 1 > \varepsilon$.

Zu (C4):

Behauptung. σ ist sogar topologisch mischend, d.h. $\forall A, B \subset \Sigma_2$ offen $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sigma^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Beweis. Seien $A, B \subset \Sigma_2$ offen, $x = (x_k) \in A$, $y = (y_k) \in B$ und $\varepsilon, \delta > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset A$, $B_\delta(y) \subset B$. Weiter wähle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n_1} < \varepsilon$ bzw. $2^{-n_2} < \delta$ und setze $M_x := (x_{-n_1+1}, \dots, x_0, \dots, x_{n_1-1})$ sowie $M_y := (y_{-n_2+1}, \dots, y_0, \dots, y_{n_2-1})$.

Für $i \in \mathbb{N}_0$ ist $a^{(i)} := (\dots, 0, \underbrace{M_x, 0, \dots, 0}_{i \text{ Stück}}, M_y, 0, \dots)$, wobei $a_0^{(i)} = x_0$ sein soll, enthalten in $B_\varepsilon(x) \subset A$. Außerdem ist $\sigma^{n_1+n_2-1+i}(a^{(i)}) \in B_\delta(y) \subset B$, da $\sigma^{n_1+n_2-1+i}(a^{(i)})$ und y in dem Mittelstück der Länge $2n_2 - 1$ übereinstimmen. Also gilt für alle $n \geq n_1 + n_2 - 1$: $\sigma^n(A) \cap B \neq \emptyset$. \square

Aus topologisch mischend folgt direkt topologisch transitiv. \square

4.1.4 Bemerkung

σ besitzt weitere chaotische Eigenschaften:

1. Aperiodische Punkte sind ebenfalls dicht
2. Es gibt einen Punkt $x \in \Sigma_2$, dessen Vorwärts- und Rückwärtsorbit ($O^+(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\}$ bzw. $O^-(x) = \{x, \sigma^{-1}(x), \sigma^{-2}(x), \dots\}$) dicht in Σ_2 ist.

Beweis. 2. folgt aus σ topologisch transitiv mithilfe des Birkhoffschen Transitivitätssatzes (siehe [8]).

Zu 1.:

Seien $x, \varepsilon, n_\varepsilon$ und M_x wie im Beweis von 4.1.3 (C2) und setze $\tilde{x} := (\dots, 1, 1, M_x, 1, 1, \dots)$, wobei $\tilde{x}_0 = x_0$ ist. (Falls $x \equiv 1$, so setze $\tilde{x} := (\dots, 0, M_x, 0, \dots)$.) Dann ist $d_2(x, \tilde{x}) < \varepsilon$ und \tilde{x} aperiodisch. \square

4.2 Semikonjugation von Shift u. Horseshoe

Eine Möglichkeit zu zeigen, dass eine Abbildung chaotisch ist, ist sie mit einem Bernoulli-Shift homöomorph zu konjugieren, da die chaotischen Eigenschaften (C1)-(C4) unter Konjugation invariant sind. Der Shift muss nicht unbedingt der auf $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ sein, entsprechende Shifts auf einem Folgenraum aus n Symbolen sind ebenfalls chaotisch.

Bei topologischen Horseshoes gelingt im Allgemeinen nur eine Semikonjugation, d.h. die konjugierende Abbildung ist nicht injektiv.

4.2.1 Satz

Sei $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ topologischer Horseshoe und injektiv. Dann existiert $\tau : \text{Inv}(N, f) \rightarrow \Sigma_2$ stetig und surjektiv mit $\tau \circ f = \sigma \circ \tau$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \text{Inv}(N, f) & \xrightarrow{f} & \text{Inv}(N, f) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \end{array}$$

kommutiert.

Für den Beweis benötigt man zwei kleinere Hilfsaussagen:

4.2.2 Lemma

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist die Inverse der Einschränkung $(f|_K)^{-1} : f(K) \rightarrow K$ auch stetig.

