

Algebraische Topologie

Vorlesung im Wintersemester 2020/21

gehalten von Claus Diem

§7 Fasertransport

Exkurs: Gruppoide

Meine Sichtweise auf Gruppoide:

Exkurs: Gruppoide

Meine Sichtweise auf Gruppoide:

Ein **Gruppoid** G besteht aus

- ▶ einer Menge von Labels / Indices / Punkten A ,
- ▶ einer Menge von Elementen, die auch mit G bezeichnet wird, mit einer Partition

$$G = \dot{\bigcup}_{a,b \in A} G_{a,b} ,$$

(Wenn $g \in G_{a,b}$, setzen wir $Q(g) := a, Z(g) := b$ und schreiben: $g : a \rightarrow b$.)

- ▶ einer partiellen Verknüpfung $G \times G \dashrightarrow G$, gegeben durch (totale) Verknüpfungen $G_{b,c} \times G_{a,b} \longrightarrow G_{a,c}$,
- ▶ *lokalen neutralen Elementen* $e_a \in G_{a,a}$ mit $g \cdot e_a = g$, $e_a \cdot g = g$, wenn Verknüpfung definiert,
- ▶ Assoziativität, wenn Verknüpfung definiert,
- ▶ wobei es zu jedem Element $g : a \rightarrow b$ ein *inverses Element* $g^{-1} : b \rightarrow a$ mit $g^{-1} \cdot g = e_a$, $g \cdot g^{-1} = e_b$ gibt.

Hochhebungen

Satz. (Ein einfacher Hochhebesatz) Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

Hochhebungen

Satz. (Ein einfacher Hochhebesatz) Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

- a) Sei $w : I \longrightarrow B$ ein Weg mit $w(0) = b_0$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w} : I \longrightarrow X$ mit $\tilde{w}(0) = x_0, p_*(\tilde{w}) = w$.

Hochhebungen

Satz. (Ein einfacher Hochhebesatz) Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

- a) Sei $w : I \longrightarrow B$ ein Weg mit $w(0) = b_0$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w} : I \longrightarrow X$ mit $\tilde{w}(0) = x_0, p_*(\tilde{w}) = w$.
- b) Sei $H : I \times I \longrightarrow B$ stetig mit $H(0,0) = b_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow X$ mit $\tilde{H}(0,0) = x_0, p_*(\tilde{H}) = H$.

Hochhebungen

Satz. (Ein einfacher Hochhebesatz) Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

- a) Sei $w : I \longrightarrow B$ ein Weg mit $w(0) = b_0$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w} : I \longrightarrow X$ mit $\tilde{w}(0) = x_0, p_*(\tilde{w}) = w$.
- b) Sei $H : I \times I \longrightarrow B$ stetig mit $H(0,0) = b_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow X$ mit $\tilde{H}(0,0) = x_0, p_*(\tilde{H}) = H$.

Zu einer Homotopieklasse von Wegen $\tilde{\alpha}$ auf B mit Anfangspunkt / Quelle b_0 haben wir genau eine Klasse $\tilde{\alpha}$ auf X mit Anfangspunkt / Quelle x_0 und $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

Hochhebungen

Hochhebungen

Zu einer Homotopieklasse von Wegen $\tilde{\alpha}$ auf B mit Anfangspunkt b_0 haben wir genau eine Klasse $\tilde{\alpha}$ auf X mit Anfangspunkt x_0 und $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

Satz. Sei $p : X \rightarrow B$ eine Überlagerung. Sei $b_0 \in B$ und $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

a)

$$\dot{\bigcup}_{x_1 \in X} \pi_1(X; x_0, x_1) \longrightarrow \dot{\bigcup}_{b_1 \in B} \pi_1(B; b_0, b_1)$$

$$\alpha \longmapsto p_*(\alpha)$$

ist eine Bijektion.

Hochhebungen

Zu einer Homotopieklasse von Wegen $\tilde{\alpha}$ auf B mit Anfangspunkt b_0 haben wir genau eine Klasse $\tilde{\alpha}$ auf X mit Anfangspunkt x_0 und $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

Satz. Sei $p : X \rightarrow B$ eine Überlagerung. Sei $b_0 \in B$ und $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

a)

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup}_{x_1 \in X} \pi_1(X; x_0, x_1) &\longrightarrow \dot{\bigcup}_{b_1 \in B} \pi_1(B; b_0, b_1) \\ \alpha &\longmapsto p_*(\alpha) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

b) Für $b_1 \in B$ ist

$$\begin{aligned} \dot{\bigcup}_{x_1 \in p^{-1}(b_1)} \pi_1(X; x_0, x_1) &\longrightarrow \pi_1(B; b_0, b_1) \\ \alpha &\longmapsto p_*(\alpha) \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Hochhebungen

Korollar. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann ist für $x_0, x_1 \in X$ die Abbildung

$$p_* : \pi_1(X; x_0, x_1) \longrightarrow \pi_1(B; p(x_0), p(x_1))$$

injektiv.

Hochhebungen

Korollar. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann ist für $x_0, x_1 \in X$ die Abbildung

$$p_* : \pi_1(X; x_0, x_1) \longrightarrow \pi_1(B; p(x_0), p(x_1))$$

injektiv.

Wenn man möchte:

Der Funktor $\Pi(p) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(B)$ ist treu, d.h. auf Morphismenmengen injektiv.

Hochhebungen

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Seien $b_0, b_1 \in B$ und $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

a)

$$\begin{array}{ccc} \dot{\bigcup}_{x_1 \in X} \pi_1(X; x_0, x_1) & \longrightarrow & \dot{\bigcup}_{b_1 \in B} \pi_1(B; b_0, b_1) \\ \alpha \mapsto & & p_*(\alpha) \end{array}$$

ist eine Bijektion.

b) Für $b_1 \in B$ ist

$$\begin{array}{ccc} \dot{\bigcup}_{x_1 \in p^{-1}(b_1)} \pi_1(X; x_0, x_1) & \longrightarrow & \pi_1(B; b_0, b_1) \\ \alpha \mapsto & & p_*(\alpha) \end{array}$$

eine Bijektion.

Hochhebungen

Bemerkung. Seien $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung,
 $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

Hochhebungen

Bemerkung. Seien $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung,
 $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

Wir können für $\alpha \in \pi_1(B; b_0, b_1)$ den Endpunkt / das Ziel des
hochgehobenen Weges betrachten: $Z(\tilde{\alpha})$.

Hochhebungen

Bemerkung. Seien $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung,
 $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

Wir können für $\alpha \in \pi_1(B; b_0, b_1)$ den Endpunkt / das Ziel des
hochgehobenen Weges betrachten: $Z(\tilde{\alpha})$.

Wir haben die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(B; b_0, b_1) &\longrightarrow p^{-1}(b_1) \\ \alpha &\longmapsto Z(\tilde{\alpha}) . \end{aligned}$$

Hochhebungen

Bemerkung. Seien $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung,
 $b_0 \in B, x_0 \in X$ mit $p(x_0) = b_0$.

Wir können für $\alpha \in \pi_1(B; b_0, b_1)$ den Endpunkt / das Ziel des hochgehobenen Weges betrachten: $Z(\tilde{\alpha})$.

Wir haben die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(B; b_0, b_1) &\longrightarrow p^{-1}(b_1) \\ \alpha &\longmapsto Z(\tilde{\alpha}) . \end{aligned}$$

Wenn X einfach zusammenhängend ist, ist dies eine Bijektion.

Hochhebungen

Fasertransport

Sei weiterhin $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Wir fixieren $b_0, b_1 \in B$ und lassen $x \in p^{-1}(x)$ variabel.

Wir erhalten:

$$\pi_1(B; b_0, b_1) \longrightarrow \text{Bij}(p^{-1}(b_0), p^{-1}(b_1))$$

$$(x \mapsto Z(\tilde{\alpha}))$$

$$\alpha \longmapsto \quad \text{für } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit}$$

$$Q(\tilde{\alpha}) = x, \quad p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

Fasertransport

Sei weiterhin $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Wir fixieren $b_0, b_1 \in B$ und lassen $x \in p^{-1}(x)$ variabel.

