

Algebraische Topologie

Vorlesung im Wintersemester 2020/21

gehalten von Claus Diem

§4 Berechnung von Fundamentalgruppen

Der Fundamentalgruppoidfunktork

Für einen topologischen Raum X haben wir das
Fundamentalgruppoid

$$\Pi(X)$$

Der Fundamentalgruppoidfunktork

Für einen topologischen Raum X haben wir das
Fundamentalgruppoid

$$\Pi(X) ,$$

für eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ den kovarianten Funktor

$$\Pi(f) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$$

mit

$$x \longmapsto f(x) \quad , \quad \gamma \longmapsto f_*(\gamma) .$$

Der Fundamentalgruppoidfunktork

Für einen topologischen Raum X haben wir das
Fundamentalgruppoid

$$\Pi(X) ,$$

für eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ den kovarianten Funktor

$$\Pi(f) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$$

mit

$$x \longmapsto f(x) \quad , \quad \gamma \longmapsto f_*(\gamma) .$$

Hiermit ist

$$\Pi : \mathcal{Top} \rightsquigarrow \mathcal{Gruppoid} \subseteq \mathcal{Cat}$$

auch ein kovarianter Funktor

Der Fundamentalgruppoidfunktork

Für einen topologischen Raum X haben wir das
Fundamentalgruppoid

$$\Pi(X) ,$$

für eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ den kovarianten Funktor

$$\Pi(f) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$$

mit

$$x \longmapsto f(x) \quad , \quad \gamma \longmapsto f_*(\gamma) .$$

Hiermit ist

$$\Pi : \mathcal{Top} \rightsquigarrow \mathcal{Gruppoid} \subseteq \mathcal{Cat}$$

auch ein kovarianter Funktor.

Dies ist **Fundamentalgruppoidfunktork**.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz. Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Dann transformiert der Fundamentalgruppoidfunktor das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

von topologischen Räumen in ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V) & \longrightarrow & \Pi(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U) & \longrightarrow & \Pi(X) . \end{array}$$

von Gruppoiden.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Beweis.

Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

z.z.:

Für alle Gruppoide G und alle Homomorphismen von Gruppoiden $\varphi : \Pi(U) \longrightarrow G$ und $\psi : \Pi(V) \longrightarrow G$, mit welchen das Diagramm

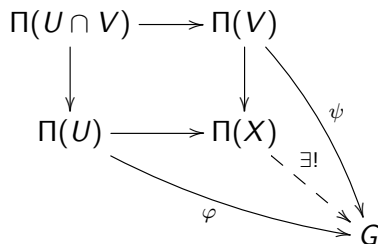
$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V) & \longrightarrow & \Pi(V) \\ \downarrow & & \downarrow \psi \\ \Pi(U) & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

kommutiert, gibt es genau einen Morphismus $\chi : \Pi(X) \longrightarrow G$, mit welchem das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Pi(U \cap V) & \longrightarrow & \Pi(V) & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow \psi & \\ \Pi(U) & \longrightarrow & \Pi(X) & & \\ & \searrow \varphi & \searrow \chi & \searrow & \\ & & & & G \end{array}$$

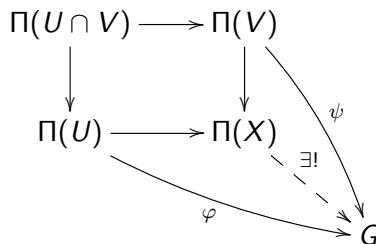
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Symbolisch:



Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

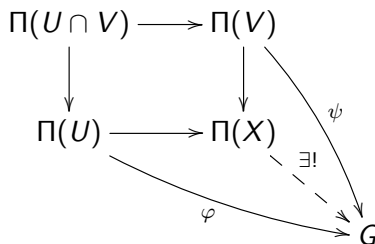
Symbolisch:



Sei also so ein Tripel (G, φ, ψ) gegeben.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Symbolisch:

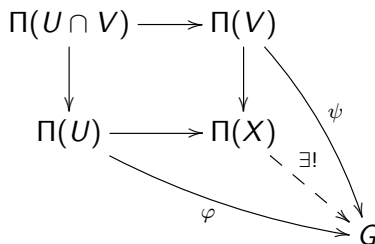


Sei also so ein Tripel (G, φ, ψ) gegeben.

Existenz und Eindeutigkeit auf Objekten

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Symbolisch:



Sei also so ein Tripel (G, φ, ψ) gegeben.

Existenz und Eindeutigkeit auf Objekten = Indices = Punkten

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen

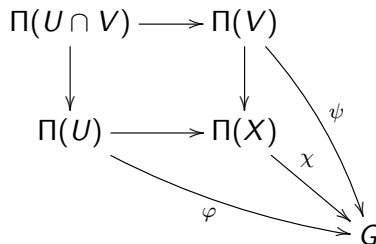
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen = Wegklassen

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen = Wegklassen

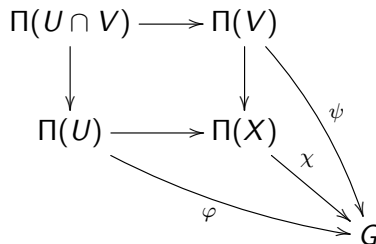
Sei χ wie gefordert gegeben:



Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen = Wegklassen

Sei χ wie gefordert gegeben:

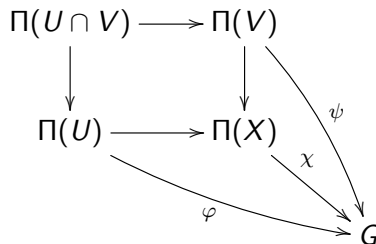


Sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$, $\alpha = [w]$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen = Wegklassen

Sei χ wie gefordert gegeben:



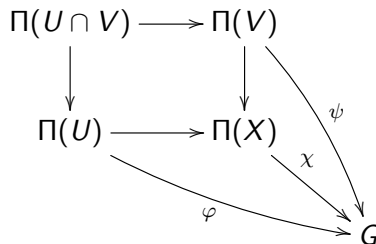
Sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$, $\alpha = [w]$.

Spezialfall. w verlaufe zunächst vollständig in U .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen = Wegklassen

Sei χ wie gefordert gegeben:



Sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$, $\alpha = [w]$.

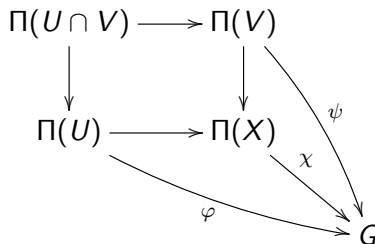
Spezialfall. w verlaufe zunächst vollständig in U .

Wir haben $w = \iota_U \circ v = (\iota_U)_*(v)$ für einen Weg v in U .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen = Wegklassen

Sei χ wie gefordert gegeben:



Sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$, $\alpha = [w]$.

Spezialfall. w verlaufe zunächst vollständig in U .