Beweis. Die Einschränkung $f|_K : K \rightarrow f(K)$ ist bijektiv. Sei $g : f(K) \rightarrow K, g := (f|_K)^{-1}$ die Inverse und $A \subset K$ abgeschlossen. Da K kompakt ist, ist A auch kompakt und damit ist, wegen $f|_K$ stetig, $f|_K(A) \subset f(K)$ kompakt, also abgeschlossen. Andererseits ist $f|_K(A) = g^{-1}(A)$ und damit g stetig. \square

4.2.3 Lemma

Seien X, Y metrische Räume, X kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subset Y$ dicht mit $A \subset f(X)$. Dann ist f surjektiv.

Beweis. Sei $y \in Y$. Da A dicht ist in Y , gibt es eine Folge $(y_n) \subset A$ mit $y_n \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$). Wegen $A \subset f(X)$ existiert eine Folge $(x_n) \subset X$ mit $f(x_n) = y_n$. Diese besitzt aufgrund der Kompaktheit von X eine in X konvergente Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$. Mit $x^* := \lim x_{\varphi(n)} \in X$ gilt:

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) \underset{f \text{ stetig}}{=} f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)}\right) = f(x^*).$$

□

4.2.4 Beweis von Satz 4.2.1

Beweis. Sei also $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein injektiver topologischer Horseshoe.

Zunächst ist $\text{Inv}(N, f) = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} (f|_N)^i(N)$ kompakt, denn:

f stetig, N kompakt $\Rightarrow (f|_N)^i(N)$ kompakt und $(f|_N)^{-i}(N)$ abgeschlossen ($i \geq 0$) $\Rightarrow \text{Inv}(N, f)$ abgeschlossen und aus $\text{Inv}(N, f) \subset N$ folgt dann $\text{Inv}(N, f)$ kompakt.

Außerdem enthält $\text{Inv}(N, f)$ nach Satz 3.3.1 periodische Punkte, ist also insbesondere nicht leer.

Definition von τ :

Für $x \in \text{Inv}(N, f)$, $k \in \mathbb{Z}$ definiere $\tau : \text{Inv}(N, f) \rightarrow \Sigma_2$, $x \mapsto \tau(x) = (\tau_k(x))_{k \in \mathbb{Z}}$ durch

$$\tau_k(x) = \begin{cases} 0 & , f^k(x) \in N_0 \\ 1 & , f^k(x) \in N_1 \end{cases}$$

τ ist wohldefiniert:

Da f injektiv ist, existiert zu $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \text{Inv}(N, f)$ immer genau ein $y \in \text{Inv}(N, f)$ mit $y = f^{-k}(x)$.

Außerdem ist $\tau(x) \in \Sigma_2$ für $x \in \text{Inv}(N, f)$.

τ ist stetig:

Sei $x \in \text{Inv}(N, f)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$ und setze $\alpha := \tau(x) \in \Sigma_2$. Damit ist $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(N_{\alpha_i})$, also gilt insbesondere für $i \in \{-n_\varepsilon + 1, \dots, n_\varepsilon - 1\}$: $f^i(x) \in f^{-1}(N_{\alpha_{i+1}}) \cap N_{\alpha_i} \cap f(N_{\alpha_{i-1}})$.

Wie im Beweis von 3.2.2 folgt aus den Bedingungen (B1) und (B2), dass $f^i(x) \in \overset{\circ}{N}_{\alpha_i}$. Es gibt also für alle $i \in \{-n_\varepsilon + 1, \dots, n_\varepsilon - 1\}$ eine offene Umgebung U_i mit $f^i(x) \in U_i \subset \overset{\circ}{N}_{\alpha_i}$.

Da f stetig und $\text{Inv}(N, f)$ kompakt ist, ist nach Lemma 4.2.2 auch die Inverse der Einschränkung $f|_{\text{Inv}(N, f)}$ stetig. Es gibt also zu $i \in \{-n_\varepsilon + 1, \dots, n_\varepsilon - 1\}$ ein $\delta_i > 0$, so dass für alle $y \in B_{\delta_i}(x) \cap \text{Inv}(N, f)$ gilt: $f^i(y) \in U_i \subset \overset{\circ}{N}_{\alpha_i}$. Setze $\delta := \min\{\delta_i : i \in \{-n_\varepsilon + 1, \dots, n_\varepsilon - 1\}\}$.

