

Algebraische Topologie

Vorlesung im Wintersemester 2020/21

gehalten von Claus Diem

§8 Galoistheorie für Überlagerungen

Reduktion auf eine Faser

Sei B ein wegzusammenhängender Raum, $b_0 \in B$.

Reduktion auf eine Faser

Sei B ein wegzusammenhängender Raum, $b_0 \in B$.

Nun ist $\Pi(B)$ zusammenhängend und damit (als Kategorie) äquivalent zum Gruppoid auf der Menge $\{b_0\}$ mit der Gruppe $\pi_1(B, b_0)$.

Reduktion auf eine Faser

Sei B ein wegzusammenhängender Raum, $b_0 \in B$.

Nun ist $\Pi(B)$ zusammenhängend und damit (als Kategorie) äquivalent zum Gruppoid auf der Menge $\{b_0\}$ mit der Gruppe $\pi_1(B, b_0)$.

Wiederholung dazu

Kollaps eines Gruppoids

Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid mit Labelmenge B . Sei $b_0 \in B$.

Kollaps eines Gruppoids

Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid mit Labelmenge B . Sei $b_0 \in B$.

Wir haben die Inklusion $\iota : G_{b_0, b_0} \hookrightarrow G$.

Kollaps eines Gruppoids

Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid mit Labelmenge B . Sei $b_0 \in B$.

Wir haben die Inklusion $\iota : G_{b_0, b_0} \hookrightarrow G$.

Wir erhalten wie folgt eine Retraktion r von G auf G_{b_0, b_0} mit einer natürlichen Transformation $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$.

Kollaps eines Gruppoids

Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid mit Labelmenge B . Sei $b_0 \in B$.

Wir haben die Inklusion $\iota : G_{b_0, b_0} \hookrightarrow G$.

Wir erhalten wie folgt eine Retraktion r von G auf G_{b_0, b_0} mit einer natürlichen Transformation $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$.

Wähle zu jedem $b \in B$ ein $g \in G_{b, b_0}$. Für $b = b_0$ wähle e_{b_0} . Setze $\Phi_b := g$.

Kollaps eines Gruppoids

Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid mit Labelmenge B . Sei $b_0 \in B$.

Wir haben die Inklusion $\iota : G_{b_0, b_0} \hookrightarrow G$.

Wir erhalten wie folgt eine Retraktion r von G auf G_{b_0, b_0} mit einer natürlichen Transformation $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$.

Wähle zu jedem $b \in B$ ein $g \in G_{b, b_0}$. Für $b = b_0$ wähle e_{b_0} . Setze $\Phi_b := g$.

Definiere nun r :

Setze für $b \in B$: $r(b) := b_0$.

Für $g : b_1 \rightarrow b_2$ definiere $r(g)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} b_1 & \xrightarrow{\Phi_{b_1}} & b_0 \\ g \downarrow & & \downarrow r(g) \\ b_2 & \xrightarrow{\Phi_{b_2}} & b_0 \end{array} .$$

Kollaps eines Gruppoids

Wähle zu jedem $b \in B$ ein $g \in G_{b,b_0}$. Für $b = b_0$ wähle e_{b_0} . Setze $\Phi_b := g$.

Definiere r :

Setze für $b \in B$: $r(b) := b_0$.

Für $g : b_1 \rightarrow b_2$ definiere $r(g)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} b_1 & \xrightarrow{\Phi_{b_1}} & b_0 \\ g \downarrow & & \downarrow r(g) \\ b_2 & \xrightarrow{\Phi_{b_2}} & b_0 \end{array} .$$

Kollaps eines Gruppoids

Wähle zu jedem $b \in B$ ein $g \in G_{b,b_0}$. Für $b = b_0$ wähle e_{b_0} . Setze $\Phi_b := g$.

Definiere r :

Setze für $b \in B$: $r(b) := b_0$.

Für $g : b_1 \rightarrow b_2$ definiere $r(g)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} b_1 & \xrightarrow{\Phi_{b_1}} & b_0 \\ g \downarrow & & \downarrow r(g) \\ b_2 & \xrightarrow{\Phi_{b_2}} & b_0 . \end{array}$$

Wir haben $r : G \longrightarrow G_{b_0,b_0}$ mit $r \circ \iota = \text{id}_G$

Kollaps eines Gruppoids

Wähle zu jedem $b \in B$ ein $g \in G_{b,b_0}$. Für $b = b_0$ wähle e_{b_0} . Setze $\Phi_b := g$.