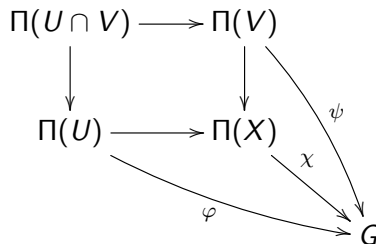
Wir haben $w = \iota_U \circ v = (\iota_U)_*(v)$ für einen Weg v in U .

Somit: $\alpha = [w] = (\iota_U)_*([v]) = \Pi(\iota_U)([v])$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Eindeutigkeit auf Morphismen = Wegklassen

Sei χ wie gefordert gegeben:



Sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$, $\alpha = [w]$.

Spezialfall. w verlaufe zunächst vollständig in U .

Wir haben $w = \iota_U \circ v = (\iota_U)_*(v)$ für einen Weg v in U .

Somit: $\alpha = [w] = (\iota_U)_*([v]) = \Pi(\iota_U)([v])$

Damit: $\chi(\alpha) = (\chi \circ \Pi(\iota_U))([v]) = \varphi([v])$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Definition. So eine Zahl δ nennen wir **Lebesgue-Zahl** (zu den gegebenen Daten).

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Definition. So eine Zahl δ nennen wir **Lebesgue-Zahl** (zu den gegebenen Daten).

Zur Verknüpfung von Wegen.

Für Wege w_1, w_2, w_3 in einem Raum X gilt nicht immer

$$(w_3 \star w_2) \star w_1 = w_3 \star (w_2 \star w_1) .$$

Wir definieren für Wege $w_1, \dots, w_n$: $w_n \star \dots \star w_1$ “gleichmäßig”.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Allgemeiner Fall.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Allgemeiner Fall.

$w^{-1}(U), w^{-1}(V)$ ist eine offene Überdeckung von $I = [0; 1]$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Allgemeiner Fall.

$w^{-1}(U), w^{-1}(V)$ ist eine offene Überdeckung von $I = [0; 1]$.

Wir setzen $n \in \mathbf{N}$ so, dass $\frac{1}{n}$ eine Lebesgue-Zahl hierfür ist.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Allgemeiner Fall.

$w^{-1}(U), w^{-1}(V)$ ist eine offene Überdeckung von $I = [0; 1]$.

Wir setzen $n \in \mathbf{N}$ so, dass $\frac{1}{n}$ eine Lebesgue-Zahl hierfür ist.

Wir haben Wege $w_1, \dots, w_n$, die jeweils ganz in U oder ganz in V verlaufen mit

$$w = w_n \star \dots \star w_1 .$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Allgemeiner Fall.

$w^{-1}(U), w^{-1}(V)$ ist eine offene Überdeckung von $I = [0; 1]$.

Wir setzen $n \in \mathbf{N}$ so, dass $\frac{1}{n}$ eine Lebesgue-Zahl hierfür ist.

Wir haben Wege $w_1, \dots, w_n$, die jeweils ganz in U oder ganz in V verlaufen mit

$$w = w_n \star \dots \star w_1 .$$

Genauer: Wir betrachten $w_1, \dots, w_n$ als Wege in U oder V , nicht in X .

Es seien $\iota_1, \dots, \iota_n$ jeweils die Einbettungen von U oder V nach X .

Dann ist

$$\begin{aligned} w &= (\iota_n \circ w_n) \star \dots \star (\iota_1 \circ w_1) \\ &= (\iota_n)_*(w_n) \star \dots \star (\iota_1)_*(w_1) . \end{aligned}$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

$$\begin{aligned}w &= (\iota_n \circ w_n) \star \cdots \star (\iota_1 \circ w_1) \\&= (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1)\end{aligned}$$

Somit:

$$\alpha = (\iota_n)_*([w_n]) \star \cdots \star (\iota_1)_*([w_1])$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

$$\begin{aligned}w &= (\iota_n \circ w_n) \star \cdots \star (\iota_1 \circ w_1) \\ &= (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1)\end{aligned}$$

Somit:

$$\alpha = (\iota_n)_*([w_n]) \star \cdots \star (\iota_1)_*([w_1])$$

$$\chi(\alpha) = \chi((\iota_n)_*([w_n])) \star \cdots \star \chi((\iota_1)_*([w_1]))$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

$$\begin{aligned}w &= (\iota_n \circ w_n) \star \cdots \star (\iota_1 \circ w_1) \\ &= (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1)\end{aligned}$$

Somit:

$$\alpha = (\iota_n)_*([w_n]) \star \cdots \star (\iota_1)_*([w_1])$$

$$\begin{aligned}\chi(\alpha) &= \chi((\iota_n)_*([w_n])) \star \cdots \star \chi((\iota_1)_*([w_1])) \\ &= v_n([w_n]) \star \cdots \star v_1([w_1])\end{aligned}$$

mit $v_1, \dots, v_n = \varphi$ oder $= \psi$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

$$\begin{aligned}w &= (\iota_n \circ w_n) \star \cdots \star (\iota_1 \circ w_1) \\&= (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1)\end{aligned}$$

Somit:

$$\alpha = (\iota_n)_*([w_n]) \star \cdots \star (\iota_1)_*([w_1])$$

$$\begin{aligned}\chi(\alpha) &= \chi((\iota_n)_*([w_n])) \star \cdots \star \chi((\iota_1)_*([w_1])) \\&= v_n([w_n]) \star \cdots \star v_1([w_1])\end{aligned}$$

mit $v_1, \dots, v_n = \varphi$ oder ψ .

Schlussfolgerung: $\chi(\alpha)$ ist eindeutig bestimmt durch φ und ψ .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Existenz

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Existenz

Es sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Existenz

Es sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$.

Es sei $\alpha = [w]$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Existenz

Es sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$.

Es sei $\alpha = [w]$.

Wir haben wieder Wege $w_1, \dots, w_n$ in U oder in V mit

$$w = (\iota_n)_*(w_n) \star \dots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Existenz

Es sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$.

Es sei $\alpha = [w]$.

Wir haben wieder Wege $w_1, \dots, w_n$ in U oder in V mit

$$w = (\iota_n)_*(w_n) \star \dots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$\chi(\alpha) := v_n([w_n]) \star \dots \star v_1([w_1])$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Existenz

Es sei $\alpha \in \pi_1(X; x_1, x_2)$.

Es sei $\alpha = [w]$.

Wir haben wieder Wege $w_1, \dots, w_n$ in U oder in V mit

$$w = (\iota_n)_*(w_n) \star \dots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$\chi(\alpha) := v_n([w_n]) \star \dots \star v_1([w_1])$$

Wir müssen zeigen, dass dies *wohldefiniert* ist.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es sei

$$(\star) \quad w = (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es sei

$$(\star) \quad w = (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$(+)\quad \chi(\alpha) := v_{n-1}([w_n]) \star \cdots \star v_0([w_1])$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es sei

$$(\star) \quad w = (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$(+)\quad \chi(\alpha) := v_{n-1}([w_n]) \star \cdots \star v_0([w_1])$$

Die folgenden Operationen ändern die rechte Seite von (+) nicht.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es sei

$$(\star) \quad w = (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$(+)\quad \chi(\alpha) := v_{n-1}([w_n]) \star \cdots \star v_0([w_1])$$

Die folgenden Operationen ändern die rechte Seite von (+) nicht.