Wir erhalten:

$$\pi_1(B; b_0, b_1) \longrightarrow \text{Bij}(p^{-1}(b_0), p^{-1}(b_1))$$

$$(x \mapsto Z(\tilde{\alpha}))$$

$$\alpha \longmapsto \quad \text{für } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit}$$

$$Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

Man spricht hier von **Fasertransport**.

Fasertransport

Sei weiterhin $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Wir fixieren $b_0, b_1 \in B$ und lassen $x \in p^{-1}(x)$ variabel.

Wir erhalten:

$$\pi_1(B; b_0, b_1) \longrightarrow \text{Bij}(p^{-1}(b_0), p^{-1}(b_1))$$

$$(x \mapsto Z(\tilde{\alpha}))$$

$$\alpha \longmapsto \quad \text{für } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit}$$

$$Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

Man spricht hier von **Fasertransport**.

Wir betrachten das nun für $b_0 = b_1$.

Monodromie

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$.

Wir erhalten:

$$\pi_1(B; b) \longrightarrow \text{Sym}(p^{-1}(b)) = \text{Aut}(p^{-1}(b))$$

$$(x \mapsto Z(\tilde{\alpha}))$$

$$\alpha \longmapsto \quad \text{für } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit}$$

$$Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

Hiermit ist $\pi^{-1}(b)$ eine $\pi_1(B; b)$ -Menge. Die Gruppenoperation heißt **Monodromieoperation**.

Monodromie

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$.

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von x bezüglich der Monodromieoperation von $\pi_1(B, b)$ auf $p^{-1}(b)$.

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von x bezüglich der Monodromieoperation von $\pi_1(B, b)$ auf $p^{-1}(b)$.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von x bezüglich der Monodromieoperation von $\pi_1(B, b)$ auf $p^{-1}(b)$.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Beweis von ii)

Sei $\alpha \in \pi_1(B, b)$, $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$.

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von x bezüglich der Monodromieoperation von $\pi_1(B, b)$ auf $p^{-1}(b)$.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Beweis von ii)

Sei $\alpha \in \pi_1(B, b)$, $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$. Dann sind äquivalent:

► $\alpha \in p_*(\pi_1(X, x))$

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von x bezüglich der Monodromieoperation von $\pi_1(B, b)$ auf $p^{-1}(b)$.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Beweis von ii)

Sei $\alpha \in \pi_1(B, b)$, $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$. Dann sind äquivalent:

- ▶ $\alpha \in p_*(\pi_1(X, x))$
- ▶ $Z(\tilde{\alpha}) = x$

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von x bezüglich der Monodromieoperation von $\pi_1(B, b)$ auf $p^{-1}(b)$.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Beweis von ii)

Sei $\alpha \in \pi_1(B, b)$, $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$. Dann sind äquivalent:

- ▶ $\alpha \in p_*(\pi_1(X, x))$
- ▶ $Z(\tilde{\alpha}) = x$
- ▶ $\alpha \cdot x = x$

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von x bezüglich der Monodromieoperation von $\pi_1(B, b)$ auf $p^{-1}(b)$.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Beweis von ii)

Sei $\alpha \in \pi_1(B, b)$, $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$. Dann sind äquivalent:

- ▶ $\alpha \in p_*(\pi_1(X, x))$
- ▶ $Z(\tilde{\alpha}) = x$
- ▶ $\alpha \cdot x = x$
- ▶ $\alpha \in \text{Stab}(x)$

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von $\pi_1(B, b)$ bezüglich der Monodromieoperation.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Insbesondere ist die Monodromieoperation auf $p^{-1}(b)$ genau dann transitiv, wenn die Punkte von $p^{-1}(b)$ in derselben Wegzusammenhangskomponente von X liegen.

Monodromie

Satz. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Für $x \in p^{-1}(b)$ gilt:

- i) $p_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$ ist injektiv.
- ii) $p_*(\pi_1(X, x))$ ist der Stabilisator von $\pi_1(B, b)$ bezüglich der Monodromieoperation.
- iii) Die Bahn von x unter der Monodromieoperation besteht aus denjenigen Punkten von $p^{-1}(b)$, die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X wie x liegen.

Insbesondere ist die Monodromieoperation auf $p^{-1}(b)$ genau dann transitiv, wenn die Punkte von $p^{-1}(b)$ in derselben Wegzusammenhangskomponente von X liegen.

Korollar. Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, wobei X wegzusammenhängend ist. Dann ist für alle $b \in B$ die Monodromieoperation auf der Faser $p^{-1}(b)$ transitiv.

Fasertransport

Sei weiterhin $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Für $b_0, b_1 \in B$ haben wir:

$$\pi_1(B; b_0, b_1) \longrightarrow \text{Bij}(p^{-1}(b_0), p^{-1}(b_1))$$

$$(x \mapsto Z(\tilde{\alpha}))$$

$$\alpha \longmapsto \quad \text{für } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit}$$

$$Q(\tilde{\alpha}) = x, \quad p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

Fasertransport

Sei weiterhin $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Für $b_0, b_1 \in B$ haben wir:

$$\pi_1(B; b_0, b_1) \longrightarrow \text{Bij}(p^{-1}(b_0), p^{-1}(b_1))$$

$$(x \mapsto Z(\tilde{\alpha}))$$

$$\alpha \longmapsto \text{für } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit}$$

$$Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$$

Wir variieren $b_0, b_1 \dots$

Wir erhalten den **Fasertransport-** oder **Monodromiefunktor**

$$M_{X/B} : \Pi(B) \rightsquigarrow \mathcal{E}ns,$$

$$b \longmapsto p^{-1}(b)$$

$$\pi_1(B; b_0, b_1) \longrightarrow \text{Bij}(p^{-1}(b_0), p^{-1}(b_1))$$

G-Mengen

Definition (C.D., inspiriert von Laures & Szymik). Sei G ein Gruppoid mit Labelmenge A .

Eine **G-Menge** besteht aus

- ▶ einer Menge X zusammen mit einer Partition $X = \dot{\bigcup}_{a \in A} X_a$
- ▶ einer partiellen Abbildung $G \times X \dashrightarrow X$ definiert durch Abbildungen $G_{ab} \times X_a \longrightarrow X_b, (g, x) \mapsto g.x$

mit:

- i) für alle $a \in A$ und alle $x \in X_a$ ist $e_a.x = x$.
- ii) für alle $a, b \in A$, alle $g : a \rightarrow b, h : b \rightarrow c$ und alle $x \in X_a$ ist $(h \cdot g).x = h.(g.x)$.

G-Mengen

Seien X und Y G -Mengen.

Ein **Homomorphismus von G -Mengen** von X nach Y ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, die die Partitionen respektiert, mit:

Für alle $a, b \in A$ und alle $g \in G_{a,b}$, $x \in X_a$ ist $f(g.x) = g.f(x)$.

G -Mengen

Seien X und Y G -Mengen.

Ein **Homomorphismus von G -Mengen** von X nach Y ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, die die Partitionen respektiert, mit:

Für alle $a, b \in A$ und alle $g \in G_{a,b}$, $x \in X_a$ ist $f(g.x) = g.f(x)$.

Damit haben wir die **Kategorie der G -Mengen**: $G\text{-}\mathcal{E}ns$.

G-Mengen

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Nun ist X eine $\Pi(B)$ -Menge:

Sei für $b \in B$: $X_b := p^{-1}(b)$.

Damit: $X = \dot{\bigcup}_{x \in X} p^{-1}(b) = \dot{\bigcup}_{b \in B} X_b$.

Für $\alpha \in \Pi(B)$ mit $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$ und $x \in p^{-1}(b_0)$ sei mit $\tilde{\alpha} \in \Pi(X)$ mit $Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$:

$$\alpha.x := Z(\tilde{\alpha}) \in p^{-1}(b_1) = X_{b_1}$$

G -Mengen

Für eine Gruppe G entsprechen die G -Mengen den Darstellungen von G .

G -Mengen

Für eine Gruppe G entsprechen die G -Mengen den Darstellungen von G .

Letzere sind Tupel (X, φ) , wobei X eine Menge und $\varphi : G \longrightarrow \text{Aut}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

G -Mengen

Für eine Gruppe G entsprechen die G -Mengen den Darstellungen von G .