Sei $y \in B_\delta(x) \cap \text{Inv}(N, f)$, es gilt also:

$$y \in f^{n_\varepsilon-1}\left(\underbrace{N_{\alpha_{-n_\varepsilon+1}}}_{=N_{\tau_{-n_\varepsilon+1}(x)}}\right) \cap \dots \cap f^{-n_\varepsilon+1}\left(\underbrace{N_{\alpha_{n_\varepsilon-1}}}_{=N_{\tau_{n_\varepsilon-1}(x)}}\right).$$

Daraus folgt: $\tau_k(x) = \tau_k(y)$ für $k \in \{-n_\varepsilon + 1, \dots, n_\varepsilon - 1\}$, und somit $d_2(\tau(x), \tau(y)) \leq 2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$.

τ ist surjektiv:

In Satz 3.3.1 wurde gezeigt, dass $\{a \in \Sigma_2 : a \text{ periodisch}\}$ enthalten ist im Bild von τ . Außerdem ist $\{a \in \Sigma_2 : a \text{ periodisch}\}$ nach 4.1.3 (C2) dicht in Σ_2 .

Aus τ stetig, $\text{Inv}(N, f)$ kompakt folgt also nach 4.2.3 die Surjektivität von τ .

$\tau \circ f = \sigma \circ \tau$:

Sei $x \in \text{Inv}(N, f)$. Dann ist

$$\tau_k(f(x)) = \begin{cases} 0 & , f^k(f(x)) \in N_0 \\ 1 & , f^k(f(x)) \in N_1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , f^{k+1}(x) \in N_0 \\ 1 & , f^{k+1}(x) \in N_1 \end{cases} = \tau_{k+1}(x)$$

und somit

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma((\tau_k(x))_{k \in \mathbb{Z}}) = (\tau_{k+1}(x))_{k \in \mathbb{Z}} = (\tau_k(f(x)))_{k \in \mathbb{Z}} = (\tau \circ f)(x).$$

□

4.2.5 Bemerkung (Semikonjugation)

Eine richtige Konjugation zwischen einem topologischen Horseshoe f und dem Shift ist unter diesen (schwachen) geometrischen Voraussetzungen nicht möglich, da man im Allgemeinen nicht weiß, wie genau die Homotopie zwischen Modellabbildung und f verläuft. So haben beispielsweise G und U in N_0 genau einen Fixpunkt. Da aber nur der Fixpunktindex konstant bleibt und nicht die Anzahl der Fixpunkte (vgl. Beispiel 1.2.3), kann f mehr als einen Fixpunkt in N_0 besitzen. Somit ist eine injektive Zuordnung dieser Punkte zu den entsprechenden Symbolfolgen nicht möglich.

Das Problem einer Semikonjugation ist, dass sich im Gegensatz zu einer Konjugation mittels einem Homöomorphismus nicht alle topologischen Eigenschaften des Shifts auf den Horseshoe übertragen. Im Allgemeinen gilt dies auch für die chaotischen Eigenschaften (C2)-(C4). So kann es zum Beispiel ein ganzes offenes Gebiet $K \subset N$ geben, in dem jeder Punkt ein Fixpunkt ist. Dann ist K enthalten in der invarianten Menge, aber der Horseshoe f ist auf K weder sensitiv abhängig von den Anfangswerten, noch topologisch transitiv.

Topologische Horseshoes sind also nicht im strengen Sinne von Definition 4.0.3 chaotisch. Sie sind aber in dem Sinne chaotisch, dass sie eine Vielzahl an verschiedensten Orbits enthalten. So wurde in 3.3.1 schon gezeigt, dass es unendlich viele Punkte gibt, deren Orbits periodisch sind, und Punkte, die diesen beliebig lange folgen und dann irgendwann „verschwinden“. Durch die Semikonjugation zum Shift lässt sich jetzt sogar zu jeder unendlichen Folge aus 0 und 1 mindestens ein Punkt finden, der unter Iteration von f die entsprechende Abfolge von N_0 und N_1 durchläuft. So gibt es also auch unendlich viele Punkte mit aperiodischen Orbits und sogar innerhalb der invarianten Menge Paare von Punkten, die beliebig lange die selbe Abfolge haben und dann aber irgendwann getrennt werden.