Definiere r :

Setze für $b \in B$: $r(b) := b_0$.

Für $g : b_1 \rightarrow b_2$ definiere $r(g)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} b_1 & \xrightarrow{\Phi_{b_1}} & b_0 \\ g \downarrow & & \downarrow r(g) \\ b_2 & \xrightarrow{\Phi_{b_2}} & b_0 . \end{array}$$

Wir haben $r : G \longrightarrow G_{b_0,b_0}$ mit $r \circ \iota = \text{id}_G$

Kollaps eines Gruppoids

Wähle zu jedem $b \in B$ ein $g \in G_{b,b_0}$. Für $b = b_0$ wähle e_{b_0} . Setze $\Phi_b := g$.

Definiere r :

Setze für $b \in B$: $r(b) := b_0$.

Für $g : b_1 \rightarrow b_2$ definiere $r(g)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} b_1 & \xrightarrow{\Phi_{b_1}} & b_0 \\ g \downarrow & & \downarrow r(g) \\ b_2 & \xrightarrow{\Phi_{b_2}} & b_0 . \end{array}$$

Wir haben $r : G \longrightarrow G_{b_0,b_0}$ mit $r \circ \iota = \text{id}_G$ und $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$.

Reduktion auf eine Faser

Generalvoraussetzung. Sei ab nun B ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum.

Satz. Der Faserungsfunktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

ist ein Isomorphismus von Kategorien.

Reduktion auf eine Faser

Generalvoraussetzung. Sei ab nun B ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum.

Satz. Der Faserungsfunktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

ist ein Isomorphismus von Kategorien.

Satz. Der Funktor

$$M : \mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{R}ep$$

$$(X, p) \longmapsto M_{X/B}$$

$$f \longmapsto M_f$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor

$$M : \mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{R}ep$$

$$(X, p) \longmapsto M_{X/B}$$

$$f \longmapsto M_f$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor

$$M : \mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{R}ep$$

$$(X, p) \longmapsto M_{X/B}$$

$$f \longmapsto M_f$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Sei $b_0 \in B$. Dann ist das Gruppoid $\Pi(B)$ äquivalent zum Gruppoid mit einem Label b_0 und Gruppe $\pi_1(B, b_0)$.

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor

$$M : \mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{R}ep$$

$$(X, p) \longmapsto M_{X/B}$$

$$f \longmapsto M_f$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Sei $b_0 \in B$. Dann ist das Gruppoid $\Pi(B)$ äquivalent zum Gruppoid mit einem Label b_0 und Gruppe $\pi_1(B, b_0)$.

Wir werden gleich sehen:

Die Kategorien $\Pi(B) - \mathcal{R}ep$ und $\pi_1(B, b_0) - \mathcal{R}ep$ sind äquivalent.

Reduktion auf eine Faser

Lemma. Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid, b_0 ein Label. Dann ist die Kategorie der G_{b_0, b_0} -Darstellungen äquivalent zur Kategorie der G -Darstellungen.

Reduktion auf eine Faser

Lemma. Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid, b_0 ein Label. Dann ist die Kategorie der G_{b_0, b_0} -Darstellungen äquivalent zur Kategorie der G -Darstellungen.

Beweis

Seien $\iota : G_{b_0, b_0} \longrightarrow G$, $r : G \longrightarrow G_{b_0, b_0}$, $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$ wie oben ($r \circ \iota = \text{id}_{G_{b_0, b_0}}$).

Reduktion auf eine Faser

Lemma. Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid, b_0 ein Label. Dann ist die Kategorie der G_{b_0, b_0} -Darstellungen äquivalent zur Kategorie der G -Darstellungen.

Beweis

Seien $\iota : G_{b_0, b_0} \longrightarrow G$, $r : G \longrightarrow G_{b_0, b_0}$, $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$ wie oben ($r \circ \iota = \text{id}_{G_{b_0, b_0}}$).