Letzere sind Tupel (X, φ) , wobei X eine Menge und $\varphi : G \longrightarrow \text{Aut}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Die Kategorien der G -Mengen und der Darstellungen von G sind isomorph (nicht nur äquivalent!).

G-Mengen

Sei G ein Gruppoid.

Eine G -Menge X definiert einen kovarianten Funktor

$\mathcal{F} : G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns :$

- ▶ $\mathcal{F}(a) := X_a$
- ▶ Für $g : a \rightarrow b : \mathcal{F}(g) : X_a \longrightarrow X_b, x \mapsto g.x$

G-Mengen

Sei G ein Gruppoid.

Eine G -Menge X definiert einen kovarianten Funktor

$\mathcal{F} : G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns :$

- ▶ $\mathcal{F}(a) := X_a$
- ▶ Für $g : a \rightarrow b : \mathcal{F}(g) : X_a \longrightarrow X_b, x \mapsto g \cdot x$

Definition (C.D.) Einen kovarianten Funktor $G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$ nennen wir eine **(mengentheoretische) Darstellung** von G .

G-Mengen

Sei G ein Gruppoid.

Eine G -Menge X definiert einen kovarianten Funktor

$\mathcal{F} : G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns :$

▶ $\mathcal{F}(a) := X_a$

▶ Für $g : a \rightarrow b : \mathcal{F}(g) : X_a \longrightarrow X_b, x \mapsto g \cdot x$

Definition (C.D.) Einen kovarianten Funktor $G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$ nennen wir eine **(mengentheoretische) Darstellung** von G .

Damit: Ein **Morphismus von Darstellungen** von G ist eine natürliche Transformation.

G-Mengen

Sei G ein Gruppoid.

Eine G -Menge X definiert einen kovarianten Funktor

$\mathcal{F} : G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns :$

- ▶ $\mathcal{F}(a) := X_a$
- ▶ Für $g : a \rightarrow b : \mathcal{F}(g) : X_a \longrightarrow X_b, x \mapsto g.x$

Definition (C.D.) Einen kovarianten Funktor $G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$ nennen wir eine **(mengentheoretische) Darstellung** von G .

Damit: Ein **Morphismus von Darstellungen** von G ist eine natürliche Transformation.

Wir haben die **Kategorie der Darstellungen** von G :

$G\text{-}\mathcal{R}ep = \mathcal{E}ns^G.$

G-Mengen

Eine G -Menge X definiert eine Darstellung $R : G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns :$

- ▶ $R(a) := X_a$
- ▶ Für $g : a \rightarrow b : R(g) : X_a \longrightarrow X_b, x \mapsto g \cdot x$

G-Mengen

Eine G -Menge X definiert eine Darstellung $R : G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns :$

- ▶ $R(a) := X_a$
- ▶ Für $g : a \rightarrow b : R(g) : X_a \longrightarrow X_b, x \mapsto g.x$

Wir wollen einen Isomorphismus von Kategorien ...

Beachte:

Die so definierte Darstellung R hat diese Eigenschaft:

$$(\star) \quad \text{Für alle } a, b \in A \text{ ist } R(a) \cap R(b) = \emptyset.$$

G-Mengen

Eine G -Menge X definiert eine Darstellung $R : G \rightsquigarrow \mathcal{E}ns :$

- ▶ $R(a) := X_a$
- ▶ Für $g : a \rightarrow b : R(g) : X_a \rightarrow X_b, x \mapsto g.x$

Wir wollen einen Isomorphismus von Kategorien ...

Beachte:

Die so definierte Darstellung R hat diese Eigenschaft:

$$(\star) \quad \text{Für alle } a, b \in A \text{ ist } R(a) \cap R(b) = \emptyset.$$

Wenn wir eine solche Darstellung haben, können wir $X_a := R(a)$, $X := \bigcup_{a \in A} X_a$ setzen.

Aussage. Die Kategorie der G -Mengen ist isomorph zur Kategorie der Darstellungen R von G mit $(\star)$.

Fasertransport

Es sei B ein topologischer Raum.

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Wir haben die **Fasertransportdarstellung** $M_{X/B}$, X “wird zu” einer $\Pi(B)$ -Menge:

- ▶ $X = \dot{\bigcup}_{x \in X} p^{-1}(b) = \dot{\bigcup}_{b \in B} X_b.$
- ▶ Für $\alpha \in \Pi(B)$ mit $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$ und $x \in p^{-1}(b_0)$ sei mit $\tilde{\alpha} \in \Pi(X)$ mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$, $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$:

$$\alpha.x = Z(\tilde{\alpha}) \in p^{-1}(b_1) = X_{b_1}$$

Fasertransport

Es sei B ein topologischer Raum.

Sei $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung.

Wir haben die **Fasertransportdarstellung** $M_{X/B}$, X “wird zu” einer $\Pi(B)$ -Menge:

- ▶ $X = \dot{\bigcup}_{x \in X} p^{-1}(b) = \dot{\bigcup}_{b \in B} X_b$.
- ▶ Für $\alpha \in \Pi(B)$ mit $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$ und $x \in p^{-1}(b_0)$ sei mit $\tilde{\alpha} \in \Pi(X)$ mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$, $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$:

$$\alpha.x = Z(\tilde{\alpha}) \in p^{-1}(b_1) = X_{b_1}$$

Wir variieren X

Wir wollen einen kovarianten Funktor $\mathcal{Cov}(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$ erhalten.

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:
 $f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b.$

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:
 $f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b$.
- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1, x \in p^{-1}(b_0)$.

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:

$$f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b.$$

- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in p^{-1}(b_0)$.

$$\text{z.z.: } f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$$

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:
 $f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b$.
- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in p^{-1}(b_0)$.
z.z.: $f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$
Sei $\tilde{\alpha} \in \Pi(X)$ mit $Q(\tilde{\alpha}) = x$, $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:

$$f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b.$$

- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in p^{-1}(b_0)$.

$$\text{z.z.: } f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$$

$$\text{Sei } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit } Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Dann gilt:

$$Q(f_*(\tilde{\alpha})) = f(Q(\tilde{\alpha})) = f(x)$$

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:

$$f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b.$$

- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in p^{-1}(b_0)$.

$$\text{z.z.: } f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$$

$$\text{Sei } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit } Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Dann gilt:

$$Q(f_*(\tilde{\alpha})) = f(Q(\tilde{\alpha})) = f(x), q_*(f_*(\tilde{\alpha})) = p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:

$$f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b.$$

- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in p^{-1}(b_0)$.

$$\text{z.z.: } f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$$

$$\text{Sei } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit } Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Dann gilt:

$$Q(f_*(\tilde{\alpha})) = f(Q(\tilde{\alpha})) = f(x), q_*(f_*(\tilde{\alpha})) = p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

$$\implies f(\alpha.x) = f(Z(\tilde{\alpha}))$$

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:

$$f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b.$$

- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in p^{-1}(b_0)$.

$$\text{z.z.: } f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$$

$$\text{Sei } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit } Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Dann gilt:

$$Q(f_*(\tilde{\alpha})) = f(Q(\tilde{\alpha})) = f(x), q_*(f_*(\tilde{\alpha})) = p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

$$\implies f(\alpha.x) = f(Z(\tilde{\alpha})) = Z(f_*(\tilde{\alpha}))$$

Fasertransport

Sei $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ ein Morphismus von Überlagerungen von B .

Nun ist f selbst ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen:

- ▶ $f : X \longrightarrow Y$ respektiert die Partitionen:

$$f(p^{-1}(b)) = f(X_a) \subseteq q^{-1}(b) = X_b.$$

- ▶ Sei $\alpha : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in p^{-1}(b_0)$.

$$\text{z.z.: } f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$$

$$\text{Sei } \tilde{\alpha} \in \Pi(X) \text{ mit } Q(\tilde{\alpha}) = x, p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Dann gilt:

$$Q(f_*(\tilde{\alpha})) = f(Q(\tilde{\alpha})) = f(x), q_*(f_*(\tilde{\alpha})) = p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

$$\implies f(\alpha.x) = f(Z(\tilde{\alpha})) = Z(f_*(\tilde{\alpha})) = \alpha.f(x).$$



Fasertransport

Sei B ein topologischer Raum.