Insgesamt ergibt sich durch den Vorteil von rein geometrischen Bedingungen (3.2.2, 3.2.4) ein etwas schwächerer Begriff von Chaos in topologischen Horseshoes.

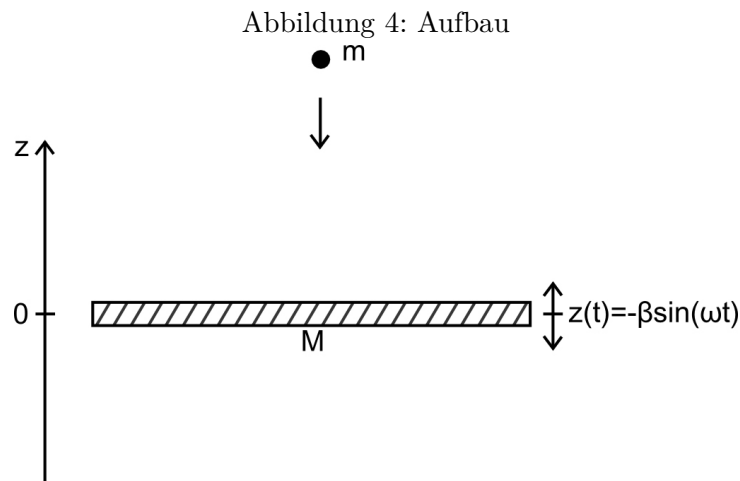
5 Anwendung

5.1 Allgemein

Die von Zgliczyński gezeigten Sätze 2.1.2, 3.2.4, 4.2.1 werden angewandt, um in dynamischen Systemen Chaos in Form eines Horseshoes nachzuweisen und ihr Verhalten dadurch besser zu verstehen. Ein solches System kann eine Differentialgleichung sein, aus der man eine Poincaré-Abbildung gewinnt und die Sätze auf diese anwendet. Zgliczyński selbst zeigt dies anhand der Rössler Gleichungen in [5] oder auch in den Lorenz Gleichungen, siehe [6]. Es kann aber auch direkt ein diskretes dynamisches System untersucht werden, wie z. B. die Hénon Abbildung in [5].

Ein weiteres Beispiel, in dem man die Zgliczyński Sätze anwenden kann, tritt in der Dynamik eines auf einer sinusförmig vibrierenden Platte hüpfenden Balls auf:

5.2 Bouncing-Ball-Map



5.2.1 Herleitung

Die physikalische Herleitung basierend auf [7]:

Die Platte schwingt sinusförmig, d.h. ist z die Höhe der Platte so gelte $z(t) = -\beta \sin(\omega t)$. Weiter sei t_j der Zeitpunkt des j -ten Auftreffens des Balls und $v_{rel}^-(t_j)$, $v_{rel}^+(t_j)$ die Geschwindigkeiten unmittelbar bevor bzw. nach dem j -ten Aufprall relativ zur Platte. Unter den Annahmen eines vollkommen elastischen Stoßes und $M \gg m$ (Masse des Balls vernachlässigbar gegenüber der Masse des Tisches) gilt dann $v_{rel}^+(t_j) = -v_{rel}^-(t_j)$ bzw. für die absoluten Geschwindigkeiten:

$$v^+(t_j) - \dot{z}(t_j) = -(v^-(t_j) - \dot{z}(t_j)). \quad (5.1)$$

Außerdem gilt aufgrund der Energieerhaltung:

$$v^-(t_{j+1}) = -v^+(t_j). \quad (5.2)$$

Geht man davon aus, dass die Amplitude β gegenüber der Sprunghöhe des Balls vernachlässigbar ist, so ergibt sich für die Zeitdifferenz zwischen zwei Kontakten:

$$t_{j+1} - t_j = \frac{2v^+(t_j)}{g}. \quad (5.3)$$

Denn für die Position des Balls gilt nach dem j -ten Aufprall $z(t) = v^+(t_j)t - \frac{1}{2}gt^2$. (g Gravitationskonstante)

Das System wird nun beschrieben durch die Phase der Schwingung und die Abprallgeschwindigkeit des Balls, genauer:

Setze $\gamma = \frac{4\omega^2\beta}{g}$, $\phi_j = \omega t_j$ und $v_j = \frac{2\omega}{g}v^+(t_j)$.