- ▶ Ersetzen von w_i durch einen homotopen Weg in U oder V .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es sei

$$(\star) \quad w = (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$(+)\quad \chi(\alpha) := v_{n-1}([w_n]) \star \cdots \star v_0([w_1])$$

Die folgenden Operationen ändern die rechte Seite von $(+)$ nicht.

- ▶ Ersetzen von w_i durch einen homotopen Weg in U oder V .
- ▶ Wenn w_i und w_{i+1} in U oder in V sind: Ersetzen von $\iota_{i+1}(w_{i+1}) \star \iota_i(w_i)$ durch $\iota_i(w_{i+1} \star w_i)$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es sei

$$(\star) \quad w = (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$(+)\quad \chi(\alpha) := v_{n-1}([w_n]) \star \cdots \star v_0([w_1])$$

Die folgenden Operationen ändern die rechte Seite von $(+)$ nicht.

- ▶ Ersetzen von w_i durch einen homotopen Weg in U oder V .
- ▶ Wenn w_i und w_{i+1} in U oder in V sind: Ersetzen von $\iota_{i+1}(w_{i+1}) \star \iota_i(w_i)$ durch $\iota_i(w_{i+1} \star w_i)$.
- ▶ Wenn w_i , ein Weg in U , ganz in $U \cap V$ liegt:

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es sei

$$(\star) \quad w = (\iota_n)_*(w_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(w_1) .$$

Wir wollen setzen:

$$(+)\quad \chi(\alpha) := v_{n-1}([w_n]) \star \cdots \star v_0([w_1])$$

Die folgenden Operationen ändern die rechte Seite von $(+)$ nicht.

- ▶ Ersetzen von w_i durch einen homotopen Weg in U oder V .
- ▶ Wenn w_i und w_{i+1} in U oder in V sind: Ersetzen von $\iota_{i+1}(w_{i+1}) \star \iota_i(w_i)$ durch $\iota_i(w_{i+1} \star w_i)$.
- ▶ Wenn w_i , ein Weg in U , ganz in $U \cap V$ liegt: Ersetzen von $\varphi([w_i])$ durch $\psi([w'_i])$ für den entsprechenden Weg in V .
- ▶ Anhängen von konstanten Wegen.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es seien v und w in X homotop zueinander und

$$v = (\iota_n)_*(v_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(v_1) ,$$

$$w = (\iota'_{n'})_*(w_{n'}) \star \cdots \star (\iota'_1)_*(w_1) .$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es seien v und w in X homotop zueinander und

$$v = (\iota_n)_*(v_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(v_1) ,$$

$$w = (\iota'_{n'})_*(w_{n'}) \star \cdots \star (\iota'_1)_*(w_1) .$$

Z.Z.:

$$v_n(v_n) \star \cdots \star v_1(v_1) \simeq v'_{n'}(w_{n'}) \star \cdots \star v'_1(w_1) .$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es seien v und w in X homotop zueinander und

$$v = (\iota_n)_*(v_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(v_1) ,$$

$$w = (\iota'_{n'})_*(w_{n'}) \star \cdots \star (\iota'_1)_*(w_1) .$$

Z.Z.:

$$v_n(v_n) \star \cdots \star v_1(v_1) \simeq v'_{n'}(w_{n'}) \star \cdots \star v'_1(w_1) .$$

Wir können $n = n'$ annehmen.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es seien v und w in X homotop zueinander und

$$v = (\iota_n)_*(v_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(v_1) ,$$

$$w = (\iota'_{n'})_*(w_{n'}) \star \cdots \star (\iota'_1)_*(w_1) .$$

z.z.:

$$v_n(v_n) \star \cdots \star v_1(v_1) \simeq v'_{n'}(w_{n'}) \star \cdots \star v'_1(w_1) .$$

Wir können $n = n'$ annehmen.

Sei nun H eine Homotopie von v nach w .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Es seien v und w in X homotop zueinander und

$$v = (\iota_n)_*(v_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(v_1) ,$$

$$w = (\iota'_{n'})_*(w_{n'}) \star \cdots \star (\iota'_1)_*(w_1) .$$

Z.Z.:

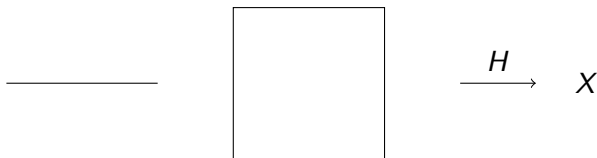
$$v_n(v_n) \star \cdots \star v_1(v_1) \simeq v'_{n'}(w_{n'}) \star \cdots \star v'_1(w_1) .$$

Wir können $n = n'$ annehmen.

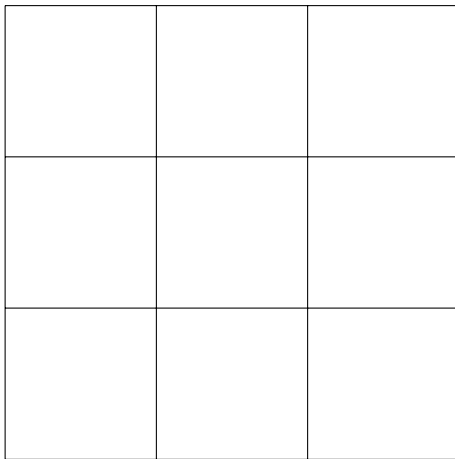
Sei nun H eine Homotopie von v nach w .

Wir können nun n so wählen, dass $\frac{1}{n}$ eine Lebesgue-Zahl für die Überdeckung $H^{-1}(U), H^{-1}(V)$ von $I \times I$ bezüglich der Maximum-Norm ist.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Was wir gezeigt haben:

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Was wir gezeigt haben:

Es seien v und w in X homotop zueinander und

$$v = (\iota_n)_*(v_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(v_1) ,$$

$$w = (\iota'_{n'})_*(w_{n'}) \star \cdots \star (\iota'_1)_*(w_1)$$

mit v_i und w_i in U oder in V und ι_i sowie ι'_i entsprechend.

Dann ist

$$v_n(v_n) \star \cdots \star v_1(v_1) \simeq v'_{n'}(w_{n'}) \star \cdots \star v'_1(w_1)$$

in X .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Was wir gezeigt haben:

Es seien v und w in X homotop zueinander und

$$v = (\iota_n)_*(v_n) \star \cdots \star (\iota_1)_*(v_1) ,$$

$$w = (\iota'_{n'})_*(w_{n'}) \star \cdots \star (\iota'_1)_*(w_1)$$

mit v_i und w_i in U oder in V und ι_i sowie ι'_i entsprechend.