Für eine Darstellung $\mathcal{R}$ von G haben wir die Darstellung $\mathcal{R} \circ \iota$ von G_{b_0, b_0} .

Reduktion auf eine Faser

Lemma. Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid, b_0 ein Label. Dann ist die Kategorie der G_{b_0, b_0} -Darstellungen äquivalent zur Kategorie der G -Darstellungen.

Beweis

Seien $\iota : G_{b_0, b_0} \longrightarrow G$, $r : G \longrightarrow G_{b_0, b_0}$, $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$ wie oben ($r \circ \iota = \text{id}_{G_{b_0, b_0}}$).

Für eine Darstellung $\mathcal{R}$ von G haben wir die Darstellung $\mathcal{R} \circ \iota$ von G_{b_0, b_0} .

Für eine Darstellung $\mathcal{S}$ von G_{b_0, b_0} haben wir die Darstellung $\mathcal{S} \circ r$ von G .

Reduktion auf eine Faser

Lemma. Sei G ein zusammenhängendes Gruppoid, b_0 ein Label. Dann ist die Kategorie der G_{b_0, b_0} -Darstellungen äquivalent zur Kategorie der G -Darstellungen.

Beweis

Seien $\iota : G_{b_0, b_0} \longrightarrow G$, $r : G \longrightarrow G_{b_0, b_0}$, $\Phi : \text{id}_G \xrightarrow{\sim} \iota \circ r$ wie oben ($r \circ \iota = \text{id}_{G_{b_0, b_0}}$).

Für eine Darstellung $\mathcal{R}$ von G haben wir die Darstellung $\mathcal{R} \circ \iota$ von G_{b_0, b_0} .

Für eine Darstellung $\mathcal{S}$ von G_{b_0, b_0} haben wir die Darstellung $\mathcal{S} \circ r$ von G .

Es ist $\mathcal{S} \circ r \circ \iota = \mathcal{S}$,

Φ induziert einen Isomorphismus $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R} \circ \iota \circ r$.



Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor

$$M : \mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{R}ep$$

$$(X, p) \longmapsto M_{X/B}$$

$$f \longmapsto M_f$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor

$$M : \mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{R}ep$$

$$(X, p) \longmapsto M_{X/B}$$

$$f \longmapsto M_f$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Soeben gesehen:

Die Kategorie $\Pi(B) - \mathcal{R}ep$ ist äquivalent zur Kategorie $\pi_1(B, b_0) - \mathcal{R}ep$

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor

$$M : \mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{R}ep$$

$$(X, p) \longmapsto M_{X/B}$$

$$f \longmapsto M_f$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Soeben gesehen:

Die Kategorie $\Pi(B) - \mathcal{R}ep$ ist äquivalent zur Kategorie

$\pi_1(B, b_0) - \mathcal{R}ep$

... oder zu $\pi_1(b, b_0) - \mathcal{E}ns$.

Reduktion auf eine Faser

Nochmal explizit:

Sei $b_0 \in B$.

Wir erhalten den folgenden Funktor von $\mathcal{C}ov(B)$ nach $\pi_1(B, b_0)$:

Einer Überlagerung (X, p) ordnen wir die Faser $p^{-1}(b_0)$ als $\pi_1(B, b_0)$ -Menge zu.

Einem Morphismus $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ordnen wir den Morphismus von $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen $f|_{p^{-1}(b_0)} : p^{-1}(b_0) \longrightarrow q^{-1}(b_0)$ zu.

Reduktion auf eine Faser

Nochmal explizit:

Sei $b_0 \in B$.

Wir erhalten den folgenden Funktor von $\mathcal{Cov}(B)$ nach $\pi_1(B, b_0)$:

Einer Überlagerung (X, p) ordnen wir die Faser $p^{-1}(b_0)$ als $\pi_1(B, b_0)$ -Menge zu.

Einem Morphismus $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ordnen wir den Morphismus von $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen $f|_{p^{-1}(b_0)} : p^{-1}(b_0) \longrightarrow q^{-1}(b_0)$ zu.

Satz. Der soeben definierte Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien von $\mathcal{Cov}(B)$ nach $\pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns$.

