Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 7

Aufgabe 1. Seien X und Y Mengen oder topologische Räume oder algebraische Strukturen wie Gruppen. Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus und $V \subseteq Y$ eine Teilmenge, ein Unterraum oder eine Unterstruktur. Zeigen Sie, dass das folgende kommutative Diagramm kartesisch ist:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(V) \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2.

a) Seien U und V Mengen. Zeigen Sie, dass das folgende kommutative Diagramm kartesisch und kokartesisch ist.

$$(\star) \qquad \begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \\ U \arrow[r, hook] & U \cup V \end{tikzcd}$$

b) Seien nun U und V offene Unterräume eines topologischen Raums X. Zeigen Sie, dass das kommutative Diagramm $(\star)$ wieder kartesisch und kokartesisch ist.

c) Geben Sie weitere mögliche weitere Bedingungen an U und V als Unterräume von X an, unter denen das Diagramm $(\star)$ kartesisch ist, sowie weitere mögliche Bedingungen, unter denen das Diagramm $(\star)$ kokartesisch ist.

Definition Es sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten diese Relation auf X:

x_1 steht in Relation zu x_2, wenn es einen Weg von x_1 nach x_2 gibt.

Dies ist eine Äquivalenzrelation. Die Klasse eines Punktes nennen wir *Wegklasse*, die Menge der Wegklassen bezeichnet man mit $\pi_0(X)$.

Bemerkung. Man kann auch sagen: Zwei Punkte stehen zueinander in Relation, wenn die entsprechenden konstanten Abbildungen homotop zueinander sind. Damit ist $\pi_0(X)$ "=" $[\{*\}; X]$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Die Wegklassen von X entsprechen den maximalen wegzusammenhängenden Unterräumen von X.

Bemerkung. Ich versuche, Teilmengen und Unterräume eines topologischen Raums zu unterscheiden: Ein Unterraum ist eine Teilmenge zusammen mit der induzierten Topologie. Deshalb steht in der Aufgabe nur "entsprechen". Das ist aber nicht das, worum es bei der Aufgabe geht.

Aufgabe 4. Man erhält in offensichtlicher Weise einen kovarianten Funktor $\pi_0 : \mathcal{T}op \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$. Geben Sie diesen an und argumentieren Sie, dass es ein Funktor ist.

Aufgabe 5. Im Jargon der Kategorientheorie bedeuten die folgenden Aussagen alle dasselbe. Überlegen Sie sich, was die genaue Aussage ist, und zeigen Sie sie.

- Der Funktor π_0 kommutiert mit dem Bilden von Produkten und Koprodukten.
- Der Funktor π_0 ist verträglich mit dem Bilden von Produkten und Koprodukten.
- Der Funktor π_0 erhält Produkte und Koprodukte.

Aufgabe 6.

a) Zeigen Sie, dass der Funktor π_0 nicht verträglich mit dem Bilden von Faserprodukten ist, oder – mit anderen Worten – nicht alle kartesischen Diagramme erhält.

b) Zeigen Sie, dass der Funktor π_0 kokartesische Diagramme wie in Aufgabe 2 b) erhält.