Dann ist

$$v_n(v_n) \star \cdots \star v_1(v_1) \simeq v'_{n'}(w_{n'}) \star \cdots \star v'_1(w_1)$$

in X .

(Mittels $n = n'$ und n groß genug für eine Homotopie.)

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X . Dann sei $\Pi(X, A)$ das volle Untergruppoid von $\Pi(X)$, das man erhält, wenn man Objektmenge auf A einschränkt.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X . Dann sei $\Pi(X, A)$ das volle Untergruppoid von $\Pi(X)$, das man erhält, wenn man Objektmenge auf A einschränkt.

Wir erhalten einen Funktor von der Kategorie solcher Tupel (X, A) in die Kategorie der Gruppoide; wir nennen ihn den **eingeschränkten Fundamentalgruppoidfunktor**.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz von Brown (1967) Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Sei A eine Teilmenge von $U \cap V$, die alle Wegzusammenhangskomponenten von $U \cap V$ trifft.

Dann transformiert der eingeschränkte Fundamentalgruppoidfunktorkomplex das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (U \cap V, A) & \longrightarrow & (V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U, A) & \hookrightarrow & (X, A) \end{array}$$

in ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz von Seifert und van Kampen (1933) Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Sei $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$.

Dann transformiert der Fundamentalgruppenfunktorkomplex das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (U \cap V, x_0) & \longrightarrow & (V, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U, x_0) & \hookrightarrow & (X, x_0) \end{array}$$

von punktierten Räumen in ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(V, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

von Gruppen.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz von Brown. Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Sei A eine Teilmenge von $U \cap V$, die alle Wegzusammenhangskomponenten von $U \cap V$ trifft.

Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) \end{array}$$

kommutativ.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Beweis.

z.z. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Beweis.

z.z. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Man kann dies auf den Komponenten von $\Pi(X)$ nachweisen. Diese entsprechen den Wegzusammenhangskomponenten von X . Deshalb können wir annehmen: X ist wegzusammenhängend.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Beweis.

z.z. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Wenn $A = \emptyset$ ist, ist die Aussage trivial.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Beweis.

z.z. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Sei $A \neq \emptyset$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Beweis.

z.z. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Sei $A \neq \emptyset$.

Sei $x \in U$. Es gibt einen Weg in U zu einem Punkt aus A .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Beweis.

z.z. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Sei $A \neq \emptyset$.

Sei $x \in U$. Es gibt einen Weg in U zu einem Punkt aus A .

Wähle einen solchen Weg. Wenn der Weg nicht ganz in U liegt, geht er durch $U \cap V$. Wir verkürzen den Weg so, dass er in U liegt und in $U \cap V$ endet. Von dort gehen wir in $U \cap V$ zu einem Punkt aus A .

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Die Inklusionen $\Pi(U \cap V, A) \hookrightarrow \Pi(U \cap V)$,
 $\Pi(U, A) \hookrightarrow \Pi(U)$, $\Pi(V, A) \hookrightarrow \Pi(V)$, $\Pi(X, A) \hookrightarrow \Pi(X)$ sind
essentiell surjektiv, also Äquivalenzen von Kategorien.

Sie haben Retraktionen.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Die Inklusionen $\Pi(U \cap V, A) \hookrightarrow \Pi(U \cap V)$,
 $\Pi(U, A) \hookrightarrow \Pi(U)$, $\Pi(V, A) \hookrightarrow \Pi(V)$, $\Pi(X, A) \hookrightarrow \Pi(X)$ sind
essentiell surjektiv, also Äquivalenzen von Kategorien.

Sie haben Retraktionen.

Dies machen wir allgemeiner ...

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, $\mathcal{U}$ ein volles Untergruppoid hiervon, welche jede Komponente von $\mathcal{G}$ trifft. Sei $\mathcal{I} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}$ die Inklusion.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, $\mathcal{U}$ ein volles Untergruppoid hiervon, welche jede Komponente von $\mathcal{G}$ trifft. Sei $\mathcal{I} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}$ die Inklusion.

Dann erhalten wir wie folgt eine Retraktion $\mathcal{R}$ von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{U}$, d.h.:

$$\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U} \text{ mit } \mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}.$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, $\mathcal{U}$ ein volles Untergruppoid hiervon, welche jede Komponente von $\mathcal{G}$ trifft. Sei $\mathcal{I} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}$ die Inklusion.

Dann erhalten wir wie folgt eine Retraktion $\mathcal{R}$ von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{U}$, d.h.:

$$\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U} \text{ mit } \mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}.$$

Wähle zu jedem $x \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ein Element aus $a \in A$ und ein $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x, a)$. Falls $x \in \mathcal{U}$, wähle $(a, \alpha) = (x, \text{id}_x)$. Setze $\mathcal{R}(x) := a$ und $\Phi_x := \alpha$.

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, $\mathcal{U}$ ein volles Untergruppoid hiervon, welche jede Komponente von $\mathcal{G}$ trifft. Sei $\mathcal{I} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}$ die Inklusion.

Dann erhalten wir wie folgt eine Retraktion $\mathcal{R}$ von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{U}$, d.h.:
 $\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ mit $\mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}$.

Wähle zu jedem $x \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ein Element aus $a \in A$ und ein $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x, a)$. Falls $x \in \mathcal{U}$, wähle $(a, \alpha) = (x, \text{id}_x)$. Setze $\mathcal{R}(x) := a$ und $\Phi_x := \alpha$.

Definiere nun für $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x_1, x_2)$ den Morphismus $\mathcal{R}(\alpha)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \xrightarrow{\Phi_{x_1}} & \mathcal{R}(x_1) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \mathcal{R}(\alpha) \\ x_2 & \xrightarrow{\Phi_{x_2}} & \mathcal{R}(x_2) \end{array}$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, $\mathcal{U}$ ein volles Untergruppoid hiervon, welche jede Komponente von $\mathcal{G}$ trifft. Sei $\mathcal{I} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}$ die Inklusion.

Dann erhalten wir wie folgt eine Retraktion $\mathcal{R}$ von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{U}$, d.h.:
 $\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ mit $\mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}$.

Wähle zu jedem $x \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ein Element aus $a \in A$ und ein $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x, a)$. Falls $x \in \mathcal{U}$, wähle $(a, \alpha) = (x, \text{id}_x)$. Setze $\mathcal{R}(x) := a$ und $\Phi_x := \alpha$.

Definiere nun für $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x_1, x_2)$ den Morphismus $\mathcal{R}(\alpha)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \xrightarrow{\Phi_{x_1}} & \mathcal{R}(x_1) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \mathcal{R}(\alpha) \\ x_2 & \xrightarrow{\Phi_{x_2}} & \mathcal{R}(x_2) \end{array}$$

Wir haben $\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ mit $\mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, $\mathcal{U}$ ein volles Untergruppoid hiervon, welche jede Komponente von $\mathcal{G}$ trifft. Sei $\mathcal{I} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}$ die Inklusion.