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor $\mathcal{C}ov(B) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor $\mathcal{C}ov(B) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Bemerkung. Wenn wir zu jedem Punkt $b \in B$ eine Wegklasse $\Phi_b : b \rightarrow b_0$ wählen, erhalten wir die Äquivalenz von $\Pi(B)$ und $\pi_1(B, b_0)$ und damit eine Umkehrung des obigen Funktors.

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor $\mathcal{C}ov(B) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Bemerkung. Wenn wir zu jedem Punkt $b \in B$ eine Wegklasse $\Phi_b : b \rightarrow b_0$ wählen, erhalten wir die Äquivalenz von $\Pi(B)$ und $\pi_1(B, b_0)$ und damit eine Umkehrung des obigen Funktors.

Für eine $\pi_1(B, b_0)$ -Menge F ist die unterliegende Menge des hierdurch definierten topologischen Raums gleich

$$\bigsqcup_{b \in B} F = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times F = B \times F .$$

Reduktion auf eine Faser

Satz. Der Funktor $\text{Cov}(B) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns$ ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Bemerkung. Wenn wir zu jedem Punkt $b \in B$ eine Wegklasse $\Phi_b : b \rightarrow b_0$ wählen, erhalten wir die Äquivalenz von $\Pi(B)$ und $\pi_1(B, b_0)$ und damit eine Umkehrung des obigen Funktors.

Für eine $\pi_1(B, b_0)$ -Menge F ist die unterliegende Menge des hierdurch definierten topologischen Raums gleich

$$\bigsqcup_{b \in B} F = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times F = B \times F.$$

Die $\Pi(B)$ -Operation ist das Entscheidende:

Für $\alpha : b_1 \rightarrow b_2$ ist $\alpha.(b_1, y) = (b_2, (\Phi_{b_2} \star \alpha \star \Phi_{b_1}^{-1}).y)$.

Galoistheorie

Galoistheorie

Sei $b_0 \in B$.

Wir studieren punktierte Überlagerungen von (B, b_0) .

Galoistheorie

Sei $b_0 \in B$.

Wir studieren punktierte Überlagerungen von (B, b_0) .

Sei zunächst $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Sei $b_0 \in B$.

Wir studieren punktierte Überlagerungen von (B, b_0) .

Sei zunächst $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Für einen Punkt $x_0 \in X$ definiert p genau dann eine punktierte Überlagerung von (X, x_0) nach (B, b_0) , wenn $p(x_0) = b_0$ gilt, d.h. wenn $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ ist.

Galoistheorie

Sei $\mathcal{C}ov(B, b_0)$ die Kategorie der punktierten Überlagerungen von (B, b_0) .

Galoistheorie

Sei $\mathcal{C}ov(B, b_0)$ die Kategorie der punktierten Überlagerungen von (B, b_0) .

Wir ordnen jeder punktierten Überlagerung $p : (X, x_0) \longrightarrow (B, b_0)$ die entsprechende punktierte $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ zu.

Galoistheorie

Sei $\mathcal{C}ov(B, b_0)$ die Kategorie der punktierten Überlagerungen von (B, b_0) .

Wir ordnen jeder punktierten Überlagerung $p : (X, x_0) \longrightarrow (B, b_0)$ die entsprechende punktierte $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ zu.

Wir haben Morphismen von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen und eine entsprechende Kategorie: $\pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns^*$.

Galoistheorie

Sei $\mathcal{C}ov(B, b_0)$ die Kategorie der punktierten Überlagerungen von (B, b_0) .

Wir ordnen jeder punktierten Überlagerung $p : (X, x_0) \longrightarrow (B, b_0)$ die entsprechende punktierte $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ zu.

Wir haben Morphismen von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen und eine entsprechende Kategorie: $\pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns^*$.

Ein Morphismus von punktierten Überlagerungen

$$f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)$$

induziert einen Morphismus von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen

$$(p^{-1}(b_0), x_0) \longrightarrow (q^{-1}(b_0), y_0) .$$

Galoistheorie

Sei $\mathcal{Cov}(B, b_0)$ die Kategorie der punktierten Überlagerungen von (B, b_0) .

Wir ordnen jeder punktierten Überlagerung $p : (X, x_0) \longrightarrow (B, b_0)$ die entsprechende punktierte $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ zu.

