Algebraische Topologie

Claus Diem

15. Oktober 2021

Literatur

Es gibt viele Bücher zur Algebraischen Topologie. Ich benutze für die Vorlesung im Wesentlichen die folgenden drei.

Stöcker & Zieschang: Algebraische Topologie
Bredon: Algebraic Topology
Laures & Szymik: Grundkurs Topologie

Motivation und erste Begriffe und Konzepte

Motivation aus der Physik

Frage In der Physik spricht man von „Freiheitsgraden". Was heißt das? Was heißt das System hat n Freiheitsgrade"?

Antwort Das heißt: Man kann die möglichen Zustände des Systems mit den Punkten einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit (möglicherweise mit Rand) identifizieren.

Möglicher Einwand Ist dann „die Anzahl der Freiheitsgrade" wirklich eine Invariante des Systems?

Anders ausgedrückt:

Präzise Frage Kann man von *der Dimension* einer Mannigfalitigkeit sprechen?

Grundlegende Frage Ist für $1 \leq m < n$ $\mathbb{R}^m$ wirklich nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$?

Erste Begriffe und Ideen

Idee Statt $\mathbb{R}^n$ betrachten wir S^n, die n-dimensionale Einheitssphäre. Das ist "starrer". Wir zeigen: $S^m \not\approx S^n$ für $m \neq n$ und schließen $\mathbb{R}^m \not\approx \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten zunächst als Beispiel $m = 1$.

Wir wollen zeigen: $S^1 \not\approx S^n$ für $n \geq 2$.

Hierzu betrachten wir "geschlossene Wege" auf S^n.

Idee Für $n \geq 2$ kann jeder geschlossene Weg stetig in einen konstanten Weg transformiert werden, kurz: Er kann *zusammengezogen* werden. Aber die Identität $S^1 \longrightarrow S^1$ kann nicht zusammengezogen werden.

Diese Idee könnte auch für beliebiges $m < n$ funktionieren ....

Sei $I := [0; 1]$ das Einheitsintervall.

Seien nun X und Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ stetig.

Idee Eine *Homotopie* von f nach g ist eine Familie stetiger Abbildungen $(h_i)_{i \in I}$ derart, dass die Zuordnung $i \mapsto h_i$ stetig ist.

Problem hierbei: Wir bräuchten erstmal eine Topologie auf $\mathcal{C}(X, Y) \cdots$.

Definition Eine *Homotopie von f nach g* (oder: eine *Homotopie zwischen f und g* ist eine stetige Abbildung $H : I \times X \longrightarrow Y$ mit $H(0, \_) = f, H(1, \_) = g$. (Also: $H(0, x) = f(x), H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in X$.)

Oder auch: Mit $h_i := H(i, \_)$ ist $h_0 = f, h_1 = g$.

Man kann auch sagen:

Definition Eine *Homotopie von f nach g* ist eine Familie $(h_i)_{i \in I}$ derart, dass $H : I \times X \longrightarrow Y, (i, x) \mapsto h_i(x)$ stetig ist und $h_0 = f, h_1 = g$ ist.

Bemerkungen zur Terminologie

- Meist steht das Einheitsintervall “hinten”, d.h. man betrachtet $H : X \times I \longrightarrow Y$. Hier folge ich Laures und Szymik.
- In Laures und Szymik heißt allerdings $H : I \times X \longrightarrow Y$ *Homotopie von X nach Y*. Das ist unintuitiv und auch eher unüblich. Ich benutze diesen Sprachgebrauch nicht.

Definition Wenn es eine Homotopie von f nach g gibt, heißen f und g *homotop*. Wir schreiben dann $f \simeq g$.

Bemerkung und Definition Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}(X, Y)$. Die Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklassen* (stetiger Abbildungen von X nach Y).

Notation Die Homotopieklasse einer stetigen Abbildung f wird mit $[f]$ bezeichnet, die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y mit $[X;Y]$.

Bemerkung Es seien $g_0, g_1 : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander, $f : U \longrightarrow X$ und $h : Y \longrightarrow Z$ stetig. Dann sind auch $h \circ g_0 \circ f : U \longrightarrow Z$ und $h \circ g_1 \circ f : U \longrightarrow Z$ homotop zueinander.