Wir haben den kovarianten Funktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

$$X \longmapsto X = \dot{\bigcup}_{b \in B} X_b \text{ mit } \Pi(B) - \text{Operation}$$

$$f \longmapsto f ,$$

Fasertransport

Sei B ein topologischer Raum.

Wir haben den kovarianten Funktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

$$X \longmapsto X = \dot{\bigcup}_{b \in B} X_b \text{ mit } \Pi(B) - \text{Operation}$$

$$f \longmapsto f ,$$

den **Faserungsfunktor** (C.D.).

Fasertransport

Sei B ein topologischer Raum.

Wir haben den kovarianten Funktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

$$X \longmapsto X = \dot{\bigcup}_{b \in B} X_b \text{ mit } \Pi(B) - \text{Operation}$$

$$f \longmapsto f ,$$

den **Faserungsfunktor** (C.D.).

Bemerkung. Der Faserungsfunktor ist voll.

Aussage. Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:

- ▶ Jeder Punkt von X hat eine Umgebungsbasis bestehend aus wegzusammenhängenden Mengen.
- ▶ X hat eine Basis bestehend aus wegzusammenhängenden Mengen.

Aussage. Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:

- ▶ Jeder Punkt von X hat eine Umgebungsbasis bestehend aus wegzusammenhängenden Mengen.
- ▶ X hat eine Basis bestehend aus wegzusammenhängenden Mengen.

Zum Beweis siehe englische Wikipedia: *locally connected space*, hier das “Theorem” über die analoge Aussage zu *lokal zusammenhängend* und *schwach lokal zusammenhängend* und der Satz darunter.

Aussage. Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:

- ▶ Jeder Punkt von X hat eine Umgebungsbasis bestehend aus wegzusammenhängenden Mengen.
- ▶ X hat eine Basis bestehend aus wegzusammenhängenden Mengen.

Zum Beweis siehe englische Wikipedia: *locally connected space*, hier das “Theorem” über die analoge Aussage zu *lokal zusammenhängend* und *schwach lokal zusammenhängend* und der Satz darunter.

Definition. Ein topologischer Raum mit diesen Eigenschaften heißt **lokal wegzusammenhängend**.

Satz. Sei B ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann ist der Faserungsfunktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

voll treu.

Beweis

Sei B lokal wegzusammenhängend.

Fasertransport

Beweis

Sei B lokal wegzusammenhängend.

Seien (X, p) und (Y, q) Überlagerungen von B .

Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen.

Fasertransport

Beweis

Sei B lokal wegzusammenhängend.

Seien (X, p) und (Y, q) Überlagerungen von B .

Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen.

Sei $x_0 \in X$, $b_0 := p(x_0)$.

Beweis

Sei B lokal wegzusammenhängend.

Seien (X, p) und (Y, q) Überlagerungen von B .

Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen.

Sei $x_0 \in X$, $b_0 := p(x_0)$. Es ist $f(x_0) \in q^{-1}(b_0)$.

Beweis

Sei B lokal wegzusammenhängend.

Seien (X, p) und (Y, q) Überlagerungen von B .

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen.

Sei $x_0 \in X$, $b_0 := p(x_0)$. Es ist $f(x_0) \in q^{-1}(b_0)$.

Wähle eine wegzusammenhängende gleichmäßig überlagerte Umgebung U von b bezüglich p und q . Wir haben

$$p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I} U_i \quad , \quad q^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{j \in J} U'_j$$

(mit der koinduzierten Topologie).

Beweis

Sei B lokal wegzusammenhängend.

Seien (X, p) und (Y, q) Überlagerungen von B .

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen.

Sei $x_0 \in X$, $b_0 := p(x_0)$. Es ist $f(x_0) \in q^{-1}(b_0)$.

Wähle eine wegzusammenhängende gleichmäßig überlagerte Umgebung U von b bezüglich p und q . Wir haben

$$p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I} U_i \quad , \quad q^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{j \in J} U'_j$$

(mit der koinduzierten Topologie).

Sei $x_0 \in U_i$, $f(x_0) \in U'_j$.

Beweis

Sei B lokal wegzusammenhängend.

Seien (X, p) und (Y, q) Überlagerungen von B .

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von $\Pi(B)$ -Mengen.

Sei $x_0 \in X$, $b_0 := p(x_0)$. Es ist $f(x_0) \in q^{-1}(b_0)$.

Wähle eine wegzusammenhängende gleichmäßig überlagerte Umgebung U von b bezüglich p und q . Wir haben

$$p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I} U_i \quad , \quad q^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{j \in J} U'_j$$

(mit der koinduzierten Topologie).

Sei $x_0 \in U_i$, $f(x_0) \in U'_j$.

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Wähle einen Weg w von b_0 nach b in U .

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Wähle einen Weg w von b_0 nach b in U .

Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w nach X mit $\tilde{w}(0) = x_0$.

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Wähle einen Weg w von b_0 nach b in U .

Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w nach X mit $\tilde{w}(0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w}$ ein Weg in U_i , damit $\tilde{w}(1) = x$, $x = [w].x_0$.

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Wähle einen Weg w von b_0 nach b in U .

Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w nach X mit $\tilde{w}(0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w}$ ein Weg in U_i , damit $\tilde{w}(1) = x$, $x = [w].x_0$.

Sei analog $\tilde{w}'$ die Hochhebung von w nach Y mit $\tilde{w}'(0) = f(x_0)$. Dann ist $\tilde{w}'$ ein Weg in U'_j .

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Wähle einen Weg w von b_0 nach b in U .

Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w nach X mit $\tilde{w}(0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w}$ ein Weg in U_i , damit $\tilde{w}(1) = x$, $x = [w].x_0$.

Sei analog $\tilde{w}'$ die Hochhebung von w nach Y mit $\tilde{w}'(0) = f(x_0)$. Dann ist $\tilde{w}'$ ein Weg in U'_j .

$$\implies f(x) = f([w].x_0)$$

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Wähle einen Weg w von b_0 nach b in U .

Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w nach X mit $\tilde{w}(0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w}$ ein Weg in U_i , damit $\tilde{w}(1) = x$, $x = [w].x_0$.

Sei analog $\tilde{w}'$ die Hochhebung von w nach Y mit $\tilde{w}'(0) = f(x_0)$. Dann ist $\tilde{w}'$ ein Weg in U'_j .

$$\implies f(x) = f([w].x_0) = [w].f(x_0)$$

Fasertransport

wollen zeigen: $f(U_i) \subseteq U'_j$.

Sei $x \in U_i$, $b := p(x)$. Es ist $f(x) \in q^{-1}(b)$.

wollen zeigen: $f(x) \in U'_j$.

Wähle einen Weg w von b_0 nach b in U .

Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w nach X mit $\tilde{w}(0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w}$ ein Weg in U_i , damit $\tilde{w}(1) = x$, $x = [w].x_0$.

Sei analog $\tilde{w}'$ die Hochhebung von w nach Y mit $\tilde{w}'(0) = f(x_0)$. Dann ist $\tilde{w}'$ ein Weg in U'_j .

$\implies f(x) = f([w].x_0) = [w].f(x_0) = \tilde{w}'(1) \in U'_j$.



Fasertransport

Sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten Teilmengen U von X mit:

($\star$) Für $u \in U$ ist der Homomorphismus $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.

Fasertransport

Sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten Teilmengen U von X mit:

($\star$) Für $u \in U$ ist der Homomorphismus $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.

Es sind äquivalent:

- i) X wird von offenen Mengen U mit ($\star$) überdeckt.
- ii) X hat eine Basis aus Mengen U mit ($\star$).
- iii) Jeder Punkt von X hat eine Umgebung U mit ($\star$).

Fasertransport

Sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten Teilmengen U von X mit:

($\star$) Für $u \in U$ ist der Homomorphismus $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.

Es sind äquivalent:

- i) X wird von offenen Mengen U mit ($\star$) überdeckt.
- ii) X hat eine Basis aus Mengen U mit ($\star$).
- iii) Jeder Punkt von X hat eine Umgebung U mit ($\star$).

