Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 1

Aufgabe 1. Schließen Sie aus der Aussage:

> Für $m \neq n$ ist S^m nicht homöomorph zu S^n.

Die Aussage:

> Für $m \neq n$ ist $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

In den folgenden Aufgaben geht es um den Themenkomplex des Transports der Topologie eines topologischen Raumes mittels einer Abbildung.

Aufgabe 2. Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Raume, Y eine Menge und $(f_i : X_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen.
Die von den Abbildungen f_i $(i \in I)$ *koinduzierte Topopogie* auf Y ist wie folgt definiert: Eine Teilmenge A von Y ist genau dann offen, wenn für alle $i \in I$ ihr Urbild $f_i^{-1}(A)$ offen in X_i ist.
Zeigen Sie:

a) Die koinduzierte Topologie ist in der Tat eine Topologie auf Y.

b) Bezüglich dieser Topologie ist eine Teilmenge A genau dann abgeschlossen, wenn ihre Urbilder $f_i^{-1}(A)$ abgeschlossen sind.

c) Die koinduzierte Topologie ist die feinste Topologie auf Y, bezüglich welcher die f_i $(i \in I)$ stetige Abbildungen sind.

Aufgabe 3. Es sei X ein topologischer Raum und R eine Äquivalenzrelation auf der unterliegenden Menge von X. (Wir schreiben $x \sim_R y$ für xRy.)
Wir haben die Projektion $p : X \longrightarrow X_{/\sim_R}$, $x \mapsto [x]_{\sim_R}$. Die von dieser Abbildung koinduzierte Topologie auf $X_{/\sim_R}$ heißt *Quotiententopologie* auf $X_{/\sim_R}$. Den Raum $X_{/\sim_R}$ nennen wir *den (!) Quotienten-* oder *Faktorraum von X nach R.* (Siehe Bemerkung unten!)

a) Zeigen Sie: Das Tupel $(X_{/\sim_R}, p)$ erfüllt die folgende *universelle Eigenschaft*:

> Für alle Tupel (Z, r), wobei Z ein topologischer Raum und $r : X \longrightarrow Z$ eine stetige Abbildung mit $\forall x, x' \in X : x \sim_R x' \longrightarrow r(x) = r(x')$ ist,[1] gibt es genau eine stetige Abbildung $f : X_{/\sim_R} \longrightarrow Z$ mit $f \circ p = r$.

Es sei nun (Y, q) ein Tupel bestehend aus einem topologischen Raum Y und einer stetigen Abbildung $q : X \longrightarrow Y$ mit:

$$(*) \qquad \forall x, x' \in X : x \sim_R x' \longrightarrow q(x) = q(x')$$

Wir sagen, dass (Y, q) die *universelle Quotienteneigenschaft von X nach R* besitzt, falls gilt:

[1] Für die logische Implikation schreibe ich – wie in der Logik üblich – "$\longrightarrow$". Für einen Schluss „(Also gilt ...)“ schreibe ich unter anderem "$\Longrightarrow$".

Für alle Tupel (Z, r), wobei Z ein topologischer Raum und $r : X \longrightarrow Z$ eine stetige Abbildung mit $\forall x, x' \in X : x \sim_R x' \longrightarrow r(x) = r(x')$ ist, gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \longrightarrow Z$ mit $f \circ q = r$.

b) Zeigen Sie: Wenn (Y_1, q_1) und (Y_2, q_2) zwei Tupel wie oben sind (beide erfüllen $(*)$) und die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzen, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y_1 \longrightarrow Y_2$ mit $f \circ q_1 = q_2$. Diese Abbildung ist dann ein Homöomorphismus.

c) Insbesondere gilt: Wenn (Y, q) wie oben ist und die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzt, dann ist Y mittels eines "kanonischen" Homöomorphismus homöomorph zu $X_{/\sim_R}$.

d) Geben Sie ein explizites Kriterium dafür an, dass ein Tupel (Y, q), wobei Y ein topologischer Raum und $q : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung ist, $(*)$ erfüllt und die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzt. (Sie können die Tauglichkeit Ihres Kriteriums dann an der nächsten Aufgabe testen.)

Bemerkung. Wenn (Y, q) die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzt, kann man (Y, q) auch *einen (!) Quotienten-* oder *Faktorraum von X nach R* nennen. Es ist hier wichtig, dass q ein Teil des Datums ist. In diesem Sinne kann man auch definieren: *Der Quotienten-* oder *Faktorraum* sei das Tupel $(X_{/\sim_R}, p)$. Hier kann aber p weglassen, da man es auch wieder zurückgewinnen kann.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Bezüglich der durch $0 \sim 1$ erzeugten Äquivalenzrelation auf $I := [0, 1]$ hat

$$I \longrightarrow S^1 \ , \ t \mapsto e^{2\pi t}$$

die universelle Quotienteneigenschaft.

Aufgabe 5. Es sei $r : X \longrightarrow Z$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Wir definieren wie folgt eine Äquivalenzrelation R auf X: $x \sim_R x' :\Longleftrightarrow r(x) = r(x')$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Die Abbildung r ist surjektiv und die Topologie von Z ist die von r koinduzierte Topologie.

ii) (Z, r) hat die universelle Quotienteneigenschaft bezüglich von X nach R.

iii) Die nach Aufgabe 2 a) existierende und eindeutige stetige Abbildung $f : X_{/\sim_R} \longrightarrow Z$ mit $f \circ p = r$ (mit p wie dort) ist ein Homöomorphismus.

Definition. Wenn $r : X \longrightarrow Z$ die beschriebenen Eigenschaften hat, heißt r *identifizierend.*