Man erhält dann folgende Beziehung zwischen zwei aufeinander folgenden Zuständen:

$$\begin{aligned} \phi_{j+1} &= \omega t_{j+1} \stackrel{5.3}{=} \omega \frac{2v^+(t_j)}{g} + \omega t_j = v_j + \phi_j \\ v_{j+1} &= \frac{2\omega}{g}v^+(t_{j+1}) \stackrel{5.1}{=} \frac{2\omega}{g}(-v^-(t_{j+1}) + 2\dot{z}(t_{j+1})) \\ &\stackrel{5.2}{=} v_j + \frac{4\omega}{g}(-\beta\omega \cos(\omega t_{j+1})) = \\ &= v_j - \gamma \cos(v_j + \phi_j). \end{aligned}$$

5.2.2 Nachweis des Horseshoes

Man erhält also eine Abbildung $f_\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_\gamma(\phi, v) = (\phi + v, v - \gamma \cos(\phi + v))$.

Für γ groß genug, d.h. bei einer großen Oszillationsfrequenz ω , findet man in f_γ einen topologischen Horseshoe. M.a.W. bei einer hohen Oszillationsfrequenz wird das Verhalten des Balls chaotisch. Man kann natürlich nicht davon ausgehen, dass mit $N \subset \mathbb{R}^2$ wie in Abschnitt 3 $f_\gamma|_N$ ein topologischer Horseshoe ist, der Horseshoe tritt zunächst verzerrt auf. (Siehe Abbildung 5.)

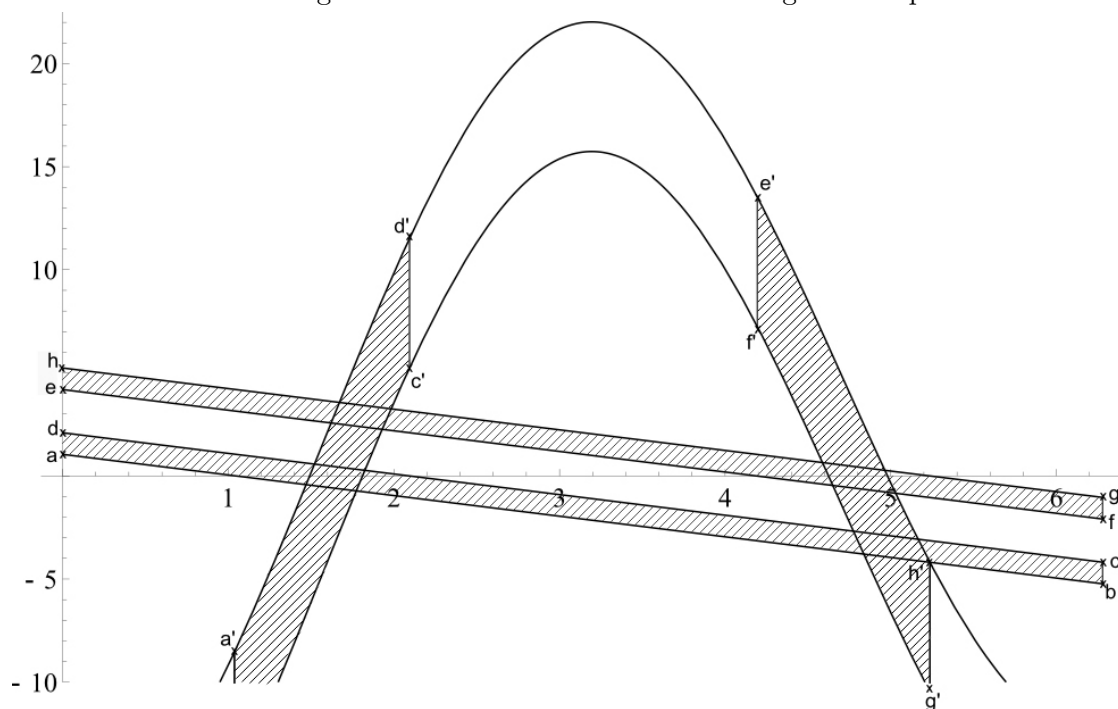
Die Verzerrung kann man aber beheben:

Sei $\gamma > 6\pi$.

