Algebraische Topologie

Vorlesung im Wintersemester 2020/21

gehalten von Claus Diem

§2 Der Fundamentalgruppen- und der Fundamentalgruppoidfunktor

Der Wegzuzammenhangskomponentenfunktor

Es sei für einen topologischen Raum X $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten (= maximalen wegzusammenhängenden Unterräumen) von X.

Der Wegzuzammenhangskomponentenfunktor

Es sei für einen topologischen Raum X $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten (= maximalen wegzusammenhängenden Unterräumen) von X.

Für $f : X \longrightarrow Y$ und $U \subseteq X$ wegzusammenhängend ist auch $f(U)$ wegzusammenhängend. Somit erhalten wir eine induzierte Abbildung $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$.

Damit haben wir einen kovarianten Funktor

$$\pi_0 : \mathcal{T}op \rightsquigarrow \mathcal{E}ns \ .$$

Der Wegzuzammenhangskomponentenfunktor

Es sei für einen topologischen Raum X $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten (= maximalen wegzusammenhängenden Unterräumen) von X.

Für $f : X \longrightarrow Y$ und $U \subseteq X$ wegzusammenhängend ist auch $f(U)$ wegzusammenhängend. Somit erhalten wir eine induzierte Abbildung $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$.

Damit haben wir einen kovarianten Funktor

$$\pi_0 : \mathcal{T}op \rightsquigarrow \mathcal{E}ns \ .$$

Aussage.

- Seien $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander. Dann ist
$$f_* = g_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y) \ .$$

Der Wegzuzammenhangskomponentenfunktor

Es sei für einen topologischen Raum X $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten (= maximalen wegzusammenhängenden Unterräumen) von X.

Für $f : X \longrightarrow Y$ und $U \subseteq X$ wegzusammenhängend ist auch $f(U)$ wegzusammenhängend. Somit erhalten wir eine induzierte Abbildung $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$.

Damit haben wir einen kovarianten Funktor

$$\pi_0 : \mathcal{T}op \rightsquigarrow \mathcal{E}ns \ .$$

Aussage.

- Seien $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander. Dann ist
$$f_* = g_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y) \ .$$
- Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ eine Bijektion.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Für einen topologischen Raum X haben wir das **Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(X)$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Für einen topologischen Raum X haben wir das **Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(X) \; ,$$

für eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ den kovarianten Funktor

$$\Pi(f) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$$

mit

$$x \longmapsto f(x) \quad , \quad \gamma \longmapsto f_*(\gamma) \; .$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Für einen topologischen Raum X haben wir das **Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(X) \ ,$$

für eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ den kovarianten Funktor

$$\Pi(f) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$$

mit

$$x \longmapsto f(x) \quad , \quad \gamma \longmapsto f_*(\gamma) \ .$$

Hiermit ist

$$\Pi : \mathcal{T}op \rightsquigarrow \mathcal{G}ruppoide \subseteq \mathcal{C}at$$

auch ein kovarianter Funktor

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Für einen topologischen Raum X haben wir das **Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(X) ,$$

für eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ den kovarianten Funktor

$$\Pi(f) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$$

mit

$$x \longmapsto f(x) \quad , \quad \gamma \longmapsto f_*(\gamma) .$$

Hiermit ist

$$\Pi : \mathcal{T}op \rightsquigarrow \mathcal{G}ruppoide \subseteq \mathcal{C}at$$

auch ein kovarianter Funktor.

Dies ist **Fundamentalgruppoidfunktor**.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Es seien X und Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels der Homotopie $H : I \times X \longrightarrow Y$. Dann ist die Zuordnung

$$X \longrightarrow \mathrm{Mor}(\Pi(Y)) \quad , \quad x \longmapsto [H(\_, x)]$$

eine natürliche Transformation (und somit ein Isomorphismus) von $\Pi(f)$ nach $\Pi(g)$.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Es seien X und Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels der Homotopie $H : I \times X \longrightarrow Y$. Dann ist die Zuordnung

$$X \longrightarrow \mathrm{Mor}(\Pi(Y)) \quad , \quad x \longmapsto [H(\_, x)]$$

eine natürliche Transformation (und somit ein Isomorphismus) von $\Pi(f)$ nach $\Pi(g)$.