Wir haben Morphismen von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen und eine entsprechende Kategorie: $\pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns^*$.

Ein Morphismus von punktierten Überlagerungen

$$f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)$$

induziert einen Morphismus von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen

$$(p^{-1}(b_0), x_0) \longrightarrow (q^{-1}(b_0), y_0) .$$

Wir haben einen Funktor

$$\mathcal{Cov}(B, b_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns^*$$

Wir haben einen Funktor

$$\mathcal{C}ov(B, b_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns^*$$

Wir haben einen Funktor

$$\mathcal{C}ov(B, b_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns^*$$

Satz. Der genannte Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Nun studieren wir (weg-)zusammenhängende punktierte Überlagerungen von (B, b_0) .

Nun studieren wir (weg-)zusammenhängende punktierte Überlagerungen von (B, b_0) .

Für eine Überlagerung $p : (X, x_0) \longrightarrow (B, b_0)$ sind äquivalent:

- i) X ist zusammenhängend.
- ii) X ist wegzusammenhängend.
- iii) $\pi_1(B, b_0)$ operiert transitiv auf $p^{-1}(b_0)$.
- iv) Die Bahn von x_0 unter $\pi_1(B, b_0)$ ist gleich $p^{-1}(b_0)$.

Also:

Unter der Äquivalenz von Kategorien

$$\mathcal{Cov}(B, b_0) \rightsquigarrow \pi_1(B, b_0) - \mathcal{E}ns^*$$

entsprechen die zusammenhängenden punktierten Überlagerungen den punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen mit transitiver Operation.

Galoistheorie

Sei G eine Gruppe, (X, x_0) eine punktierte G -Menge mit transitiver Operation (d.h.: $X = G.x_0$).

Galoistheorie

Sei G eine Gruppe, (X, x_0) eine punktierte G -Menge mit transitiver Operation (d.h.: $X = G.x_0$).

Wir haben die Bijektion

$$G/\text{Stab}(x_0) \xrightarrow{\sim} X, [g] \mapsto g.x_0$$

Galoistheorie

Sei G eine Gruppe, (X, x_0) eine punktierte G -Menge mit transitiver Operation (d.h.: $X = G.x_0$).

Wir haben die Bijektion

$$G/\text{Stab}(x_0) \xrightarrow{\sim} X, [g] \mapsto g.x_0$$

und damit den Isomorphismus von punktierten G -Mengen

$$(G/\text{Stab}(x_0), [e]) \xrightarrow{\sim} (X, x_0)$$

Galoistheorie

Sei G eine Gruppe, (X, x_0) eine punktierte G -Menge mit transitiver Operation (d.h.: $X = G.x_0$).

Wir haben die Bijektion

$$G/\text{Stab}(x_0) \xrightarrow{\sim} X, [g] \mapsto g.x_0$$

und damit den Isomorphismus von punktierten G -Mengen

$$(G/\text{Stab}(x_0), [e]) \xrightarrow{\sim} (X, x_0)$$

Sei nun $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ein Morphismus von punktierten G -Mengen mit transitiver Operation.

Galoistheorie

Sei G eine Gruppe, (X, x_0) eine punktierte G -Menge mit transitiver Operation (d.h.: $X = G.x_0$).

Wir haben die Bijektion

$$G/\text{Stab}(x_0) \xrightarrow{\sim} X, [g] \mapsto g.x_0$$

und damit den Isomorphismus von punktierten G -Mengen

$$(G/\text{Stab}(x_0), [e]) \xrightarrow{\sim} (X, x_0)$$

Sei nun $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ein Morphismus von punktierten G -Mengen mit transitiver Operation.

Für $g \in \text{Stab}(x_0)$ ist $y_0 = f(g.x_0) = g.y_0$, also $g \in \text{Stab}(y_0)$.

Galoistheorie

Sei G eine Gruppe, (X, x_0) eine punktierte G -Menge mit transitiver Operation (d.h.: $X = G.x_0$).

Wir haben die Bijektion

$$G/\text{Stab}(x_0) \xrightarrow{\sim} X, [g] \mapsto g.x_0$$

und damit den Isomorphismus von punktierten G -Mengen

$$(G/\text{Stab}(x_0), [e]) \xrightarrow{\sim} (X, x_0)$$

Sei nun $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ein Morphismus von punktierten G -Mengen mit transitiver Operation.

