Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 6

Aufgabe 1. In den Lösungen von Aufgabe 1 von Übungsblatt 4 wurden Darstellungen von Vergissfunktoren angegeben. Geben Sie die zugehörigen universellen Elemente und die zugehörige Charakterisierung ("Für alle ... existiert genau ein ...") an.

Oftmals werden universelle Eigenschaften (nur) mit Objekten und Morphismen formuliert. Der allgemeine Rahmen hierfür ist wie folgt:

Definition Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor und X ein Objekt von $\mathcal{D}$.
Ein *universeller Morphismus von X nach $\mathcal{F}$* ist ein Paar (U, u), wobei U ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $u : X \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ ist, so, dass die folgende sogenannte *universelle Eigenschaft* gilt:

> Für alle Paare (A, f), wobei A ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $f : X \longrightarrow \mathcal{F}(A)$ ist, gibt es genau einen Morphismus $h : U \longrightarrow A$ mit $\mathcal{F}(h) \circ u = f$.

Symbolisch:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, dotted, "\mathcal{F}(h)"] & U \arrow[d, dotted, "h"] \\
& \mathcal{F}(A) & A
\end{tikzcd}$$

Dual hierzu definieren wir mit denselben Daten wie zuvor (also weiterhin für einen kovarianten (!) Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$):
Ein *universeller Morphismus von $\mathcal{F}$ nach X* ist ein Paar (U, u), wobei U ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $u : \mathcal{F}(U) \longrightarrow X$ ist, so, dass die folgende sogenannte *universelle Eigenschaft* gilt:

> Für alle Paare (A, f), wobei A ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $f : \mathcal{F}(A) \longrightarrow X$ ist, gibt es genau einen Morphismus $h : A \longrightarrow U$ mit $u \circ \mathcal{F}(h) = f$.

Symbolisch:

$$\begin{tikzcd}
X & \mathcal{F}(U) \arrow[l, "u"'] & U \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "\mathcal{F}(h)"'] & A \arrow[u, dotted, "h"']
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. Geben Sie – mit den Daten wie in den Definitionen –

i) eine Kategorie an derart, dass (genau) die Tupel (A, f) wie in der ersten Definition die Objekte der Kategorie sind und ein solches Tupel genau dann ein universeller Morphismus ist, wenn es initial in der Kategorie ist,

ii) eine Kategorie an derart, dass (genau) die Tupel (A, f) wie in der zweiten, dualen, Definition, die Objekte in der Kategorie sind und ein solches Tupel genau dann ein universeller Morphismus ist, wenn es terminal in der Kategorie ist.

iii) Es gibt einen Zusammenhang zwischen den Definitionen für diese Kategorien und den Definitionen für die Kategorien $S \downarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \downarrow S$ auf Übungsblatt 4. Wie lautet dieser?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass ein universeller Morphismus auch ein universelles Element für einen geeigneten Funktor ist.

Hiermit können wir also sagen: Wenn wir den Zugang mittels "universeller Morphismen" als Rahmen für das nehmen, was wir allgemein "universelle Eigenschaften" nennen wollen, dann ist dieser Rahmen enger-oder-gleich-weit als der Rahmen mittels universeller Elemente.
Es stellt sich die Frage, ob wir freie Elemente, Produkte und Koprodukte auch im – potentiell engeren – Rahmen mittels universeller Morphismen fassen können. Dies ist der Fall:

Aufgabe 4. Formulieren Sie die universellen Eigenschaften freier Elemente und von Produkten und Koprodukten mittels universeller Morphismen wie gerade definiert. (Sie müssen also jeweils die Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, den Funktor $\mathcal{F}$ und das Element X angeben.)
Geben Sie den Zusammenhang zwischen diesen Kategorien und den in der Vorlesung für freie Elemente, Produkte und Koprodukte angegebenen Kategorien und Funktoren an. Verwenden Sie hierbei Ihre Antwort zu Aufgabe 3.

Allerdings sind für kovariante Funktoren universelle Elemente immer auch "fast" universelle Morphismen, unabhängig von der obigen Aufgabe. Wenn man dies ausformuliert, ist es aber "nicht so interessant" und auch keine allgemeine Aussage, aus der sich eine Lösung von Aufgabe 4 ergibt:

Aufgabe 5. Argumentieren Sie, dass für einen kovarianten Funktor nach $\mathcal{E}ns$ universelle Elemente "fast" auch universelle Morphismen von der einpunktigen Menge zum gegebenen Funktor sind.