Definition. Wenn für X die genannten Bedingungen gelten, heißt X **semi-lokal einfach zusammenhängend**.

Fasertransport

Sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten Teilmengen U von X mit:

($\star$) Für $u \in U$ ist der Homomorphismus $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.

Es sind äquivalent:

- i) X wird von offenen Mengen U mit ($\star$) überdeckt.
- ii) X hat eine Basis aus Mengen U mit ($\star$).
- iii) Jeder Punkt von X hat eine Umgebung U mit ($\star$).

Definition. Wenn für X die genannten Bedingungen gelten, heißt X **semi-lokal einfach zusammenhängend**.

Sei nun X lokal wegzusammenhängend.

Dann ist X genau dann semi-lokal einfach zusammenhängend, wenn X von offenen wegzusammenhängenden Mengen U mit ($\star$) überdeckt wird.

Fasertransport

Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- i) U ist wegzusammenhängend und für alle $u \in U$ ist $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.
- ii) U ist wegzusammenhängend und für ein $u \in U$ ist $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.
- iii) Für $u_0, u_1 \in U$ ist das Bild von $\pi_1(U; u_0, u_1) \longrightarrow \pi_1(X; u_0, u_1)$ ein-elementig.
- iv) Für $u_0, u_1 \in U$ gibt es einen Weg von u_0 nach u_1 in U und je zwei solche Wege definieren dieselbe Wegklasse in X .

Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- i) U ist wegzusammenhängend und für alle $u \in U$ ist $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.
- ii) U ist wegzusammenhängend und für ein $u \in U$ ist $\pi_1(U, u) \longrightarrow \pi_1(X, u)$ trivial.
- iii) Für $u_0, u_1 \in U$ ist das Bild von $\pi_1(U; u_0, u_1) \longrightarrow \pi_1(X; u_0, u_1)$ ein-elementig.
- iv) Für $u_0, u_1 \in U$ gibt es einen Weg von u_0 nach u_1 in U und je zwei solche Wege definieren dieselbe Wegklasse in X .

Für so eine Teilmenge U sagen wir, sie habe die **Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen**.

Satz. Sei B ein lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum. Dann ist der Faserungsfunktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

ein Isomorphismus von Kategorien.

Beweis

Wir geben ein Inverses der Zuordnung

$$\begin{aligned} ob(\mathcal{C}ov(B)) &\longrightarrow ob(\Pi(B) - \mathcal{E}ns) \\ (X, p) &\longmapsto X \text{ als } \Pi(B)\text{-Menge} \end{aligned}$$

an.

Beweis

Wir geben ein Inverses der Zuordnung

$$\begin{aligned} ob(\mathcal{C}ov(B)) &\longrightarrow ob(\Pi(B) - \mathcal{E}ns) \\ (X, p) &\longmapsto X \text{ als } \Pi(B)\text{-Menge} \end{aligned}$$

an.

Idee. Wir identifizieren zuerst eine “lokale Trivialisierung” und dann damit die Topologie.

Beweis

Wir geben ein Inverses der Zuordnung

$$\begin{aligned} ob(\mathcal{C}ov(B)) &\longrightarrow ob(\Pi(B) - \mathcal{E}ns) \\ (X, p) &\longmapsto X \text{ als } \Pi(B)\text{-Menge} \end{aligned}$$

an.

Idee. Wir identifizieren zuerst eine “lokale Trivialisierung” und dann damit die Topologie.

Sei zunächst B einfach zusammenhängend. Sei X eine $\Pi(B)$ -Menge.

Fasertransport

Sei $b_0 \in B$ (fest).

Fasertransport

Sei $b_0 \in B$ (fest).

Sei $x \in X$. Wir haben ein eindeutiges $\alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0)$. Damit haben wir $\alpha.x \in p^{-1}(b_0)$.

Fasertransport

Sei $b_0 \in B$ (fest).

Sei $x \in X$. Wir haben ein eindeutiges $\alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0)$. Damit haben wir $\alpha.x \in p^{-1}(b_0)$.

Wir haben eine Abbildung

$$X \longrightarrow B \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0).$$

Fasertransport

Sei $b_0 \in B$ (fest).

Sei $x \in X$. Wir haben ein eindeutiges $\alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0)$. Damit haben wir $\alpha.x \in p^{-1}(b_0)$.

Wir haben eine Abbildung

$$X \longrightarrow B \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0).$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion.

Fasertransport

Sei $b_0 \in B$ (fest).

Sei $x \in X$. Wir haben ein eindeutiges $\alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0)$. Damit haben wir $\alpha.x \in p^{-1}(b_0)$.

Wir haben eine Abbildung

$$X \longrightarrow B \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0).$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion.

Die Umkehrung ist ähnlich gegeben:

$$B \times p^{-1}(b_0) \longrightarrow X$$

$$(b, x) \longmapsto \alpha.x \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; b_0, b).$$

Fasertransport

Sei $b_0 \in B$ (fest).

Sei $x \in X$. Wir haben ein eindeutiges $\alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0)$. Damit haben wir $\alpha.x \in p^{-1}(b_0)$.

Wir haben eine Abbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow B \times p^{-1}(b_0) \\ x &\longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion.

Die Umkehrung ist ähnlich gegeben:

$$\begin{aligned} B \times p^{-1}(b_0) &\longrightarrow X \\ (b, x) &\longmapsto \alpha.x \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; b_0, b). \end{aligned}$$

Wir haben also “mengentheoretische Trivialisierung” von X über B .

Wir haben die “mengentheoretische Trivialisierung”

$$X \longrightarrow B \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0).$$

Wir haben die “mengentheoretische Trivialisierung”

$$X \longrightarrow B \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0).$$

Idee. Wir definieren eine Topologie auf X mittels der Trivialisierung (wobei die $p^{-1}(b_0)$ diskret sei).

Wir haben die “mengentheoretische Trivialisierung”

$$X \longrightarrow B \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0).$$

Idee. Wir definieren eine Topologie auf X mittels der Trivialisierung (wobei die $p^{-1}(b_0)$ diskret sei).

Das soll kanonisch sein.

Wir haben die “mengentheoretische Trivialisierung”

$$X \longrightarrow B \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), \alpha.x) \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; p(x), b_0).$$

Idee. Wir definieren eine Topologie auf X mittels der Trivialisierung (wobei die $p^{-1}(b_0)$ diskret sei).

Das soll kanonisch sein.

z.z.: Unabhängigkeit von b_0 .

Fasertransport

Seien $b_0, b_1 \in B$.

Wir haben ein eindeutiges $\alpha \in \pi_1(B; b_0, b_1)$ und damit das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & B \times p^{-1}(b_0) & \\ \nearrow & \downarrow (b,x) \mapsto (b,\alpha.x) & \\ X & & \\ \searrow & & \\ & B \times p^{-1}(b_1) & \end{array}$$

“rechts” ist ein Homöomorphismus.

Fasertransport

Wir sind von einer $\Pi(B)$ -Menge gestartet X , haben daraus eine Überlagerung konstruiert. Diese hat einen Fasertransport; man erhält wieder eine $\Pi(B)$ -Menge.

Fasertransport

Wir sind von einer $\Pi(B)$ -Menge gestartet X , haben daraus eine Überlagerung konstruiert. Diese hat einen Fasertransport; man erhält wieder eine $\Pi(B)$ -Menge.

Wir wollen zeigen:

Die ursprüngliche $\Pi(B)$ -Operation auf X ist gleich der durch die Überlagerung definierten Fasertransport-Operation.

Fasertransport

Wir sind von einer $\Pi(B)$ -Menge gestartet X , haben daraus eine Überlagerung konstruiert. Diese hat einen Fasertransport; man erhält wieder eine $\Pi(B)$ -Menge.

Wir wollen zeigen:

Die ursprüngliche $\Pi(B)$ -Operation auf X ist gleich der durch die Überlagerung definierten Fasertransport-Operation.

Sei $\gamma \in \Pi(B)$, $\gamma : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in X_{b_0} = p^{-1}(b_0)$.