Dann erhalten wir wie folgt eine Retraktion $\mathcal{R}$ von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{U}$, d.h.:
 $\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ mit $\mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}$.

Wähle zu jedem $x \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ein Element aus $a \in A$ und ein $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x, a)$. Falls $x \in \mathcal{U}$, wähle $(a, \alpha) = (x, \text{id}_x)$. Setze $\mathcal{R}(x) := a$ und $\Phi_x := \alpha$.

Definiere nun für $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x_1, x_2)$ den Morphismus $\mathcal{R}(\alpha)$ mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \xrightarrow{\Phi_{x_1}} & \mathcal{R}(x_1) = \mathcal{I}(\mathcal{R}(x_1)) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \mathcal{R}(\alpha) \\ x_2 & \xrightarrow{\Phi_{x_2}} & \mathcal{R}(x_2) = \mathcal{I}(\mathcal{R}(x_2)) . \end{array}$$

Wir haben $\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ mit $\mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Sei $\mathcal{G}$ ein Gruppoid, $\mathcal{U}$ ein volles Untergruppoid hiervon, welche jede Komponente von $\mathcal{G}$ trifft. Sei $\mathcal{I} : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}$ die Inklusion.

Dann erhalten wir wie folgt eine Retraktion $\mathcal{R}$ von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{U}$, d.h.:

$$\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U} \text{ mit } \mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}.$$

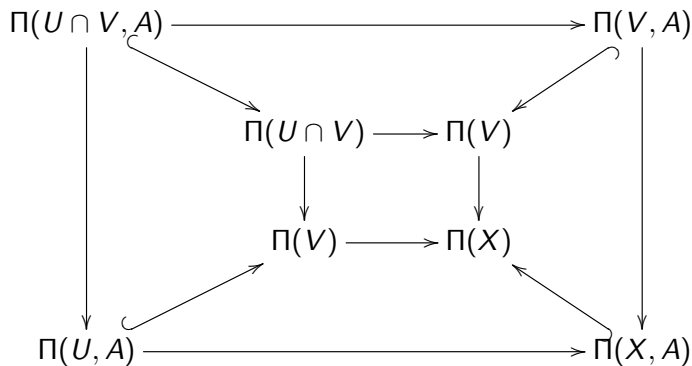
Wähle zu jedem $x \in \text{ob}(\mathcal{G})$ ein Element aus $a \in A$ und ein $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x, a)$. Falls $x \in \mathcal{U}$, wähle $(a, \alpha) = (x, \text{id}_x)$. Setze $\mathcal{R}(x) := a$ und $\Phi_x := \alpha$.

Definiere nun für $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(x_1, x_2)$ den Morphismus $\mathcal{R}(\alpha)$ mittels des kommutativen Diagramms

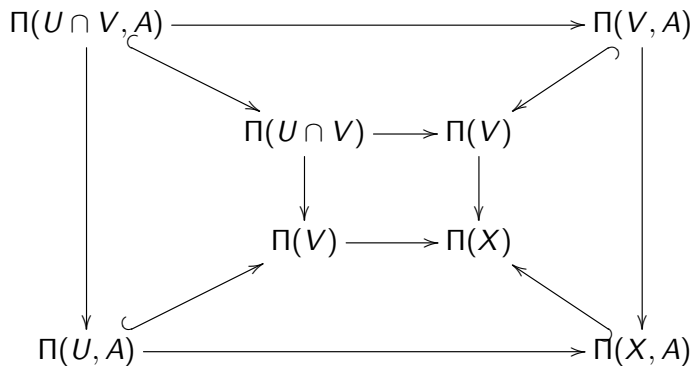
$$\begin{array}{ccc} x_1 & \xrightarrow{\Phi_{x_1}} & \mathcal{R}(x_1) = \mathcal{I}(\mathcal{R}(x_1)) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \mathcal{R}(\alpha) \\ x_2 & \xrightarrow{\Phi_{x_2}} & \mathcal{R}(x_2) = \mathcal{I}(\mathcal{R}(x_2)) . \end{array}$$

Wir haben $\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ mit $\mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \text{id}_{\mathcal{U}}$ und $\phi : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow \mathcal{I} \circ \mathcal{R}$.

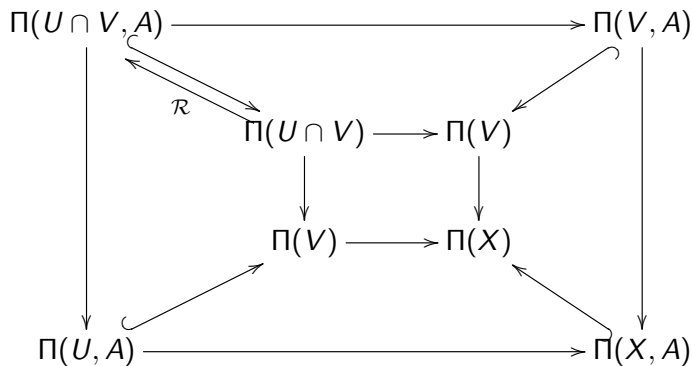
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



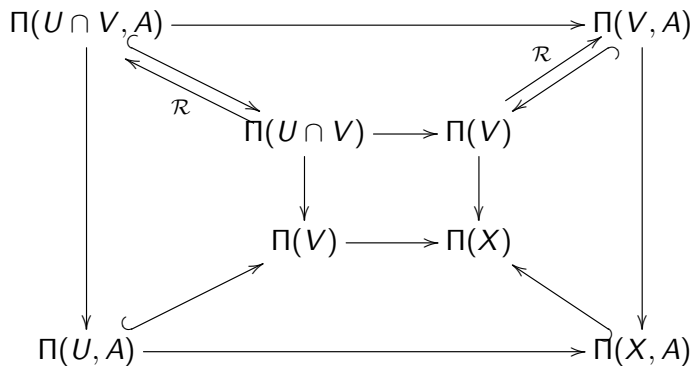
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



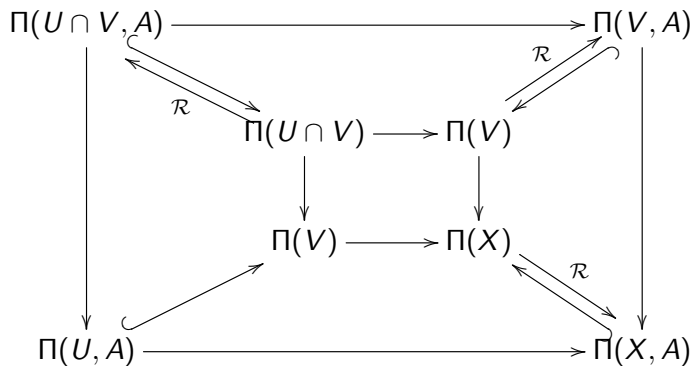
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



