Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 3

Aufgabe 1. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor. Betrachten Sie die folgenden beiden Aussagen:

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.

ii) Es gibt einen kovarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

a) Beweisen Sie, dass ii)   i) impliziert.

b) Beweisen Sie nun, dass auch i)   ii) impliziert – vorausgesetzt, dass für die Klasse der Objekte von $\mathcal{D}$ und für die Klasse der Morphismen von $\mathcal{D}$ ein geeignetes Auswahlaxiom gilt.

Wir beschäftigen uns mit sogenannten "freien Elementen".

Oftmals definiert man Objekte von Kategorien mittels einer "unterliegenden Menge" und "Zusatzinformationen" und dann Morphismen als "strukturerhaltende Abbildungen". Man hat dann einen "Vergissfunktor" in die Kategorie der Mengen.

Für die folgende Definition ist es sinnvoll, diese Situation im Kopf zu haben, auch wenn die Definition selbst allgemeiner ist.

Definition Es sei $\mathcal{C}$ eine feste Kategorie und $\mathcal{V} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ ein fester kovarianter Funktor.

Für eine Menge B ist ein *freies Element* auf B ein Tupel (F, ι), wobei F ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $\iota : B \longrightarrow \mathcal{V}(F)$ ist und die folgende *universelle Eigenschaft* gilt:

> Für alle Tupel (Z, κ), wobei Z ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $\kappa : B \longrightarrow \mathcal{V}(Z)$ ist, gibt es genau einen Morphismus $f : F \longrightarrow Z$, für welchen das Diagramm
>
> $$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\kappa"] & \\ \mathcal{V}(F) \arrow[r, "f"] & \mathcal{V}(Z) \end{tikzcd}$$
>
> kommutiert.

Die Menge B heißt dann *Basis* des freien Elements. Wenn (F, ι) ein freies Element ist, heißt F *freies Objekt*.

Aufgabe 2. Es ist naheliegend, dass freie Objekte (zu wie in der Definition gegebenen Daten) "im Wesentlichen eindeutig" sind. Geben Sie an, was dies bedeuten soll und zeigen Sie, dass es so ist.

Aufgabe 3. Es sei B eine beliebige Menge. Überlegen Sie sich, dass die folgenden Tupel jeweils freie Elemente auf B sind. Die Vergissfunktoren sind hierbei die "offensichtlichen".

a) In der Kategorie der Mengen: (B, id_B)

b) Für einen Ring (mit 1) R in der Kategorie der R-Moduln:

Der Standardmodul auf der Basis B, $R^{(B)}$, zusammen mit der Inklusion $B \hookrightarrow R^{(B)}$, $b \mapsto e_b = (\delta_{b,c})_{c \in B}$.

(Das kennen Sie doch, oder?)

c) In der Kategorie der Monoide:

Das Monoid der *Wörter* auf B, also $B^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B^n$ mit der Konkatination als Verknüpfung, zusammen mit der kanonischen Inklusion $B \hookrightarrow B^*$. (Die "Wörter" sind also formal Tupel über B; man schreibt diese dann als Wörter und nennt die Elemente aus B *Buchstaben.* Man beachte hier, dass B^0 einelementig ist. Dieses eine Element wird *leeres Wort* genannt und mit $\sqcup$ bezeichnet.)

d) In der Kategorie der Gruppen:

Wir fixieren eine zu B disjunkte Menge, genannt B^{-1}, mit einer Bijektion $B \to B^{-1}$. Das Bild eines Elementes $b \in B$ bezeichen wir mit b^{-1}. (Das ist erstmal nur eine Notation.)

Wir nennen nun ein Wort auf $B \cup B^{-1}$ *reduziert*, falls für kein $b \in B$ der Buchstabe b neben b^{-1} steht, d.h. weder die Kombination bb^{-1} noch die Kombination $b^{-1}b$ in dem Wort vorkommt.

Wir haben eine offensichtliche Verknüpfung reduzierter Wörter (mittels "kürzen").

Nun bildet, was auch zu zeigen ist, die Menge reduzierten Wörter, sagen wir $\mathrm{red}(B \cup B^{-1})$, eine Gruppe.

(*Achtung.* Für $b \in B$ haben wir dann das Element $b \circ b^{-1} = e$ in der Gruppe, aber das *Wort* bb^{-1} ist kein Gruppenelement und e ist das "leere Wort".)

Wir betrachten nun diese Gruppe ist zusammen mit der kanonischen Inklusion $B \hookrightarrow \mathrm{red}(B \cup B^{-1})$.

Notation. Die soeben eingeführte *freie Gruppe* auf der Menge B wird mit F^B, F_B, $F(B)$ oder ähnlich bezeichnet.

Aufgabe 4. Es sei eine Kategorie $\mathcal{C}$ gegeben, in der es zu je zwei Objekten ein Produkt gibt.
Wenn wir im Folgenden für Objekte X und Y "$X \times Y$" schreiben, dann meinen wir ein fest gewähltes Objekt, welches zusammen mit fest gewählten Morphismen $X \times Y \longrightarrow X$, $X \times Y \longrightarrow Y$ ein Produkt ist. Beachten Sie, dass die Morphismen immer "mitgedacht" werden, auch wenn man sie nicht hinschreibt.
Produkte sind ja "im Wesentlichen eindeutig"; trotzdem muss man sie "wählen". Wir brauchen für das Folgende kein Auswahlaxiom, da wir nur endlich viele Objekte betrachten.
Zeigen Sie:

a) In $\mathcal{C}$ existieren beliebige endliche Produkte (d.h. Produkte endlich vieler Objekte).

b) Für Objekte X, Y, Z von $\mathcal{C}$ ist $(X \times Y) \times Z \simeq X \times (Y \times Z)$ in $\mathcal{C}$.