Dies bedeutet:

Für $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} f(x_1) \arrow[r, "{[H(\_,x_1)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_1) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\ f(x_2) \arrow[r, "{[H(\_,x_2)]}"'] & g(x_2) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Für $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} f(x_1) \arrow[r, "{[H(\_, x_1)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_1) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\ f(x_2) \arrow[r, "{[H(\_, x_2)]}"'] & g(x_2) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Für $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} f(x_1) \arrow[r, "{[H(\_,x_1)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_1) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\ f(x_2) \arrow[r, "{[H(\_,x_2)]}"'] & g(x_2) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Das heißt:

Für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle Wege w von x_1 nach x_2 ist

$$(g \circ w) \star H(\_, x_1) \simeq H(\_, x_2) \star (f \circ w) \, .$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

zu zeigen:

Für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle Wege w von x_1 nach x_2 ist

$$(g \circ w) \star H(\_, x_1) \simeq H(\_, x_2) \star (f \circ w)$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

zu zeigen:

Für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle Wege w von x_1 nach x_2 ist

$$(g \circ w) \star H(\_, x_1) \simeq H(\_, x_2) \star (f \circ w) \ ,$$

d.h.

$$H(1, w(\_)) \star H(\_, w(0)) \simeq H(\_, w(1)) \star H(0, w(\_))$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

zu zeigen:

Für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle Wege w von x_1 nach x_2 ist

$$(g \circ w) \star H(\_, x_1) \simeq H(\_, x_2) \star (f \circ w) \ ,$$

d.h.

$$H(1, w(\_)) \star H(\_, w(0)) \simeq H(\_, w(1)) \star H(0, w(\_)) \ ,$$

d.h.

$$H_*((1 \times w) \star (\mathrm{id}, w(0))) \simeq H_*((\mathrm{id}, w(1)) \star (0, w))$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

zu zeigen:

Für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle Wege w von x_1 nach x_2 ist

$$(g \circ w) \star H(\_, x_1) \simeq H(\_, x_2) \star (f \circ w) \ ,$$

d.h.

$$H(1, w(\_)) \star H(\_, w(0)) \simeq H(\_, w(1)) \star H(0, w(\_)) \ ,$$

d.h.

$$H_*((1 \times w) \star (\mathrm{id}, w(0))) \simeq H_*((\mathrm{id}, w(1)) \star (0, w)) \ ,$$

d.h.

$$(H \circ (\mathrm{id} \times w))_*(\text{oben} \star \text{links}) \simeq (H \circ (\mathrm{id} \times w))_*(\text{rechts} \star \text{unten}) \ .$$

$$I \times I \xrightarrow{\mathrm{id} \times w} I \times X \xrightarrow{H} Y$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz (Kurzfassung). Es seien X und Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander. Dann sind $\Pi(f), \Pi(g) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$ isomorph zueinander.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz (Kurzfassung). Es seien X und Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander. Dann sind $\Pi(f), \Pi(g) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$ isomorph zueinander.

Frage. Was sollte "?" sein?

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}op \arrow[r, rightsquigarrow, "\Pi"] \arrow[d, rightsquigarrow] & \mathcal{G}ruppoide \arrow[d, rightsquigarrow] \\
h\mathcal{T}op \arrow[r, rightsquigarrow] & ?
\end{tikzcd}$$

Satz. Es seien X und Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels der Homotopie $H : I \times X \longrightarrow Y$. Dann ist die Zuordnung

$$X \longrightarrow \mathrm{Mor}(\Pi(Y)) \quad , \quad x \longmapsto [H(\_, x)]$$

eine natürliche Transformation (und somit ein Isomorphismus) von $\Pi(f)$ nach $\Pi(g)$.

Satz. Es seien X und Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels der Homotopie $H : I \times X \longrightarrow Y$. Dann ist die Zuordnung

$$X \longrightarrow \mathrm{Mor}(\Pi(Y)) \quad , \quad x \longmapsto [H(\_, x)]$$

eine natürliche Transformation (und somit ein Isomorphismus) von $\Pi(f)$ nach $\Pi(g)$.