Denn: Für eine Homotopie $(g_i)_{i\in I}$ von g_0 nach g_1 ist $(h \circ g_i \circ f)_{i\in I}$ eine Homotopie von $h \circ g_0 \circ f$ nach $h \circ g_1 \circ f$.

Definition Eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *nullhomotop*, falls sie homotop zu einer konstanten Abbildung (von X nach Y) ist.

Bemerkung Es seien $f : U \longrightarrow X, g : X \longrightarrow Y, h : Y \longrightarrow Z$ stetig. Wenn nun g nullhomotop ist, dann ist es auch $h \circ g \circ f$.

Beispiel Es sei B^n der n-dimensionale offene Einheitsball. Die Identität $\mathrm{id} : B^n \longrightarrow B^n$ ist nullhomotop: Durch $h_t(x) := t \cdot x$ wird eine Homotopie zwischen id und $x \mapsto 0$ definiert. Da $B^n \approx \mathbb{R}^n$ ist, ist auch $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nullhomotop. Somit ist auch jede stetige Abbildung von oder nach $\mathbb{R}^n$ nullhomotop.

Es scheint zu gelten:

Satz A *Für $m < n$ gibt es keine surjektive stetige Abbildung $S^m \longrightarrow S^n$.*

Damit: Für $m < n$ liegt das Bild einer stetigen Abbildung $S^m \longrightarrow S^n$ in einem zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphen Raum.

Somit (auf Grundlage von Satz A):

Satz B *Für $m < n$ ist jede stetige Abbildung $S^m \longrightarrow S^n$ nullhomotop.*

Es scheint auch zu gelten:

Satz C *Die Identität $S^n \longrightarrow S^n$ ist nicht null-homotop.*

Nun haben wir (auf Grundlage der unbewiesenen Sätze A und C):

Satz D *Für $1 \leq m < n$ ist S^m nicht homöomorph zu S^n.*

Beweis. Angenommen für irgendwelche m, n mit $m < n$ wäre S^m wäre homöomorph zu S^n. Seien dann $f : S^m \longrightarrow S^n$ und $g : S^n \longrightarrow S^n$ zueinander inverse Homöomorphismen. Dann wäre insbesondere $g \circ f = \mathrm{id}_{S^m}$. Nun wäre einerseits f nullhomotop und somit auch $g \circ f$, während anderseits id_{S^m} nicht nullhomotop ist. Widerspruch! □

Nun ist es eine Übungsaufgabe, zu zeigen:

Satz E *Für $1 \leq m < n$ ist $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Ein etwas anderer Zugang hierzu, basierend auf denselben Ideen:

Es sei X ein topologischer Raum.

Definition und Bemerkung Ein *Weg in X* ist normalerweise eine stetige Abbildung w von einem Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$) nach X. Hier heißt dann $w(0)$ der *Anfangs-* und $w(1)$ der *Endpunkt* des Weges. So ein Weg liefert durch Geschwendigkeitsänderung einen Weg *auf dem Einheitsintervall I*. Wenn wir in diese Vorlesung von Wegen sprechen meinen wir meist Wege auf I. (Man könnte auch *normierte Wege* sagen.)

Wenn $w(a) = w(b)$ ist, heißt der Weg *geschlossen.* Wege auf dem Einheitsintervall (nach Y) entsprechen stetigen Abbildungen $S^1 \longrightarrow X$ (mittels $I \longrightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi t}$, d.h. insbesondere $0 \mapsto 1$).

Definition X heißt *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte mit einem Weg verbunden werden können.

Bemerkung Es sei U ein weiterer topologischer Raum und X wegzusammenhängend. Dann sind je zwei konstante Abbildungen $U \longrightarrow X$ homotop zueinander.

Denn: Es seien $x_0, x_1 \in X$. Ein Weg $w : I \longrightarrow X$ von x_0 nach x_1 in X definiert eine Homotopie $I \times U \longrightarrow X, (i, x) \mapsto w(i)$ von $u \mapsto x_0$ nach $u \mapsto x_1$.

