Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 9

In den folgenden Aufgaben studieren wir, für einen topologischen Raum X, den Zusammenhang zwischen Homotopieklassen von Wegen in X (was immer bedeutet, dass Homotopie relativ zu ∂I betrachtet wird) einerseits und Klassen freier Schleifen bezüglich beliebiger (“freier”) Homotopie andererseits.

Wir benutzen die folgende allgemeine Notation: Für eine Mannigfaltigkeit M, möglicherweise mit Rand, sei ∂M der Rand von M.

Aufgabe 1. Es seien, wie in der Vorlesung am 10.12., Wege links, rechts, unten, oben nach I^2 definiert. (links$(t) = (0,t)$ etc.) Es sei X ein topologischer Raum. Es sei $f : \partial I^2 \to X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass äquivalent sind:

i) f ist zu einer stetigen Abbildung von I^2 nach X fortsetzbar.

ii) f selbst ist nullhomotop.

iii) Es ist $f_*(\text{oben} * \text{links}) \simeq f_*(\text{rechts} * \text{unten})$ rel ∂I.

Man beachte: In ii) werden “freie Homotopien” d.h. Homotopien “ohne Basispunkt” betrachtet.

Aufgabe 2. Es sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Es sei $\Phi_X : \pi_1(X, x_0) = [S^1, 1; X, x_0] \longrightarrow [S^1; X]$ die kanonische Abbildung. Zeigen Sie:

a) Φ_X ist natürlich in X.

b) Φ_X ist surjektiv.

c) Für $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ gilt genau dann $\Phi_X(\alpha) = \Phi_X(\beta)$, wenn α und β konjugierte Gruppenelemente sind.

Aufgabe 3. Es sei X ein wegzusammenhängender Raum. Zeigen Sie, dass äquivalent sind:

i) $\Pi(X)$ ist äquivalent zum Gruppoid mit einem einzigen Objekt und einem einzigen Morphismus.

ii) Je zwei Wege in X mit demselben Anfangs- und Endpunkten sind homotop zueinander.

iii) Jeder geschlossene Weg ist nullhomotop (man sagt auch: zusammenziehbar).

iv) Für einen Punkt x_0 von X ist $\pi_1(X, x_0) = 1$.

v) für jeden Punkt x_0 von X ist $\pi_1(X, x_0) = 1$.

vi) Jede freie Schleife in X ist nullhomotop.

Beachten Sie hier:

- In i) sprechen wir von Äquivalenz von Kategorien.
- In ii) und iii) werden Homotopien relativ zu ∂I in I oder zu 1 in S^1 betrachtet, in vi) werden beliebige Homotopien betrachtet.

Und noch eine Definition:

Definition. Ein wegzusammenhängender Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn die genannten Bedingungen erfüllt sind.