Behauptung. Es existiert ein Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass $(\varphi \circ f_\gamma \circ \varphi^{-1})|_N$ ein injektiver topologischer Horseshoe ist. D.h., eine Semikonjugation zum Shift ist möglich.

Beweis. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) := \left(\frac{x}{\pi} - 1, \frac{3}{2\pi}y + \frac{3}{2\pi}x - \frac{3}{2}\right)$ ist offenbar stetig und bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\varphi^{-1}(x, y) = \left(\pi x + \pi, \frac{2\pi}{3}y - \pi x\right)$ und ebenfalls stetig.

Abbildung 5: verzerrter Horseshoe in Bouncing-Ball-Map



Sei $g_\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g_\gamma := \varphi \circ f_\gamma \circ \varphi^{-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} g_\gamma(x, y) &= (\varphi \circ f_\gamma \circ \varphi^{-1})(x, y) = (\varphi \circ f_\gamma) \left(\pi x + \pi, \frac{2\pi}{3}y - \pi x \right) \\ &= \varphi \left(\frac{2\pi}{3}y + \pi, \frac{2\pi}{3}y - \pi x - \gamma \cos \left(\frac{2\pi}{3}y + \pi \right) \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}y, 2y - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2\pi} \gamma \cos \left(\frac{2\pi}{3}y + \pi \right) \right). \end{aligned}$$

g_γ ist injektiv, denn aus $g_\gamma(x_1, y_1) = g_\gamma(x_2, y_2)$ folgt sofort $y_1 = y_2$ und dann aus der zweiten Komponente $x_1 = x_2$.

Für $g_\gamma|_N$ werden nun die Kriterien 3.2.4 nachgerechnet.

Es gilt $g_\gamma([-1, 1]^2) \subset \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \mathbb{R}$, insbesondere also auch $g_\gamma(N) \subset \left\{ (x, y) : -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4} \right\}$, weiter gilt

- $g_\gamma([-1, 1] \times \{-1\}) = \left\{ \left(-\frac{2}{3}, -2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4\pi}\gamma \right) : t \in [-1, 1] \right\}$
und $-2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4\pi}\gamma \leq -\frac{1}{2} - \frac{3}{4\pi}\gamma < -\frac{1}{2} - \frac{9}{2} < -1$
- $g_\gamma([-1, 1] \times \{-0.5\}) = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, -1 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4\pi}\gamma \right) : t \in [-1, 1] \right\}$
und $-1 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4\pi}\gamma \geq -\frac{5}{2} + \frac{3}{4\pi}\gamma > -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} > 1$
- $g_\gamma([-1, 1] \times \{0.5\}) = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4\pi}\gamma \right) : t \in [-1, 1] \right\}$
und $1 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4\pi}\gamma \geq -\frac{1}{2} + \frac{3}{4\pi}\gamma > -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} > 1$

- $g_\gamma([-1, 1] \times \{1\}) = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4\pi}\gamma \right) : t \in [-1, 1] \right\}$
und $2 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4\pi}\gamma \leq \frac{7}{2} - \frac{3}{4\pi}\gamma < \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -1$

$g_{\gamma|N}$ erfüllt also für $\gamma > 6\pi$ die Bedingungen (\star_U) aus 3.2.4 und ist damit ein topologischer Horseshoe.

□

Literatur

- [1] Klaus Deimling: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985
- [2] Klaus Jänich: *Topologie*, Springer-Verlag, 1999
- [3] Wolfgang Metzler: *Nichtlineare Dynamik und Chaos*, Teubner-Verlag, 1998
- [4] Piotr Zgliczyński: *Fixed point index for iterations of maps, topological horseshoe and chaos*, Topological Methods in Nonlinear Analysis 8, 1996
- [5] Piotr Zgliczyński: *Computer assisted proof of chaos in the Rössler equations and in the Hénon map*, Nonlinearity 10, 1997
- [6] Piotr Zgliczyński: *Computer assisted proof of chaos in the Lorenz equations*, Physica D 115, 1998
- [7] John Guckenheimer, Philip Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983
- [8] Clark Robinson: *Dynamical Systems*, CRC Press, 1995

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen erstellt habe.

Björn Gebhard

Giessen, 04.10.2012