Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 8

Definition. Ein topologischer Raum heißt *lokal-kompakt*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen hat.

(Dies ist insbesondere für Mannigfaltigkeiten der Fall.)

Wir zeigen im Folgenden diese Aussage, auf die ich schon des Öfteren mehr oder weniger in der Vorlesung Bezug genommen habe:

Für einen lokal-kompakten topologischen Raum X und einen beliebigen topologischen Raum Y ist eine Homotopie $(h_i : X \longrightarrow Y)_{i \in I}$ dasselbe wie ein Weg $I \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$, $i \longmapsto h_i$, wobei $\mathcal{C}(X,Y)$ der Raum der stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$ ist, welcher mit der sogenannten *kompakt-offen Topologie* versehen wird.

Aufgabe 1. (Dies ist mehr ein Hinweis für Aufgabe 3.) Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und B eine Subbasis der Topologie von Y. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für jedes $V \in B$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist.

Es sei nun – für den Rest der Seite – X ein lokal-kompakter und Y ein beliebiger topologischer Raum.

Definition. Die *kompakt-offen Topologie* ist diejenige Topologie auf $\mathcal{C}(X,Y)$, welche von den Mengen der Form

$$M(K,U) := \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subset V\} ,$$

wobei $K \subseteq X$ kompakt und $V \subseteq Y$ offen ist, erzeugt wird. (Damit bilden die angegeben Mengen also eine Subbasis der kompakt-offen Topologie.) Wir betrachten nun $\mathcal{C}(X,Y)$ mit dieser Topologie.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Auswertungs-Abbildung

$$e : \mathcal{C}(X,Y) \times X \longrightarrow Y \quad , \quad (f,x) \longmapsto f(x)$$

stetig ist.

Aufgabe 3. Es sei $F : I \times X \longrightarrow Y$ eine beliebige Abbildung. Wir definieren für $i \in I$ die Abbildung $f_i := F(i, \_) : X \longrightarrow Y$. Zeigen Sie:

F ist genau dann stetig, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

i) Für alle $i \in I$ ist f_i stetig.

ii) Die Abbildung $I \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$, $i \longmapsto f_i$ ist stetig.

Hinweis. Für die "Rückrichtung" sollten Sie die Abbildung F als Komposition „offensichtlich" stetiger Abbildungen auffassen.

Bemerkung. Die Aussage ist besonders für $X = I$ relevant, weil eine stetige Abbildung $I \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie zwischen Wegen von Y ist. Man kann damit also sagen: Eine Homotopie zwischen Wegen ist – mit einer geeigneten Topologie auf der Menge der Wege – dasselbe wie eine stetige Transformation von Wegen.

Hier nun noch ein lange ersehntes Beispiel für einen Deformationsretrakt, der kein strenger Deformationsretrakt ist.

Aufgabe 4. Wir definieren den folgenden "Kamm":

$$X := I \times \{0\} \cup \big(\{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}\big) \times I \,.$$

(Machen Sie erstmal eine Skizze!)
Zeigen Sie, dass $\{(0\,;1)\}$ ein Deformationsretrakt aber kein strenger Deformationsretrakt von X ist.