

Übungen zur Vorlesung
Funktionalanalysis II
Blatt 7

In mathematics the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.

GEORGE CANTOR (1845-1918)

Aufgabe 1. (*Stabilität: Beispiele*)

- Seien T_l der Linksshift und T_r der Rechtsshift auf l^2 . Zeigen Sie, dass T_l^n stark, aber nicht in der Norm gegen Null konvergiert, während T_r^n schwach, aber nicht stark gegen Null konvergiert. Was ändert sich, wenn man l^2 durch c_0 oder l^p , $1 \leq p \leq \infty$, ersetzt?
- Seien $(a_j) \in l^\infty$ und M der Multiplikator auf l^2 mit (a_j) . Wann konvergiert M^n gegen Null in der Norm, stark bzw. schwach?

Aufgabe 2. (*Schwache Konvergenz*)

- Sei X ein Banachraum und sei $(x_n) \subset X$ eine schwach konvergente Folge gegen x . Dann gilt $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
- Sei H ein Hilbertraum und $(x_n) \subset H$ mit $\|x_n\| \leq 1$. Wenn x_n schwach gegen ein x mit $\|x\| = 1$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Insbesondere impliziert schwache Konvergenz von Kontraktionen auf einem Hilbertraum gegen eine Isometrie starke Konvergenz. (Hinweis: Schätzen Sie $\|x_n - x\|^2$ von oben ab.)

Aufgabe 3. (*Mittelergodensatz*)

- Sei T eine Kontraktion auf einem Hilbertraum H und sei P die Orthogonalprojektion auf $\text{Fix}T$. Dann konvergieren die Cesàromittel

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^n x$$

gegen Px für jedes $x \in H$. (Hinweis: Benutzen Sie die von Neumann-Zerlegung.)

- Interpretieren Sie die Aussage in *a*) geometrisch für $H = \mathbb{C}$ und $T = \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$.

Die Übungsaufgaben werden in der Übung am Montag, dem 4. 6. 2018 besprochen.