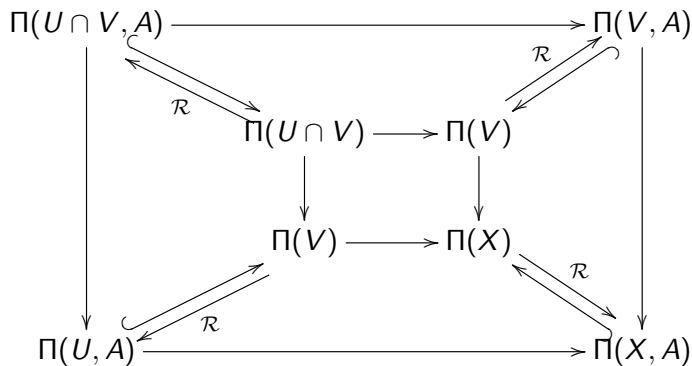
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



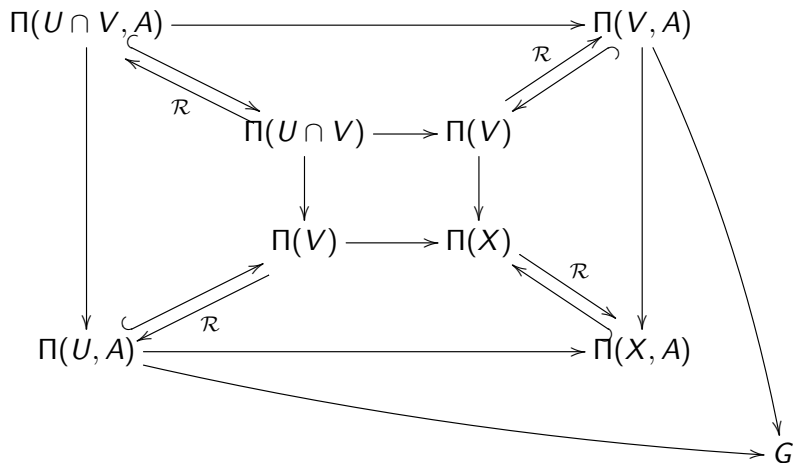
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



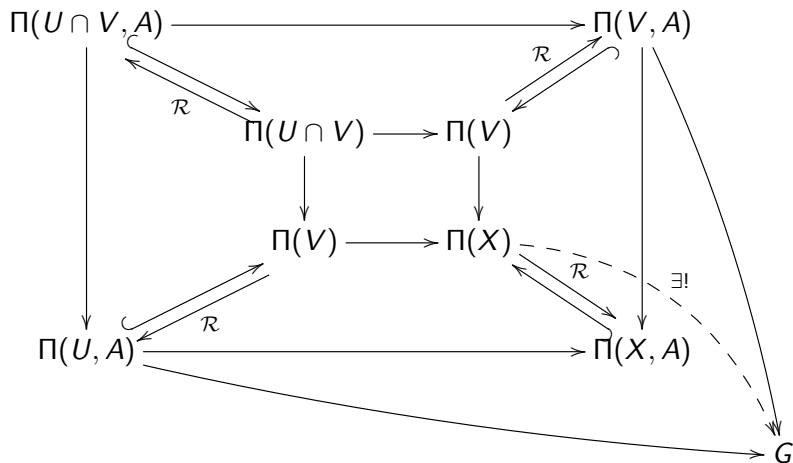
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



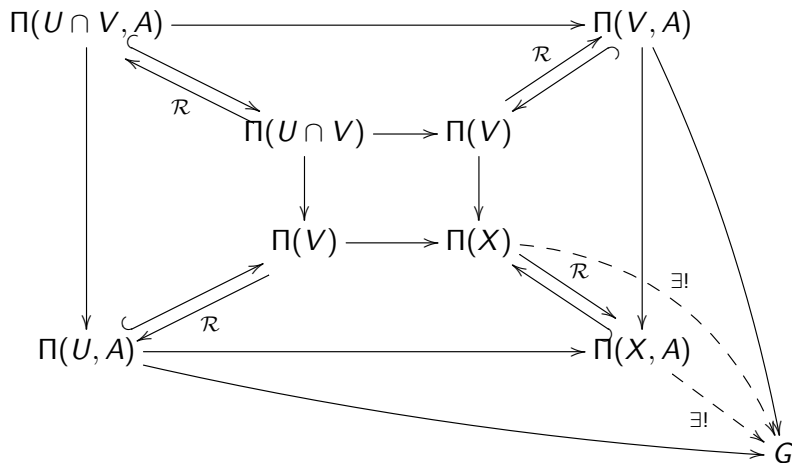
Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen



Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz von Brown. Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Sei A eine Teilmenge von $U \cap V$, die alle Wegzusammenhangskomponenten von $U \cap V$ trifft.

Dann transformiert der eingeschränkte
Fundamentalgruppoidfunktork das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (U \cap V, A) & \longrightarrow & (V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U, A) & \hookrightarrow & (X, A) \end{array}$$

in ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \longrightarrow & \Pi(V, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U, A) & \longrightarrow & \Pi(X, A) . \end{array}$$

Fundamentalgruppoid und endliche Überdeckungen

Satz von Seifert und van Kampen. Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Sei $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$.

Dann transformiert der Fundamentalgruppenfunktorkomplex das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (U \cap V, x_0) & \longrightarrow & (V, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U, x_0) & \hookrightarrow & (X, x_0) \end{array}$$

von punktierten Räumen in ein kokartesches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(V, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

von Gruppen.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Satz von Seifert und van Kampen. Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Sei $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$.

Dann haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) \star_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) .$$

Berechnung von Fundamentalgruppen

Satz von Seifert und van Kampen. Sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Sei $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$.

Dann haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) \star_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) .$$

Mit kombinatorischer Gruppentheorie:

Wenn wir eine kombinatorische Beschreibung von $\pi_1(U \cap V, x_0)$, $\pi_1(U, x_0)$, $\pi_1(V, x_0)$ haben und auch die Gruppenhomomorphismen $\pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0)$, $\pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(V, x_0)$ kombinatorisch beschrieben sind, erhalten wir eine kombinatorische Beschreibung von $\pi_1(X, x_0)$.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Definition. Ein wegzusammenhängender Raum X heißt **einfach-zusammenhängend**, wenn jede freie Schleife nullhomotop ist.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Definition. Ein wegzusammenhängender Raum X heißt **einfach-zusammenhängend**, wenn jede freie Schleife nullhomotop ist.

Für $x_0 \in X$ beliebig ist dies äquivalent zu: $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Definition. Ein wegzusammenhängender Raum X heißt **einfach-zusammenhängend**, wenn jede freie Schleife nullhomotop ist.

