

Übungen zur Vorlesung  
**Funktionalanalysis II**  
Blatt 9

*I hail a semi-group when I see one and I seem to see them everywhere!*  
CARL EINAR HILLE (1894-1980)

**Aufgabe 1.** (*Beispiele von  $C_0$ -Halbgruppen*)

Zeigen Sie, dass die folgenden Familien  $(T(t))_{t \geq 0}$  stark stetige Halbgruppen sind, und berechnen Sie  $\|T(t)\|$ . Sind die Halbgruppen normstetig? Können Sie zu stark stetigen Gruppen erweitert werden? (Hinweis: Überprüfen Sie starke Stetigkeit in 0.)

1. (Multiplikatorhalbgruppe auf Folgenräumen)

$(T(t))$  auf  $l^2$  oder  $c_0$  mit

$$T(t)(t_1, t_2, \dots) := (e^{ta_1}t_1, e^{ta_2}t_2, \dots)$$

für eine beschränkte Folge  $(a_n) \subset \mathbb{C}$ . Was ändert sich, wenn man  $l^2$  durch  $l^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , ersetzt?

2. (Multiplikatorhalbgruppe auf Funktionenräumen)

$(T(t))$  auf  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , mit

$$(T(t)f)(s) := e^{ta(s)}f(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, f \in L^p(\mathbb{R})$$

für eine beschränkte meßbare Funktion  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Gilt starke Stetigkeit für  $L^\infty(\mathbb{R})$ ?

3. (Nilpotente Translationshalbgruppe)

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} f(s-t), & s \geq t, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf  $X = L^p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Was ändert sich für  $X = C[0, 1]$ ?

- 4.

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} 2f(s+t), & s \in [-t, 0], \\ f(s+t), & \text{sonst} \end{cases}$$

auf  $L^1(\mathbb{R})$ .