Für $g \in \text{Stab}(x_0)$ ist $y_0 = f(g.x_0) = g.y_0$, also $g \in \text{Stab}(y_0)$.

Also: $\text{Stab}(x_0) \leq \text{Stab}(y_0)$.

Galoistheorie

Sei G eine Gruppe, (X, x_0) eine punktierte G -Menge mit transitiver Operation (d.h.: $X = G.x_0$).

Wir haben die Bijektion

$$G/\text{Stab}(x_0) \xrightarrow{\sim} X, [g] \mapsto g.x_0$$

und damit den Isomorphismus von punktierten G -Mengen

$$(G/\text{Stab}(x_0), [e]) \xrightarrow{\sim} (X, x_0)$$

Sei nun $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ein Morphismus von punktierten G -Mengen mit transitiver Operation.

Für $g \in \text{Stab}(x_0)$ ist $y_0 = f(g.x_0) = g.y_0$, also $g \in \text{Stab}(y_0)$.

Also: $\text{Stab}(x_0) \leq \text{Stab}(y_0)$.

Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend.

Galoistheorie

Die Untergruppen von G bilden mit den Inklusionen eine Kategorie. Sei diese $\mathcal{L}(G)$ ("lattice of G ").

Galoistheorie

Die Untergruppen von G bilden mit den Inklusionen eine Kategorie. Sei diese $\mathcal{L}(G)$ ("lattice of G ").

Wir haben einen Funktor

$$G - \mathcal{E}ns^{trans*} \rightsquigarrow \mathcal{L}(G)$$

$$(X, x_0) \longmapsto \text{Stab}(x_0)$$

$$(f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)) \longmapsto (\text{Stab}(x_0) \hookrightarrow \text{Stab}(y_0))$$

Galoistheorie

Die Untergruppen von G bilden mit den Inklusionen eine Kategorie. Sei diese $\mathcal{L}(G)$ ("lattice of G ").

Wir haben einen Funktor

$$G - \mathcal{E}ns^{trans*} \rightsquigarrow \mathcal{L}(G)$$

$$(X, x_0) \longmapsto \text{Stab}(x_0)$$

$$(f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)) \longmapsto (\text{Stab}(x_0) \hookrightarrow \text{Stab}(y_0))$$

und einen Funktor

$$\mathcal{L}(G) \rightsquigarrow G - \mathcal{E}ns^{trans*}$$

$$U \longmapsto (G/U, [e])$$

$$(U \hookrightarrow V) \longmapsto (G/U \rightarrow G/V) .$$

Galoistheorie

Die Untergruppen von G bilden mit den Inklusionen eine Kategorie. Sei diese $\mathcal{L}(G)$ ("lattice of G ").

Wir haben einen Funktor

$$G - \mathcal{E}ns^{trans*} \rightsquigarrow \mathcal{L}(G)$$

$$(X, x_0) \longmapsto \text{Stab}(x_0)$$

$$(f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)) \longmapsto (\text{Stab}(x_0) \hookrightarrow \text{Stab}(y_0))$$

und einen Funktor

$$\mathcal{L}(G) \rightsquigarrow G - \mathcal{E}ns^{trans*}$$

$$U \longmapsto (G/U, [e])$$

$$(U \hookrightarrow V) \longmapsto (G/U \rightarrow G/V) .$$

Lemma. Die genannten Funktoren definieren eine Äquivalenz von Kategorien.

Galoistheorie

Insgesamt:

Insgesamt:

- ▶ Gegeben sei eine zusammenhängende punktierte Überlagerung (X, x_0, p) von (B, b_0) .

Insgesamt:

- ▶ Gegeben sei eine zusammenhängende punktierte Überlagerung (X, x_0, p) von (B, b_0) .
- ▶ Dieser ordnen wir die $\Pi(B)$ -Menge $X = \dot{\bigcup}_{b \in B} p^{-1}(b)$ zusammen mit dem Punkt x_0 zu.

Insgesamt:

- ▶ Gegeben sei eine zusammenhängende punktierte Überlagerung (X, x_0, p) von (B, b_0) .
- ▶ Dieser ordnen wir die $\Pi(B)$ -Menge $X = \dot{\bigcup}_{b \in B} p^{-1}(b)$ zusammen mit dem Punkt x_0 zu.
- ▶ Der punktierten $\Pi(B)$ -Menge (X, x_0) ordnen wir die punktierte $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ zu; die Operation hierauf ist transitiv.

Insgesamt:

- ▶ Gegeben sei eine zusammenhängende punktierte Überlagerung (X, x_0, p) von (B, b_0) .
- ▶ Dieser ordnen wir die $\Pi(B)$ -Menge $X = \dot{\bigcup}_{b \in B} p^{-1}(b)$ zusammen mit dem Punkt x_0 zu.
- ▶ Der punktierten $\Pi(B)$ -Menge (X, x_0) ordnen wir die punktierte $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ zu; die Operation hierauf ist transitiv.
- ▶ Der punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ ordnen wir $\text{Stab}(x_0) \leq \pi_1(B, b_0)$ zu

Insgesamt:

- ▶ Gegeben sei eine zusammenhängende punktierte Überlagerung (X, x_0, p) von (B, b_0) .
- ▶ Dieser ordnen wir die $\Pi(B)$ -Menge $X = \dot{\bigcup}_{b \in B} p^{-1}(b)$ zusammen mit dem Punkt x_0 zu.
- ▶ Der punktierten $\Pi(B)$ -Menge (X, x_0) ordnen wir die punktierte $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ zu; die Operation hierauf ist transitiv.
- ▶ Der punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Menge $(p^{-1}(b_0), x_0)$ ordnen wir $\text{Stab}(x_0) \leq \pi_1(B, b_0)$ zu; dies ist $p_*(\pi_1(X, x_0)) \leq \pi_1(B, b_0)$.

Galoistheorie

Für Morphismen:

Galoistheorie

Für Morphismen:

- ▶ Gegeben sei ein Morphismus von zusammenhängenden punktierten Überlagerungen $f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)$ von (B, b_0) .

Galoistheorie

Für Morphismen:

- ▶ Gegeben sei ein Morphismus von zusammenhängenden punktierten Überlagerungen $f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)$ von (B, b_0) .
- ▶ f ist ein Morphismus von punktierten $\Pi(B)$ -Mengen.

Galoistheorie

Für Morphismen:

- ▶ Gegeben sei ein Morphismus von zusammenhängenden punktierten Überlagerungen $f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)$ von (B, b_0) .
- ▶ f ist ein Morphismus von punktierten $\Pi(B)$ -Mengen.
- ▶ Diesem Morphismus ordnen wir durch Restriktion einen Morphismus von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen zu:

$$(p^{-1}(b_0), x_0) \longrightarrow (q^{-1}(b_0), y_0)$$

Galoistheorie

Für Morphismen:

- ▶ Gegeben sei ein Morphismus von zusammenhängenden punktierten Überlagerungen $f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)$ von (B, b_0) .
- ▶ f ist ein Morphismus von punktierten $\Pi(B)$ -Mengen.
- ▶ Diesem Morphismus ordnen wir durch Restriktion einen Morphismus von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen zu:

$$(p^{-1}(b_0), x_0) \longrightarrow (q^{-1}(b_0), y_0)$$

- ▶ Diesem Morphismus ordnen wir die entsprechende Inklusion von Stabilisatoren zu:

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}(x_0) & \hookrightarrow & \text{Stab}(y_0) \\ \parallel & & \parallel \\ p_*(\pi_1(X, x_0)) & \hookrightarrow & q_*(\pi_1(Y, y_0)) \end{array}$$

Galoistheorie

Für Morphismen:

- ▶ Gegeben sei ein Morphismus von zusammenhängenden punktierten Überlagerungen $f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)$ von (B, b_0) .
- ▶ f ist ein Morphismus von punktierten $\Pi(B)$ -Mengen.
- ▶ Diesem Morphismus ordnen wir durch Restriktion einen Morphismus von punktierten $\pi_1(B, b_0)$ -Mengen zu:

$$(p^{-1}(b_0), x_0) \longrightarrow (q^{-1}(b_0), y_0)$$

- ▶ Diesem Morphismus ordnen wir die entsprechende Inklusion von Stabilisatoren zu:

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}(x_0) & \hookrightarrow & \text{Stab}(y_0) \\ \parallel & & \parallel \\ p_*(\pi_1(X, x_0)) & \hookrightarrow & q_*(\pi_1(Y, y_0)) \end{array}$$

Insgesamt haben wir eine Äquivalenz von Kategorien.

Galoistheorie

Sei $\mathcal{C}ov^{con}(B, b_0)$ die Kategorie der zusammenhängenden punktierten Überlagerungen von (B, b_0) .

Galoistheorie

Sei $\mathcal{C}ov^{con}(B, b_0)$ die Kategorie der zusammenhängenden punktierten Überlagerungen von (B, b_0) .

Satz. (Galoiskorrespondenz für punktierte zusammenhängende Überlagerungen)

Sei (B, b_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender punktierter topologischer Raum.

Dann ist der kovariante Funktor

$$\mathcal{C}ov^{con}(B, b_0) \rightsquigarrow \mathcal{L}(\pi_1(B, b_0))$$

$$(X, x_0, p) \longmapsto p_*(\pi_1(X, x_0))$$

$$(f : (X, x_0, p) \longrightarrow (Y, y_0, q)) \longmapsto (p_*(\pi_1(X, x_0)) \hookrightarrow q_*(\pi_1(Y, y_0)))$$

eine Äquivalenz von Kategorien

Korollar. (Vereinfachte Korrespondenz)

- a) Die Zuordnung $(X, x_0, p) \mapsto p_*(\pi_*(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (B, b_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Korollar. (Vereinfachte Korrespondenz)

- a) Die Zuordnung $(X, x_0, p) \mapsto p_*(\pi_*(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (B, b_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Korollar. (Vereinfachte Korrespondenz)

- a) Die Zuordnung $(X, x_0, p) \mapsto p_*(\pi_*(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (B, b_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Sei $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Es ist $p_*(\pi_*(X, x_0)) = \text{Stab}(x_0)$.

Korollar. (Vereinfachte Korrespondenz)

- a) Die Zuordnung $(X, x_0, p) \mapsto p_*(\pi_*(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (B, b_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Sei $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Es ist $p_*(\pi_*(X, x_0)) = \text{Stab}(x_0)$.

Für $x_1 \in p^{-1}(b_0)$ ist $p_*(\pi_*(X, x_1)) = \text{Stab}(x_1)$.

Korollar. (Vereinfachte Korrespondenz)

- a) Die Zuordnung $(X, x_0, p) \mapsto p_*(\pi_*(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (B, b_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Sei $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Es ist $p_*(\pi_*(X, x_0)) = \text{Stab}(x_0)$.

Für $x_1 \in p^{-1}(b_0)$ ist $p_*(\pi_*(X, x_1)) = \text{Stab}(x_1)$.

Stabilisatoren sind konjugiert in $\pi_1(B, b_0)$.

Korollar. (Vereinfachte Korrespondenz)

- a) Die Zuordnung $(X, x_0, p) \mapsto p_*(\pi_*(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (B, b_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Sei $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. Es ist $p_*(\pi_*(X, x_0)) = \text{Stab}(x_0)$.

Für $x_1 \in p^{-1}(b_0)$ ist $p_*(\pi_*(X, x_1)) = \text{Stab}(x_1)$.

Stabilisatoren sind konjugiert in $\pi_1(B, b_0)$.

Umgekehrt: Eine zu $p_*(\pi_*(X, x_0)) = \text{Stab}(x_0)$ konjugierte Untergruppe ist ein Stabilisator und somit der Form $p_*(\pi_*(X, x_1))$. Dies entspricht der Isomorphieklasse von (X, x_1) .

Korollar. (Vereinfachte Korrespondenz)

- a) Die Zuordnung $(X, x_0, p) \mapsto p_*(\pi_*(X, x_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von punktierten zusammenhängenden Überlagerungen von (B, b_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.
- b) Hierdurch stehen die Isomorphieklassen von Überlagerungen von B in Bijektion zu den Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.