Notation Wenn X wegzusammenhängend ist und U ein belieiber Raum ist, wird die Homotopieklasse konstanter Abbildungen von U nach X mit $\mathcal{O}$ bezeichnet.

Satz A und Satz C kann man dann auch so ausdrücken:

- Für $1 \leq m < n$ ist $[S^m; S^n] = \{\mathcal{O}\}$.
- Für $m \geq 1$ ist $\mathcal{O} \neq [\mathrm{id}_{S^m}] \in [S^m; S^m]$, insbesondere enthält $[S^m; S^m]$ mehr als ein Element.

(Das Ersetzen von S^n in Satz C durch S^m im zweiten Punkt ist Absicht; mehr dazu gleich.)

Es sei T ein fester topologischer Raum („Testraum“).

Es seien X, Y zwei topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ stetig. Dann haben wir

$$f_* : \mathcal{C}(T, X) \longrightarrow \mathcal{C}(T, Y) \ , \ g \mapsto f \circ g$$

Diese Abbildung induziert eine Abbildung

$$f_* : [T; X] \longrightarrow [T; Y] \ , \ [g] \mapsto [f \circ g] \ .$$

Es seien nun zwei Räume X und Y homöomorph mit zueinander inversen Homöomorphien $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow X$. Dann ist $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{[T;X]} : [T; X] \longrightarrow [T; X]$ und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{[T;Y]} : [T; Y] \longrightarrow [T; Y]$ und somit sind f_* und g_* zueinander inverse Bijektionen. Also ist $[T; X] \approx [T; Y]$, mit anderen Worten: Die beiden Mengen haben dieselbe Kardinalität.

Anders ausgedrückt: Wenn die beiden Mengen verschiedene Kardinalität haben, sind die Räume nicht homöomorph zueinander. Dies gilt für jeden beliebigen Raum T, insbesondere für $T = S^i, i \geq 1$.

Kategorientheoretische Beschreibung

Es sei T ein fester topologischer Raum. Wir haben einen (kovarianten) Funktor

$$\mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

mit:

- auf Objekten (=topologische Räumen): $X \mapsto [T; X]$.
- auf Morphismen (= stetigen Abbildungen): $(f : X \longrightarrow Y) \mapsto f_* : [T; X] \longrightarrow [T; Y]$.

Wenn nun $X \approx Y$ ist, ist auch $[T; X] \approx [T; Y]$, oder:

Wenn $[T; X] \not\approx [T; Y]$ ist, ist $X \not\approx Y$.

Wir können also mittels eines „Testraums“ T (z.B. $T = S^m$) topologischen Räumen Mengen zuordnen und mittels dieser Mengen „testen“, ob zwei Räume zueinander homöomorph sind: Wenn die Mengen nicht bijektiv zueinander sind, sind die Räume nicht homöomorph.

Die Methode ist aber noch relativ schwach, da $[T; X]$ nur Mengen sind und wir für die „Tests“ nur die Kardinalität benutzen. Mit einer Variante hervon erhält man für $T = S^i$ $(i \geq 1)$ Gruppen. Wenn dann die Gruppen nicht isomorph sind, sind die Räume nicht homöomorph.

Grundidee der algebraischen Topologie

Man definiert und untersucht Funktoren von der Kategorie der topologischen Räume oder verwandten Kategorien in “algebraische Kategorien” wie die Kategorien der Gruppen, der Ringe, der R-Moduln für einen Ring R oder auch in die Kategorie der Mengen.

Hiermit ordnet man topologischen Räumen oder “verwandten Objekten” “algebraische Invarianten” zu. Wenn für zwei Räume die Invarianten nicht isomorph sind, sind die Räume nicht homöomorph.

Für eine bestimmte “Art” topologischer Räume kann man dann versuchen, eine “Klassifikation” von Räumen anzugeben. Das heißt, man gibt eine Liste topologischer Räume der vorgebenen “Art” an derart, dass je zwei Räume der Liste nicht homöomorph zueinander sind und jeder Raum der “Art” homöomorph zu einem (dann gemau einem) Raum der Liste ist.

Ein wichtiges Beispiel ist hier die Klassifikation geschlossener Flächen (=kompakter 2-dimensionaler Mannigfaltigkeiten ohne Rand).