

# Mathematik für Physiker IV

Blatt 12

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei  $H = L^2([0, 3])$ . Für  $a \in C([0, 3])$  sei  $T_a$  der beschränkte lineare Operator auf  $H$ , der durch folgende Gleichung definiert wird:

$$(T_a f)(t) = a(t)f(t), \quad f \in H.$$

1. Man bestimme den adjungierten Operator  $(T_a)^*$ .
2. Man untersuche, wann  $T_a$  selbstadjungiert ist.
3. Man untersuche, wann  $T_a$  unitär ist.
3. Man untersuche, wann  $T_a$  ein Projektionsoperator ist.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

$T_a$  sei der Operator aus Aufgabe 1.

1. Für  $a(t) = t^2$  bestimme man das Spektrum von  $T_a$ .
2. Es  $a(t) = t$  falls  $0 \leq t \leq 2$  und  $a(t) = 4$  falls  $2 < t \leq 3$ .  
Man bestimme alle Eigenwerte von  $T_a$ .

## Mathematics for Physicists IV

Sheet 12

### Exercise 1 (4 points)

Let  $H = L^2([0, 3])$ . For  $a \in C([0, 3])$  let  $T_a$  be the bounded linear operator on  $H$  defined by

$$(T_a f)(t) = a(t)f(t), \quad f \in H.$$

1. Determine the adjoint operator  $(T_a)^*$ .
2. When is  $T_a$  self-adjoint?
3. When is  $T_a$  unitary?
4. When is  $T_a$  a projection?

### Exercise 2 (4 points)

Let  $T_a$  be the operator from Exercise 1.

1. For  $a(t) = t^2$  determine the spectrum of  $T_a$ .
2. Let  $a(t) = t$  if  $0 \leq t \leq 2$  and  $a(t) = 4$  if  $2 < t \leq 3$ . Determine all eigenvalues of  $T_a$ .