

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE ÜBUNGSBLATT NR. 10

Im Satz von Brown werden Gruppoide auf einer konstanten Menge von Objekten betrachtet. Dies legt nahe, dass man hierfür eine geeignete Theorie entwickeln sollte, mit der man dann mittels des Satzes von Brown Fundamentalgruppoiden berechnen kann.

Dies machen wir im Folgenden. Als Krönung wollen wir dann hiermit – nur ausgehend von der Eigenschaft von Intervallen, einfach zusammenhängend zu sein, und mittels des Satzes von Brown – die Fundamentalgruppe des Kreises bestimmen.

Wir geben uns also eine Menge A vor. Ein A -Gruppoid sei ein Gruppoid mit Objektmenge A . Für A -Gruppoiden G und H sei ein *Morphismus von A -Gruppoiden* ein Funktor von G nach H , der konstant auf der Objektmenge, also auf A ist.

Die so definierten A -Gruppoiden und A -Gruppoidhomomorphismen bilden (mit der Komposition von Funktoren) eine Kategorie.

Es ist hier naheliegend, zu “vergessen”, dass die A -Gruppoiden kleine Kategorien und die A -Gruppoidhomomorphismen Funktoren sind. Die intuitive Vorstellung sollte sein: Die Elemente von A sind *Indices* oder vielleicht noch besser *Labels* oder vielleicht auch *Punkte*. Die *Elemente* eines A -Gruppoids sind das, was wir bisher als Morphismen kennen. Diese haben jeweils eine *Quelle* und ein *Ziel* in A ; diese Begriffe behalten wir bei. Wir können uns die Elemente also auch als Pfeile vorstellen, was auch die Idee von Punkten für die Elemente von A rechtfertigt. Wir haben nun eine partielle Verknüpfung auf der Menge der Elemente des Gruppoids passend zu den Labels.

Als *Notationen* bietet sich nun etwas an, was für Gruppen üblich ist, z.B. $g, h, \dots$ für Elemente und $\varphi, \psi, \dots$ für Homomorphismen. Da wir die Menge der Labels mit A bezeichnen, bietet sich für die Labels $a, b, \dots$ an; wenn wir uns Indices vorstellen, wäre $i, j, \dots$ auch nicht schlecht, man könnte aber auch $p, q, \dots$ benutzen, um an Punkte zu erinnern. Ich schlage vor, dass Sie $a, b, \dots$ verwenden. Die Quelle eines Elements g bezeichnen wir mit $Q(g)$ und das Ziel mit $Z(g)$. Die übliche “Pfeilschreibweise”, also z.B. $g : a \longrightarrow b$ benutzen wir auch.

In Anlehnung zum neutralen Element einer Gruppe nennen wir die Identität an a *neutrales Element* an a und bezeichnen dieses Element mit e_a .

Beachten Sie: In einer Gruppe haben wir ein einziges, man kann sagen “globales” neutrales Element. Nun haben wir zu jedem Label ein einzelnes neutrales Element, das wir uns als “lokales” neutrales Element vorstellen können. Dies ist eng damit verknüpft, dass wir nun nur eine partielle Verknüpfung auf der Menge der Elemente haben.

Wie bei anderen algebraischen Objekten benutzen wir dann auch dieselbe Notation für ein A -Gruppoid und seine unterliegende Menge von Elementen, soweit dies sinnvoll ist. Ferner legen wir fest: Für ein A -Gruppoid G und Label $a, b \in A$ sei $G_{a,b}$ die Menge der Elemente mit Quelle a und Ziel b . (Diese Menge ist natürlich gleich $\text{Mor}_G(a, b)$, aber das wollen wir ja vergessen.) Damit ist dann “als Menge” $G = \bigcup_{a,b \in A} G_{a,b}$.

Es sei weiterhin A eine beliebige Menge.

Aufgabe 1. Entwickeln Sie die Grundlagen für eine Theorie der A -Gruppoiden analog zu den üblichen Konzepten für Gruppen. Dies beinhaltet neben A -Untergruppoiden (das ist trivial) auch Kerne, normale A -Untergruppoiden und Kokerne (Quotienten) nach normalen A -Untergruppoiden.

Alles soll in offensichtlicher Weise die Konzepte für Gruppen so verallgemeinern, dass sich die bekannten Aussagen hierzu auch verallgemeinern. Das heißt konkret:

- Ein Homomorphismus soll genau dann injektiv sein, wenn sein Kern trivial ist.
- Kerne sollen normal sein und normale Untergruppoiden sollen Quotienten definieren, deren Kern dann das vorgegebene normale Untergruppoid ist.
- Ein Homomorphismus $\varphi : G \longrightarrow H$ soll einen Isomorphismus $G/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} H$ induzieren.

Achtung! Nicht jedes A -Untergruppoid liegt in einem normalen A -Untergruppoid. Sie müssen A -Untergruppoiden mit einer bestimmten Eigenschaft betrachten, für die Sie sinnvollerweise auch einen Begriff einführen sollten.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass in der Kategorie der A -Gruppoiden Produkte und Koproducte und Kofaserprodukte existieren. (Wenn Sie eindeutige “Konstruktionen” für Koproducte und Kofaserprodukte angeben, bieten sich für die so definierten Gruppoiden dann die Namen *freies Produkt* und *amalgamiertes Produkt* an.)

Aufgabe 3. Wir wollen eine Art freie Elemente definieren. Wir haben einen Vergissfunktor, indem wir einem A -Gruppoid die Menge seiner Elemente zuordnen. Aber wenn A mehr als ein Element hat, gibt es hiermit keine freien Elemente auf nicht-trivialen Basis-mengen. Denn: Morphismen von A -Gruppoiden verändern Quelle und Ziel der Elemente nicht.

Es ist nun naheliegend, die Definition von freien Elementen entsprechend anzupassen. Hierzu gehen wir von einer Menge B zusammen mit Abbildungen $Q : B \longrightarrow A$, $Z : B \longrightarrow A$ aus. Diese induzieren eine Partition $B = \dot{\bigcup} B_{a,b \in G}$ – wie bei Gruppoiden.

Es sei nun (B, Q, Z) so eine *Menge mit Quelle- und Zielfunktion*. Schreiben Sie auf, was ein *freies A -Gruppoid bezüglich (B, Q, Z)* sei sollte und zeigen Sie, dass solche Gruppoiden stets existieren.

Aufgabe 4. Geben Sie an, wie man A -Gruppoiden kombinatorisch beschreiben kann, das heißt mittels Erzeugern und Relationen. Wenden Sie dies auf kokartesische Diagramme oder anders gesagt auf amalgamierte Produkte an.

Wir kommen nun zur Anwendung der Berechnung der Fundamentalgruppe des Kreises. Hierzu noch eine Bemerkung: Wir haben oftmals für einen punktierten Raum (X, x_0) die der Fundamentalgruppe zugrundeliegende Menge als $[S^1, 1; X, x_0]$ definiert. Dies ist hier nicht adäquat. Denn wir wollen auch für je zwei Punkte in einem topologischen Raum X die Menge $\pi_1(X; x_1, x_2)$ betrachten und $\pi_1(X, x_0)$ soll hiervon ein Spezialfall sein. Man sollte also von Wegen auf dem Einheitsintervall I ausgehen.

Aufgabe 5. Zeigen Sie in der Art wie zu Beginn beschrieben, dass die Gruppe $\pi_1(S^1, 1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, genauer, dass sie von der Klasse der Projektion $p : I \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ frei erzeugt wird.