Für $x_0 \in X$ beliebig ist dies äquivalent zu: $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Satz. Für $n \geq 2$ ist S^n einfach-zusammenhängend.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Definition. Für eine Familie $((X_i, x_i))_{i \in I}$ punktierter topologischer Räume sei die **verbundene Summe** oder das **Wedge-Produkt**, auch **Wedge-Summe** $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ definiert als der punktierte Raum

$$((\bigsqcup_{i \in I} X_i) / \{(i, x_i) \mid i \in I\}, x_0)$$

mit $x_0 =$ zusammengezogener Unterraum.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Definition. Für eine Familie $((X_i, x_i))_{i \in I}$ punktierter topologischer Räume sei die **verbundene Summe** oder das **Wedge-Produkt**, auch **Wedge-Summe** $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ definiert als der punktierte Raum

$$((\bigsqcup_{i \in I} X_i) / \{(i, x_i) \mid i \in I\}, x_0)$$

mit $x_0 =$ zusammengezogener Unterraum.

Dies ist (mit den offensichtlichen Morphismen) ein Koproduct von $(X_i, x_i)_{i \in I}$.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Definition. Für eine Familie $((X_i, x_i))_{i \in I}$ punktierter topologischer Räume sei die **verbundene Summe** oder das **Wedge-Produkt**, auch **Wedge-Summe** $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ definiert als der punktierte Raum

$$((\bigsqcup_{i \in I} X_i) / \{(i, x_i) \mid i \in I\}, x_0)$$

mit $x_0 =$ zusammengezogener Unterraum.

Dies ist (mit den offensichtlichen Morphismen) ein Koproduct von $(X_i, x_i)_{i \in I}$.

Satz. Es ist $\pi_1(\bigvee^n(S^1, x_0)) \simeq \star^n \mathbf{Z} = F(\{1, \dots, n\}) =: F^n$.

Berechnung von Fundamentalgruppen

Satz. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume, wobei $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ jeweils zusammenziehbare Umgebungen haben. Dann ist

$$\pi_1((X, x_0) \vee (Y, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \star \pi_1(Y, y_0) .$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

(auch: $X \cup_f e^n$)

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

(auch: $X \cup_f e^n$)

Wir haben das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

(auch: $X \cup_f e^n$)

Wir haben das kokartesische Diagramm für $p_0 \in S^1$

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) \end{array}$$

Idee. Hierauf wenden wir π_1 an.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

(auch: $X \cup_f e^n$)

Wir haben das kokartesische Diagramm für $p_0 \in S^1$

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) \end{array}$$

Idee. Hierauf wenden wir π_1 an.

Aber: f muss nicht injektiv sein und X ist abgeschlossen in Y .

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Trotzdem mal versuchen:

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Trotzdem mal versuchen:

Wir haben das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Trotzdem mal versuchen:

Wir haben das ~~kokartesische Diagramm~~ kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Trotzdem mal versuchen:

Wir haben das ~~kokartesische Diagramm~~ kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) . \end{array}$$

und damit:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, p_0) & \longrightarrow & \pi_1(D^n, p_0) \\ f_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Trotzdem mal versuchen:

Wir haben das ~~kokartesische Diagramm~~ kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) . \end{array}$$

und damit:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, p_0) & \longrightarrow & \pi_1(D^n, p_0) = 0 \\ f_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\mathbf{n} \geq 3$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$n \geq 3$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, p_0) = 0 & \hookrightarrow & \pi_1(D^n, p_0) = 0 \\ f_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) \end{array}$$

erstmal keine Aussage ...

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\mathbf{n} = 2$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

n = 2

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & \pi_1(D^2, p_0) \\ \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow \\ [f] & & \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

n = 2

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & \pi_1(D^2, p_0) \\ \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow \\ [f] & & \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Damit: Wir haben einen induzierten Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(X, f(p_0)) / \langle [f]^{\pi_1(X, f(p_0))} \rangle \longrightarrow \pi_1(Y, f(p_0)) .$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

n = 2

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & \pi_1(D^2, p_0) \\ \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow \\ [f] & & \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Damit: Wir haben einen induzierten Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(X, f(p_0)) / \langle [f] \pi_1(X, f(p_0)) \rangle \longrightarrow \pi_1(Y, f(p_0)) .$$

Klar! $\iota_{S^1 \hookrightarrow D^2}$ in (D^2, p_0) ist zusammenziehbar, also auch f in $(Y, f(p_0))$.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y :

- ▶ $V := e^n = \mathbb{B}^n \subsetneq D^n$
- ▶ $U := \text{Komplement des Zentrums der Zelle} = X \cup_f (D^n \setminus \{0\}).$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y :

- ▶ $V := e^n = \mathbb{B}^n \subsetneq D^n$
- ▶ $U := \text{Komplement des Zentrums der Zelle} = X \cup_f (D^n \setminus \{0\}).$

$$D^n \setminus \{0\} \cong (0; 1] \times S^{n-1}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y :

- ▶ $V := e^n = \mathbb{B}^n \subsetneq D^n$
- ▶ $U := \text{Komplement des Zentrums der Zelle} = X \cup_f (D^n \setminus \{0\}).$

$D^n \setminus \{0\} \cong (0; 1] \times S^{n-1}$, U ist homotopieäquivalent zu X .

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y :

- ▶ $V := e^n = \mathbb{B}^n \subsetneq D^n$
- ▶ $U := \text{Komplement des Zentrums der Zelle} = X \cup_f (D^n \setminus \{0\}).$

$D^n \setminus \{0\} \cong (0; 1] \times S^{n-1}$, U ist homotopieäquivalent zu X .

$$D^n \cong CS^{n-1}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y :

- ▶ $V := e^n = \mathbb{B}^n \subsetneq D^n$
- ▶ $U := \text{Komplement des Zentrums der Zelle} = X \cup_f (D^n \setminus \{0\}).$

$D^n \setminus \{0\} \cong (0; 1] \times S^{n-1}$, U ist homotopieäquivalent zu X .

$$D^n \cong CS^{n-1} := (I \times S^{n-1}) / (\{0\} \times S^{n-1})$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y :

- ▶ $V := e^n = \mathbb{B}^n \subsetneq D^n$
- ▶ $U := \text{Komplement des Zentrums der Zelle} = X \cup_f (D^n \setminus \{0\}).$

$D^n \setminus \{0\} \cong (0; 1] \times S^{n-1}$, U ist homotopieäquivalent zu X .

$$D^n \cong CS^{n-1} := (I \times S^{n-1}) / (\{0\} \times S^{n-1})$$

$$Y \cong (X \sqcup CS^{n-1}) / ((1, a) \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & D \cup_f D^n = Y. \end{array}$$

Offene Überdeckung von Y :

- ▶ $V := e^n = \mathbb{B}^n \subsetneq D^n$
- ▶ $U := \text{Komplement des Zentrums der Zelle} = X \cup_f (D^n \setminus \{0\}).$

$D^n \setminus \{0\} \cong (0; 1] \times S^{n-1}$, U ist homotopieäquivalent zu X .