Nach Definition ist der Fasertransport angewandt auf γ und x gegeben durch $Z(\tilde{\gamma})$ für $\tilde{\gamma} \in \Pi(X)$ mit $Q(\tilde{\gamma}) = x$, $p_*(\tilde{\gamma}) = \gamma$.

Fasertransport

Wir sind von einer $\Pi(B)$ -Menge gestartet X , haben daraus eine Überlagerung konstruiert. Diese hat einen Fasertransport; man erhält wieder eine $\Pi(B)$ -Menge.

Wir wollen zeigen:

Die ursprüngliche $\Pi(B)$ -Operation auf X ist gleich der durch die Überlagerung definierten Fasertransport-Operation.

Sei $\gamma \in \Pi(B)$, $\gamma : b_0 \rightarrow b_1$, $x \in X_{b_0} = p^{-1}(b_0)$.

Nach Definition ist der Fasertransport angewandt auf γ und x gegeben durch $Z(\tilde{\gamma})$ für $\tilde{\gamma} \in \Pi(X)$ mit $Q(\tilde{\gamma}) = x$, $p_*(\tilde{\gamma}) = \gamma$.

z.z.:

$$Z(\tilde{\gamma}) = \gamma.x ,$$

wobei rechts die ursprüngliche Operation auf γ und x angewandt wird.

Fasertransport

Sei w ein Weg in B von b_0 nach b_1 . Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = x$.

z.z.:

$$\tilde{w}(1) = [w].x$$

Fasertransport

Sei w ein Weg in B von b_0 nach b_1 . Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = x$.

z.z.:

$$\tilde{w}(1) = [w].x$$

Wir haben den Homöomorphismus über B :

$$B \times p^{-1}(b_0) \longrightarrow X$$

$$(b, x) \longmapsto \alpha.x \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; b_0, b).$$

Fasertransport

Sei w ein Weg in B von b_0 nach b_1 . Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = x$.

z.z.:

$$\tilde{w}(1) = [w].x$$

Wir haben den Homöomorphismus über B :

$$B \times p^{-1}(b_0) \longrightarrow X$$

$$(b, x) \longmapsto \alpha.x \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; b_0, b).$$

Unter diesem Homöomorphismus entspricht $\tilde{w}$ dem Weg $t \mapsto (w(t), x)$. Dieser hat den Endpunkt $(w(1), x) = (b_1, x)$.

Fasertransport

Sei w ein Weg in B von b_0 nach b_1 . Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = x$.

z.z.:

$$\tilde{w}(1) = [w].x$$

Wir haben den Homöomorphismus über B :

$$B \times p^{-1}(b_0) \longrightarrow X$$

$$(b, x) \longmapsto \alpha.x \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; b_0, b).$$

Unter diesem Homöomorphismus entspricht $\tilde{w}$ dem Weg $t \mapsto (w(t), x)$. Dieser hat den Endpunkt $(w(1), x) = (b_1, x)$.

Die eindeutig bestimmte Wegklasse in $\pi_1(B; b_0, b_1)$ ist $[w]$.

Fasertransport

Sei w ein Weg in B von b_0 nach b_1 . Sei $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = x$.

z.z.:

$$\tilde{w}(1) = [w].x$$

Wir haben den Homöomorphismus über B :

$$B \times p^{-1}(b_0) \longrightarrow X$$

$$(b, x) \longmapsto \alpha.x \quad \text{mit } \alpha \in \pi_1(B; b_0, b).$$

Unter diesem Homöomorphismus entspricht $\tilde{w}$ dem Weg $t \mapsto (w(t), x)$. Dieser hat den Endpunkt $(w(1), x) = (b_1, x)$.

Die eindeutig bestimmte Wegklasse in $\pi_1(B; b_0, b_1)$ ist $[w]$.

Der Punkt $(w(1), x)$ entspricht somit dem Punkt $[w].x$ in X .

Fasertransport

Sei B ein beliebiger lokal wegzusammenhängender, semi-lokal einfach zusammenhängender Raum.

Sei $b_0 \in B$.

Wir haben eine offene Umgebung U von b_0 , die die Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen erfüllt.

Fasertransport

Sei B ein beliebiger lokal wegzusammenhängender, semi-lokal einfach zusammenhängender Raum.

Sei $b_0 \in B$.

Wir haben eine offene Umgebung U von b_0 , die die Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen erfüllt.

Für $b \in B$ definiert jeder Weg w von b nach b_0 dieselbe Klasse in $\pi_1(B; b, b_0)$.

Fasertransport

Sei B ein beliebiger lokal wegzusammenhängender, semi-lokal einfach zusammenhängender Raum.

Sei $b_0 \in B$.

Wir haben eine offene Umgebung U von b_0 , die die Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft für Wegklassen erfüllt.

Für $b \in B$ definiert jeder Weg w von b nach b_0 dieselbe Klasse in $\pi_1(B; b, b_0)$. Damit haben wir wieder eine Bijektion

$$p^{-1}(U) \longrightarrow U \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), [w].x) \quad \text{mit einem Weg } w \text{ von } b \text{ nach } b_0 \text{ in } U.$$

Wir definieren hiermit eine Topologie auf $p^{-1}(U)$.

Fasertransport

Sei B ein beliebiger lokal wegzusammenhängender, semi-lokal einfach zusammenhängender Raum.

Sei $b_0 \in B$.

Wir haben eine offene Umgebung U von b_0 , die die Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen erfüllt.

Für $b \in B$ definiert jeder Weg w von b nach b_0 dieselbe Klasse in $\pi_1(B; b, b_0)$. Damit haben wir wieder eine Bijektion

$$p^{-1}(U) \longrightarrow U \times p^{-1}(b_0)$$

$$x \longmapsto (p(x), [w].x) \quad \text{mit einem Weg } w \text{ von } b \text{ nach } b_0 \text{ in } U.$$

Wir definieren hiermit eine Topologie auf $p^{-1}(U)$.

Das ist wieder unabhängig vom Punkt b_0 .

Fasertransport

Sei B ein beliebiger lokal wegzusammenhängender, semi-lokal einfach zusammenhängender Raum.

Sei $b_0 \in B$.

Wir haben eine offene Umgebung U von b_0 , die die Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen erfüllt.

Für $b \in B$ definiert jeder Weg w von b nach b_0 dieselbe Klasse in $\pi_1(B; b, b_0)$. Damit haben wir wieder eine Bijektion

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\longrightarrow U \times p^{-1}(b_0) \\ x &\longmapsto (p(x), [w].x) \quad \text{mit einem Weg } w \text{ von } b \text{ nach } b_0 \text{ in } U. \end{aligned}$$

Wir definieren hiermit eine Topologie auf $p^{-1}(U)$.

Das ist wieder unabhängig vom Punkt b_0 .

Wichtig: Die Konstruktion ist “verträglich mit Verkleinerung des Bereichs”.

Fasertransport

Die Konstruktion ist “verträglich mit Verkleinern des Bereichs”:

Seien $b_0 \in U_1 \subseteq U_0 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft für Wegklassen.

Fasertransport

Die Konstruktion ist “verträglich mit Verkleinern des Bereichs”:

Seien $b_0 \in U_1 \subseteq U_0 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft für Wegklassen.

Dann haben wir Trivialisierungen über U_0 und über U_1 .

Die beiden Trivialisierungen sind kompatibel zueinander

Fasertransport

Die Konstruktion ist “verträglich mit Verkleinern des Bereichs”:

Seien $b_0 \in U_1 \subseteq U_0 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft für Wegklassen.

Dann haben wir Trivialisierungen über U_0 und über U_1 .

Die beiden Trivialisierungen sind kompatibel zueinander, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_1) & \longrightarrow & U_1 \times p^{-1}(b_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^{-1}(U_0) & \longrightarrow & U_0 \times p^{-1}(b_0) \end{array}$$

ist kommutativ.

Fasertransport

Die Konstruktion ist “verträglich mit Verkleinern des Bereichs”:

Seien $b_0 \in U_1 \subseteq U_0 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft für Wegklassen.

Dann haben wir Trivialisierungen über U_0 und über U_1 .