Dies bedeutet:

Für $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} f(x_1) \arrow[r, "{[H(\_,x_1)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_1) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\ f(x_2) \arrow[r, "{[H(\_,x_2)]}"'] & g(x_2) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Anwendung für Fundamentalgruppe

Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels $H : I \times X \longrightarrow Y$.

Anwendung für Fundamentalgruppe

Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels $H : I \times X \longrightarrow Y$.

Sei $x_0 \in X$.

Anwendung für Fundamentalgruppe

Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels $H : I \times X \longrightarrow Y$.

Sei $x_0 \in X$. Wir haben für $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
f(x_0) \arrow[r, "{[H(_,x_0)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_0) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\
f(x_0) \arrow[r, "{[H(_,x_0)]}"'] & g(x_0)
\end{tikzcd} .$$

Anwendung für Fundamentalgruppe

Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels $H : I \times X \longrightarrow Y$.

Sei $x_0 \in X$. Wir haben für $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} f(x_0) \arrow[r, "{[H(\_,x_0)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_0) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\ f(x_0) \arrow[r, "{[H(\_,x_0)]}"'] & g(x_0) \end{tikzcd} .$$

Mit $\gamma := [H(\_, x_0)]$:

$$g_*(\alpha) = \gamma \star f_*(\alpha) \star \gamma^{-1}$$

Anwendung für Fundamentalgruppe

Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels $H : I \times X \longrightarrow Y$.

Sei $x_0 \in X$. Wir haben für $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} f(x_0) \arrow[r, "{[H(\_,x_0)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_0) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\ f(x_0) \arrow[r, "{[H(\_,x_0)]}"'] & g(x_0) \end{tikzcd} .$$

Mit $\gamma := [H(\_, x_0)]$:

$$g_*(\alpha) = \gamma \star f_*(\alpha) \star \gamma^{-1} = \gamma_+(f_*(\alpha))$$

Anwendung für Fundamentalgruppe

Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels $H : I \times X \longrightarrow Y$.

Sei $x_0 \in X$. Wir haben für $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} f(x_0) \arrow[r, "{[H(\_,x_0)]}"] \arrow[d, "f_*(\alpha)"'] & g(x_0) \arrow[d, "g_*(\alpha)"] \\ f(x_0) \arrow[r, "{[H(\_,x_0)]}"'] & g(x_0)\,. \end{tikzcd}$$

Mit $\gamma := [H(\_, x_0)]$:

$$g_*(\alpha) = \gamma \star f_*(\alpha) \star \gamma^{-1} = \gamma_+(f_*(\alpha))$$

Also:

$$g_* = \gamma_+ \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$$

Anwendung für Fundamentalgruppe

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $f, g : X \longrightarrow Y$ homotop zueinander mittels $H : I \times X \longrightarrow Y$.

Sei $\gamma := [H(\_, x_0)] \in \pi_1(Y, f(x_0), g(x_0))$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[dd, "\gamma_+"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, g(x_0))
\end{tikzcd}$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ zueinander Homotopie-inverse Homotopieäquivalenzen.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ zueinander Homotopie-inverse Homotopieäquivalenzen.

Wir haben

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad , \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ zueinander Homotopie-inverse Homotopieäquivalenzen.

Wir haben

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad , \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

Somit:

$$\Pi(g \circ f) \approx \mathrm{id}_{\Pi(X)} \quad , \quad \Pi(f \circ g) \approx \mathrm{id}_{\Pi(Y)} \; ,$$

$$\Pi(g) \circ \Pi(f) \approx \mathrm{id}_{\Pi(X)} \quad , \quad \Pi(f) \circ \Pi(g) \approx \mathrm{id}_{\Pi(Y)} \; .$$

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopiequivalenz. Dann ist $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien.

"Satz." Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.

ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

"Satz." Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.

ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Dann gilt:

Aussage ii) impliziert Aussage i).

Aussage i) impliziert Aussage ii), falls das Auswahlaxiom angewandt auf $\mathrm{ob}(\mathcal{D})$ gilt.

Ein wenig Kategorientheorie

"Satz." Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.

ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

"Satz." Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.
ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

(Gute) Definitionen.

- Eine **Äquivalenz zwischen den Kategorien** $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Tupel bestehend aus Funktoren wie in ii) und Isomorphismen $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$.