$$D^n \cong CS^{n-1} := (I \times S^{n-1}) / (\{0\} \times S^{n-1})$$

$$Y \cong (X \sqcup CS^{n-1}) / ((1, a) \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1}) =: C_f,$$

der **Abbildungskegel** zu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Das Diagramm von offenen Einbettungen

$$\begin{array}{ccc} e^n \setminus \{0\} & \hookrightarrow & e^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \cup_f (D^n \setminus \{0\}) & \hookrightarrow & X \cup_f D^n = Y \end{array}$$

ist kokartesisch.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Das Diagramm von offenen Einbettungen

$$\begin{array}{ccc} e^n \setminus \{0\} & \hookrightarrow & e^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \cup_f (D^n \setminus \{0\}) & \hookrightarrow & X \cup_f D^n = Y . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Somit auch mit $p_0 \in S^{n-1}$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(e^n \setminus \{0\}, \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(e^n, \tfrac{1}{2}p_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \tfrac{1}{2}p_0) . \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Für $p_0 \in S^{n-1}$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(e^n \setminus \{0\}, \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(e^n, \tfrac{1}{2}p_0) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \tfrac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Für $p_0 \in S^{n-1}$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(e^n \setminus \{0\}, \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(e^n, \frac{1}{2}p_0) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$e^n \setminus \{0\} \cong (0, 1) \times S^{n-1}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Für $p_0 \in S^{n-1}$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(e^n \setminus \{0\}, \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(e^n, \frac{1}{2}p_0) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$e^n \setminus \{0\} \cong (0, 1) \times S^{n-1}$$

$$n \geq 3$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Für $p_0 \in S^{n-1}$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(e^n \setminus \{0\}, \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(e^n, \frac{1}{2}p_0) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$e^n \setminus \{0\} \cong (0, 1) \times S^{n-1}$$

$n \geq 3$

Die Inklusion $(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) \hookrightarrow (Y, \frac{1}{2}p_0)$ induziert einen Isomorphismus

$$\pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0).$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$n \geq 3$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), f(p_0)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, f(p_0)) \\ \uparrow \sim & & \\ \pi_1(X, f(p_0)) & & \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$n \geq 3$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), f(p_0)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, f(p_0)) \\ \uparrow \sim & & \\ \pi_1(X, f(p_0)) & & \end{array}$$

Satz. Wenn man für $n \geq 3$ eine n -Zelle an einen Raum anheftet, ändert sich die Fundamentalgruppe nicht.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$n \geq 3$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \pi_1(X \cup_f (D^n \setminus \{0\}), f(p_0)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, f(p_0)) \\ \uparrow \sim & & \\ \pi_1(X, f(p_0)) & & \end{array}$$

Satz. Wenn man für $n \geq 3$ eine n -Zelle punktiert an einen punktierten Raum anheftet, ändert sich die Fundamentalgruppe nicht.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\mathbf{n} = 2$$

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\iota] & & \pi_1(e^2 \setminus \{0\}, \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(e^2, \tfrac{1}{2}p_0) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\tfrac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \tfrac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$\mathbf{n} = 2$$

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\iota] & & \pi_1(e^2 \setminus \{0\}, \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\tfrac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \tfrac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \tfrac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$n = 2$$

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\frac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

n = 2

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\frac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$\pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) / \langle [\frac{1}{2}\iota]^{\pi_1(\dots)} \rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0)$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

n = 2

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\frac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$\begin{array}{ccc} [\frac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ [f] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), f(p_0)) \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$n = 2$$

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\frac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$\pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) / \langle [\frac{1}{2}\iota]^{\pi_1(\dots)} \rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0)$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

$$n = 2$$

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\frac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) / \langle [\frac{1}{2}\iota]^{\pi_1(\dots)} \rangle & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), f(p_0)) / \langle [f]^{\pi_1(\dots)} \rangle & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, f(p_0)) \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

n = 2

Für $p_0 \in S^1$ und $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 [\text{id}] & & \pi_1(S^1, p_0) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 [\frac{1}{2}\iota] & & \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0)
 \end{array}$$

ist kokartesisch.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), \frac{1}{2}p_0) / \langle [\frac{1}{2}\iota]^{\pi_1(\dots)} \rangle & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, \frac{1}{2}p_0) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 \pi_1(X \cup_f (D^2 \setminus \{0\}), f(p_0)) / \langle [f]^{\pi_1(\dots)} \rangle & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y, f(p_0)) \\
 \uparrow \sim & & \\
 \pi_1(X, f(p_0)) & &
 \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Satz. Wenn man an einen Raum X mittels einer stetigen Abbildung $f : S^1 \longrightarrow X$ eine 2-Zelle anheftet, ist für den resultierenden Raum Y und $p_0 \in S^1$:

$$\pi_1(Y, f(p_0)) \simeq \pi_1(X, f(p_0)) / \langle [f]^{\pi_1(X, f(p_0))} \rangle$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Nochmal von vorne

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Nochmal von vorne

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Nochmal von vorne

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Nochmal von vorne

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

Wir haben für $p_0 \in S^1$ das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Nochmal von vorne

Wir betrachten das *Anheften von Zellen über den Rand*.

Es sei dazu $f : S^{n-1} \longrightarrow X$. Wir erhalten:

$$Y = X \cup_f D^n = (D^n \sqcup X) / (a \sim f(a) \text{ für } a \in S^{n-1})$$

Wir haben für $p_0 \in S^1$ das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (S^{n-1}, p_0) & \hookrightarrow & (D^n, p_0) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ (X, f(p_0)) & \longrightarrow & (X \cup_f D^n, f(p_0)) = (Y, f(p_0)) . \end{array}$$

Idee. Hierauf wenden wir π_1 an.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Nicht nur Intuitiv plausibel, sondern in der Tat auch richtig:

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, p_0) & \longrightarrow & \pi_1(D^n, p_0) = 0 \\ f_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Nicht nur Intuitiv plausibel, sondern in der Tat auch richtig:

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, p_0) & \longrightarrow & \pi_1(D^n, p_0) = 0 \\ f_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, f(p_0)) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(p_0)) . \end{array}$$

ist kokartesisch.

- ▶ $n \geq 3$: $\pi_1(S^{n-1}, p_0) = 0 \longrightarrow$ Isomorphismus
- ▶ $n = 2$: $\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbf{Z} \longrightarrow$ “[f] rausteilen”

Berechnung von Fundamentalgr. – Anheften von Zellen

Satz. Wenn man an einen Raum X mittels einer stetigen Abbildung $f : S^1 \longrightarrow X$ eine 2-Zelle anheftet, ist für den resultierenden Raum Y und $p_0 \in S^1$:

$$\pi_1(Y, f(p_0)) \simeq \pi_1(X, f(p_0)) / \langle [f]^{\pi_1(X, f(p_0))} \rangle$$

Satz. Wenn man für $n \geq 3$ eine n -Zelle an einen punktierten Raum punktiert anheftet, ändert sich die Fundamentalgruppe nicht.