Die beiden Trivialisierungen sind kompatibel zueinander, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_1) & \longrightarrow & U_1 \times p^{-1}(b_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^{-1}(U_0) & \longrightarrow & U_0 \times p^{-1}(b_0) \end{array}$$

ist kommutativ.

Damit: Sei $V \subseteq p^{-1}(U_1)$. Dann ist V genau dann offen in $p^{-1}(U_1)$, wenn V offen in $p^{-1}(U_0)$ ist.

Fasertransport

Die Konstruktion ist “verträglich mit Verkleinern des Bereichs”:

Seien $b_0 \in U_1 \subseteq U_0 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen.

Dann haben wir Trivialisierungen über U_0 und über U_1 .

Die beiden Trivialisierungen sind kompatibel zueinander, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_1) & \longrightarrow & U_1 \times p^{-1}(b_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^{-1}(U_0) & \longrightarrow & U_0 \times p^{-1}(b_0) \end{array}$$

ist kommutativ.

Damit: Sei $V \subseteq p^{-1}(U_1)$. Dann ist V genau dann offen in $p^{-1}(U_1)$, wenn V offen in $p^{-1}(U_0)$ ist.

Oder: $p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_0)$ und die Topologie auf $p^{-1}(U_1)$ ist die Einschränkung der Topologie von $p^{-1}(U_0)$ auf $p^{-1}(U_1)$.

Fasertransport

Wir definieren wie folgt eine Topologie auf X :

Eine Menge $V \subseteq X$ heiße *offen*, wenn alle offenen $U \subseteq B$, die die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen erfüllen, gilt: $V \cap p^{-1}(U)$ ist offen.

Fasertransport

Wir definieren wie folgt eine Topologie auf X :

Eine Menge $V \subseteq X$ heiße *offen*, wenn alle offenen $U \subseteq B$, die die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen erfüllen, gilt: $V \cap p^{-1}(U)$ ist offen.

Beschreibung als koinduzierte Topologie:

Betrachte die Inklusionen

$$p^{-1}(U) \hookrightarrow X,$$

wobei U über eine offene Teilmenge von B ist, die die Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft für Wegklassen haben.

Die auf X definierte Topologie ist die von diesen Abbildungen koinduzierte Topologie auf X .

Fasertransport

Wir wollen:

Für $U \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen ist $V \subseteq p^{-1}(U)$ genau dann offen in der ursprünglichen Topologie von $p^{-1}(U)$, wenn V offen in X ist.

Fasertransport

Wir wollen:

Für $U \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen ist $V \subseteq p^{-1}(U)$ genau dann offen in der ursprünglichen Topologie von $p^{-1}(U)$, wenn V offen in X ist.

Sei U_0 eine solche Menge, $V \subseteq p^{-1}(U_0)$.

Wir wollen: V ist genau dann offen in $p^{-1}(U_0)$ (mit der ursprünglichen Topologie), wenn V offen in X ist.

Fasertransport

Wir wollen:

Für $U \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft für Wegklassen ist $V \subseteq p^{-1}(U)$ genau dann offen in der ursprünglichen Topologie von $p^{-1}(U)$, wenn V offen in X ist.

Sei U_0 eine solche Menge, $V \subseteq p^{-1}(U_0)$.

Wir wollen: V ist genau dann offen in $p^{-1}(U_0)$ (mit der ursprünglichen Topologie), wenn V offen in X ist.

Letzteres bedeutet: Für alle $U_1 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft ist $V \cap p^{-1}(U_1)$ offen.

Fasertransport

Wir wollen:

Für $U \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen ist $V \subseteq p^{-1}(U)$ genau dann offen in der ursprünglichen Topologie von $p^{-1}(U)$, wenn V offen in X ist.

Sei U_0 eine solche Menge, $V \subseteq p^{-1}(U_0)$.

Wir wollen: V ist genau dann offen in $p^{-1}(U_0)$ (mit der ursprünglichen Topologie), wenn V offen in X ist.

Letzteres bedeutet: Für alle $U_1 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft ist $V \cap p^{-1}(U_1)$ offen.

Also zu zeigen:

Für $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen ist $V \cap p^{-1}(U_1)$ offen in $p^{-1}(U_1)$.

Fasertransport

Wir wollen:

Für $U \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen ist $V \subseteq p^{-1}(U)$ genau dann offen in der ursprünglichen Topologie von $p^{-1}(U)$, wenn V offen in X ist.

Sei U_0 eine solche Menge, $V \subseteq p^{-1}(U_0)$.

Wir wollen: V ist genau dann offen in $p^{-1}(U_0)$ (mit der ursprünglichen Topologie), wenn V offen in X ist.

Letzteres bedeutet: Für alle $U_1 \subseteq B$ offen mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft ist $V \cap p^{-1}(U_1)$ offen.

Also zu zeigen:

Für $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen ist $V \cap p^{-1}(U_1)$ offen in $p^{-1}(U_1)$.

Spezialfall. $U_1 \subseteq U_0$. Dann stimmt's.

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Angenommen, $U_0 \cap U_1$ erfüllt die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen.

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Angenommen, $U_0 \cap U_1$ erfüllt die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen.

$\implies V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_0 \cap U_1)$ und damit auch in $p^{-1}(U_1)$.

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Angenommen, $U_0 \cap U_1$ erfüllt die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen.

$\implies V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_0 \cap U_1)$ und damit auch in $p^{-1}(U_1)$.

Zum allgemeinen Fall ...

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Wir haben eine Überdeckung von $p^{-1}(U_0 \cap U_1)$ durch offene Teilmengen, die die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen erfüllen; sagen wir $(U'_i)_{i \in I}$.

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Wir haben eine Überdeckung von $p^{-1}(U_0 \cap U_1)$ durch offene Teilmengen, die die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen erfüllen; sagen wir $(U'_i)_{i \in I}$.

$$\begin{aligned} V \cap p^{-1}(U_1) &= V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1) = \\ &= V \cap \left(\bigcup_{i \in I} p^{-1}(U'_i) \right) = \bigcup_{i \in I} (V \cap p^{-1}(U'_i)) \end{aligned}$$

Fasertransport

Seien $U_0, U_1 \subseteq B$ mit der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen und $V \subseteq p^{-1}(U_0)$ offen.

z.z.: $V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

$$V \cap p^{-1}(U_1) = V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1)$$

Wir haben eine Überdeckung von $p^{-1}(U_0 \cap U_1)$ durch offene Teilmengen, die die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Wegklassen erfüllen; sagen wir $(U'_i)_{i \in I}$.

$$\begin{aligned} V \cap p^{-1}(U_1) &= V \cap p^{-1}(U_0 \cap U_1) = \\ &= V \cap \left(\bigcup_{i \in I} p^{-1}(U'_i) \right) = \bigcup_{i \in I} (V \cap p^{-1}(U'_i)) \end{aligned}$$

Für $i \in I$ ist $V \cap p^{-1}(U'_i)$ offen in $p^{-1}(U'_i)$ und damit auch offen in $p^{-1}(U_1)$.

$\implies V \cap p^{-1}(U_1)$ ist offen in $p^{-1}(U_1)$.

Wir wollen wieder zeigen:

Für eine $\Pi(B)$ -Menge X gilt:

Die $\Pi(B)$ -Operation zur zugehörigen Überlagerung ist gleich der ursprünglichen $\Pi(B)$ -Operation.

Wir wollen wieder zeigen:

Für eine $\Pi(B)$ -Menge X gilt:

Die $\Pi(B)$ -Operation zur zugehörigen Überlagerung ist gleich der ursprünglichen $\Pi(B)$ -Operation.

Für Wegklassen, die durch Wege in offenen Mengen, die die Existenz- und Eindeutigkeitseigenschaft erfüllen, gegeben sind, ist dies richtig.

Wir wollen wieder zeigen:

Für eine $\Pi(B)$ -Menge X gilt:

Die $\Pi(B)$ -Operation zur zugehörigen Überlagerung ist gleich der ursprünglichen $\Pi(B)$ -Operation.

Für Wegklassen, die durch Wege in offenen Mengen, die die Existenz- und Eindeigkeitseigenschaft erfüllen, gegeben sind, ist dies richtig.

Da alle Elemente in $\Pi(B)$ Produkte solcher Elemente sind, gilt die Aussage.

Wir müssen noch zeigen:

Für eine Überlagerung $p : X \longrightarrow B$ gilt:

Die Topologie zur zugehörigen $\Pi(B)$ -Menge ist gleich der ursprünglichen Topologie auf X .

Fasertransport

Wir müssen noch zeigen:

Für eine Überlagerung $p : X \longrightarrow B$ gilt:

Die Topologie zur zugehörigen $\Pi(B)$ -Menge ist gleich der ursprünglichen Topologie auf X .

Übungsaufgabe!



Satz. Sei B ein lokal wegzusammenhängender zusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum. Dann ist der Faserungsfunktor

$$\mathcal{C}ov(B) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

ein Isomorphismus von Kategorien.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann definiert jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Überlagerung von B .

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann definiert jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Überlagerung von B .

Beweis. Sei Y eine Wegzusammenhangskomponente von X .

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann definiert jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Überlagerung von B .

Beweis. Sei Y eine Wegzusammenhangskomponente von X . Sei $U \subseteq X$ gleichmäßig überlagert und wegzusammenhängend.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann definiert jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Überlagerung von B .

Beweis. Sei Y eine Wegzusammenhangskomponente von X .

Sei $U \subseteq X$ gleichmäßig überlagert und wegzusammenhängend.

Sei $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit ...

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann definiert jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Überlagerung von B .

Beweis. Sei Y eine Wegzusammenhangskomponente von X .

Sei $U \subseteq X$ gleichmäßig überlagert und wegzusammenhängend.

Sei $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit ...

Sei für ein $i \in I$ $U_i \cap Y \neq \emptyset$.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann definiert jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Überlagerung von B .

Beweis. Sei Y eine Wegzusammenhangskomponente von X .

Sei $U \subseteq X$ gleichmäßig überlagert und wegzusammenhängend.

Sei $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit ...

Sei für ein $i \in I$ $U_i \cap Y \neq \emptyset$.

Da U_i wegzusammenhängend ist, ist $U_i \subseteq Y$.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann definiert jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Überlagerung von B .

Beweis. Sei Y eine Wegzusammenhangskomponente von X .

Sei $U \subseteq X$ gleichmäßig überlagert und wegzusammenhängend.

Sei $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit ...

Sei für ein $i \in I$ $U_i \cap Y \neq \emptyset$.

Da U_i wegzusammenhängend ist, ist $U_i \subseteq Y$.

Somit ist $p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung einiger U_i .



Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Sei B wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$. Dann entsprechen die Wegzusammenhangskomponenten den Bahnen der $\pi_1(B, b)$ -Operation auf $p^{-1}(b)$. Insbesondere ist die Operation genau dann transitiv, wenn X wegzusammenhängend ist.

Zusammenhangseigenschaften

Aussage. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn X wegzusammenhängend ist.

Wenn B wegzusammenhängend ist, ist dies für ein beliebiges $b \in B$ äquivalent zu:

Die $\pi_1(B, b)$ -Operation auf $p^{-1}(b)$ ist transitiv.

Zusammenhangseigenschaften

Aussage. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn X wegzusammenhängend ist.

Wenn B wegzusammenhängend ist, ist dies für ein beliebiges $b \in B$ äquivalent zu:

Die $\pi_1(B, b)$ -Operation auf $p^{-1}(b)$ ist transitiv.

Beweis

X ist lokal wegzusammenhängend.

Zusammenhangseigenschaften

Aussage. Sei B lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn X wegzusammenhängend ist.

Wenn B wegzusammenhängend ist, ist dies für ein beliebiges $b \in B$ äquivalent zu:

Die $\pi_1(B, b)$ -Operation auf $p^{-1}(b)$ ist transitiv.

Beweis

X ist lokal wegzusammenhängend.

Allgemein gilt:

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

- ▶ W ist offen, weil X lokal wegzusammenhängend ist.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

- ▶ W ist offen, weil X lokal wegzusammenhängend ist.
- ▶ W ist abgeschlossen:

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

- ▶ W ist offen, weil X lokal wegzusammenhängend ist.
- ▶ W ist abgeschlossen: Sei $x \in \overline{W}$.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

- ▶ W ist offen, weil X lokal wegzusammenhängend ist.
- ▶ W ist abgeschlossen: Sei $x \in \overline{W}$. Wähle eine offene wegzusammenhängende Umgebung U von x .

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

- ▶ W ist offen, weil X lokal wegzusammenhängend ist.
- ▶ W ist abgeschlossen: Sei $x \in \overline{W}$. Wähle eine offene wegzusammenhängende Umgebung U von x . Dann ist also $W \cap U \neq \emptyset$; sei $y \in W \cap U$.

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

- ▶ W ist offen, weil X lokal wegzusammenhängend ist.
- ▶ W ist abgeschlossen: Sei $x \in \overline{W}$. Wähle eine offene wegzusammenhängende Umgebung U von x . Dann ist also $W \cap U \neq \emptyset$; sei $y \in W \cap U$. Dann gibt es einen Weg von x_0 zu y (weil in W) und einen Weg von y zu x (weil beide in U).

Zusammenhangseigenschaften

Lemma. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.

Beweis. Sei X so ein Raum.

Sei $x_0 \in X$, W die Wegzusammenhangskomponente von x_0 .

- ▶ W ist offen, weil X lokal wegzusammenhängend ist.
- ▶ W ist abgeschlossen: Sei $x \in \overline{W}$. Wähle eine offene wegzusammenhängende Umgebung U von x . Dann ist also $W \cap U \neq \emptyset$; sei $y \in W \cap U$. Dann gibt es einen Weg von x_0 zu y (weil in W) und einen Weg von y zu x (weil beide in U).



Zusammenhangseigenschaften

Aussage. Sei B wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $p : X \longrightarrow B$ eine Überlagerung, $b \in B$.

Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von X gleich den Zusammenhangskomponenten und entsprechen den Bahnen der $\pi_1(B, b)$ -Operation auf $p^{-1}(b)$.

Zusammenhangseigenschaften

Satz. Sei B lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Dann ist jede Überlagerung (X, p) von B trivial, d.h. wenn F eine typische Faser ist, ist (X, p) isomorph zu $(B \times F, p_B)$.

Insbesondere ist eine (weg-)zusammenhängende Überlagerung von B die triviale Überlagerung.

Zusammenhangseigenschaften

Satz. Sei B lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Dann ist jede Überlagerung (X, p) von B trivial, d.h. wenn F eine typische Faser ist, ist (X, p) isomorph zu $(B \times F, p_B)$.

Insbesondere ist eine (weg-)zusammenhängende Überlagerung von B die triviale Überlagerung.

Beweis. Im Beweis des Satzes über den Fasertransport haben wir gezeigt:

(X, p) können wir eine $\Pi(B)$ -Menge zuordnen, dieser Menge eine Überlagerung.

Zusammenhangseigenschaften

Satz. Sei B lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Dann ist jede Überlagerung (X, p) von B trivial, d.h. wenn F eine typische Faser ist, ist (X, p) isomorph zu $(B \times F, p_B)$.

Insbesondere ist eine (weg-)zusammenhängende Überlagerung von B die triviale Überlagerung.

Beweis. Im Beweis des Satzes über den Fasertransport haben wir gezeigt:

(X, p) können wir eine $\Pi(B)$ -Menge zuordnen, dieser Menge eine Überlagerung.

Jene Überlagerung ist “per Konstruktion” isomorph zu $(B \times F, p_B)$

Zusammenhangseigenschaften

Satz. Sei B lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend. Dann ist jede Überlagerung (X, p) von B trivial, d.h. wenn F eine typische Faser ist, ist (X, p) isomorph zu $(B \times F, p_B)$.

Insbesondere ist eine (weg-)zusammenhängende Überlagerung von B die triviale Überlagerung.

Beweis. Im Beweis des Satzes über den Fasertransport haben wir gezeigt:

(X, p) können wir eine $\Pi(B)$ -Menge zuordnen, dieser Menge eine Überlagerung.

Jene Überlagerung ist “per Konstruktion” isomorph zu $(B \times F, p_B)$ und identisch zu (X, p) . □