Ein wenig Kategorientheorie

"Satz." Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.
ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

(Gute) Definitionen.

- Eine **Äquivalenz zwischen den Kategorien** $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Tupel bestehend aus Funktoren wie in ii) und Isomorphismen $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$.
- Wenn es so ein Tupel gibt, heißen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ **äquivalent**.

"Satz." Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.

ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

(Gute) Definitionen.

- Eine **Äquivalenz zwischen den Kategorien** $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Tupel bestehend aus Funktoren wie in ii) und Isomorphismen $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$.
- Wenn es so ein Tupel gibt, heißen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ **äquivalent**.
- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn es ein $\mathcal{G}$ wie in ii) gibt.

“Satz.” Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.
ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

(Gute) Definitionen.

- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn es ein $\mathcal{G}$ wie in ii) gibt.

Ein wenig Kategorientheorie

"Satz." Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein ko- oder kontravarianter Funktor. Man betrachte die folgenden Aussagen.

i) $\mathcal{F}$ ist voll, treu und essentiell surjektiv.

ii) Es gibt einen ko- bzw. kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

(Gute) Definitionen.

- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist eine **Äquivalenz von Kategorien**, wenn es ein $\mathcal{G}$ wie in ii) gibt.

Außerdem, wenn man nicht ein passendes Auswahlaxiom voraussetzen will:

- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist eine **schwache Äquivalenz von Kategorien**, wenn i) gilt.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien und somit voll-treu und essentiell surjektiv.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien und somit voll-treu und essentiell surjektiv.

Das bedeutet:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $f_* : \pi_1(X; x_1, x_2) \longrightarrow \pi_1(Y; f(x_1), f(x_2))$ eine Bijektion.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien und somit voll-treu und essentiell surjektiv.

Das bedeutet:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $f_* : \pi_1(X; x_1, x_2) \longrightarrow \pi_1(Y; f(x_1), f(x_2))$ eine Bijektion.
- Für $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ und ein $\gamma \in \pi_1(Y; f(x), y)$, d.h. es gibt einen Weg von $f(x)$ nach y.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien und somit voll-treu und essentiell surjektiv.

Das bedeutet:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $f_* : \pi_1(X; x_1, x_2) \longrightarrow \pi_1(Y; f(x_1), f(x_2))$ eine Bijektion.
- Für $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ und ein $\gamma \in \pi_1(Y; f(x), y)$, d.h. es gibt einen Weg von $f(x)$ nach y.

  Kurz: $f(X)$ trifft jede Wegzusammenhangskomponente von Y.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien und somit voll-treu und essentiell surjektiv.

Das bedeutet:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $f_* : \pi_1(X; x_1, x_2) \longrightarrow \pi_1(Y; f(x_1), f(x_2))$ eine Bijektion.
- Für $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ und ein $\gamma \in \pi_1(Y; f(x), y)$, d.h. es gibt einen Weg von $f(x)$ nach y.

  Kurz: $f(X)$ trifft jede Wegzusammenhangskomponente von Y.

  Oder auch: $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ ist surjektiv.

Der Fundamentalgruppoidfunktor

Satz. Seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ eine Äquivalenz von Kategorien und somit voll-treu und essentiell surjektiv.

Das bedeutet:

- Für $x_1, x_2 \in X$ ist $f_* : \pi_1(X; x_1, x_2) \longrightarrow \pi_1(Y; f(x_1), f(x_2))$ eine Bijektion.
- Für $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ und ein $\gamma \in \pi_1(Y; f(x), y)$, d.h. es gibt einen Weg von $f(x)$ nach y.

  Kurz: $f(X)$ trifft jede Wegzusammenhangskomponente von Y.

  Oder auch: $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ ist surjektiv.

  Wir wissen schon: Dies ist auch bijektiv.

Anwendung für Fundamentalgruppe

Satz. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, $x_0 \in X$. Dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$ ein Isomorphismus.

Anwendung für Fundamentalgruppe

Satz. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, $x_0 \in X$. Dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$ ein Isomorphismus.

Korollar. Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt, $x_0 \in A$. Dann ist $\iota_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus.