Algebraische Topologie

Vorlesung im Wintersemester 2020/21

gehalten von Claus Diem

§3 Der Fundamentalgruppe von S^1

Hochhebungen

Es sei $p : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$, $x \longmapsto e^{2\pi i x}$.

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Hochhebungen

Es sei $p : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$, $x \longmapsto e^{2\pi i x}$.

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$

Hochhebungen

Es sei $p : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$, $x \longmapsto e^{2\pi i x}$.

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

b) Sei $H : I \times I \longrightarrow S^1$ mit $H(0,0) = x_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$, $p_*(\tilde{H}) = H$, wieder genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von H mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Hochhebungen

Es sei $p : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$, $x \longmapsto e^{2\pi i x}$.

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

b) Sei $H : I \times I \longrightarrow S^1$ mit $H(0,0) = x_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$, $p_*(\tilde{H}) = H$, wieder genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von H mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Korollar. Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Seien v und w Wege in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann sind v und w genau dann homotop zueinander, wenn $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ ist.

Korollar. Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Seien v und w Wege in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann sind v und w genau dann homotop zueinander, wenn $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ ist.

Die Fundamentalgruppe von S^1

Korollar. Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Seien v und w Wege in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann sind v und w genau dann homotop zueinander, wenn $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ ist.

Beweis. Es seien v und w homotop zueinander mittels der Homotopie H. Wir liften H zu $\tilde{H}$. Dann ist $\tilde{H}(0, \_)$ eine (die) Liftung von $H(0, \_) = v$, somit $\tilde{H}(0, \_) = \tilde{v}$. Ebenso $\tilde{H}(1, \_) = w$.

Die Fundamentalgruppe von S^1

Korollar. Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Seien v und w Wege in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann sind v und w genau dann homotop zueinander, wenn $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ ist.

Beweis. Es seien v und w homotop zueinander mittels der Homotopie H. Wir liften H zu $\tilde{H}$. Dann ist $\tilde{H}(0, \_)$ eine (die) Liftung von $H(0, \_) = v$, somit $\tilde{H}(0, \_) = \tilde{v}$. Ebenso $\tilde{H}(1, \_) = w$.

Außerdem sind $i \mapsto \tilde{H}(i, 0)$ und $i \mapsto \tilde{H}(i, 1)$ konstant.

Zur ersten Abbildung: Die Abbildung ist stetig und das Bild liegt in der diskreten Menge $p^{-1}(x_0) = \tilde{x}_0 + \mathbf{Z}$.

Die Fundamentalgruppe von S^1

Korollar. Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Seien v und w Wege in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann sind v und w genau dann homotop zueinander, wenn $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ ist.

Beweis. Es seien v und w homotop zueinander mittels der Homotopie H. Wir liften H zu $\tilde{H}$. Dann ist $\tilde{H}(0, \_)$ eine (die) Liftung von $H(0, \_) = v$, somit $\tilde{H}(0, \_) = \tilde{v}$. Ebenso $\tilde{H}(1, \_) = w$.

Außerdem sind $i \mapsto \tilde{H}(i, 0)$ und $i \mapsto \tilde{H}(i, 1)$ konstant.

Zur ersten Abbildung: Die Abbildung ist stetig und das Bild liegt in der diskreten Menge $p^{-1}(x_0) = \tilde{x}_0 + \mathbf{Z}$.

Somit sind $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ homotop zueinander, insbesondere ist $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$.

Die Fundamentalgruppe von S^1

Korollar. Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Seien v und w Wege in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann sind v und w genau dann homotop zueinander, wenn $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ ist.

Beweis. Es seien v und w homotop zueinander mittels der Homotopie H. Wir liften H zu $\tilde{H}$. Dann ist $\tilde{H}(0, \_)$ eine (die) Liftung von $H(0, \_) = v$, somit $\tilde{H}(0, \_) = \tilde{v}$. Ebenso $\tilde{H}(1, \_) = w$.

Außerdem sind $i \mapsto \tilde{H}(i, 0)$ und $i \mapsto \tilde{H}(i, 1)$ konstant.

Zur ersten Abbildung: Die Abbildung ist stetig und das Bild liegt in der diskreten Menge $p^{-1}(x_0) = \tilde{x}_0 + \mathbf{Z}$.

Somit sind $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ homotop zueinander, insbesondere ist $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$.

Es sei $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$. Diese Wege in $\mathbf{R}$ sind homotop zueinander; sei $\tilde{H}$ eine Homotopie. Dann ist $p \circ H$ eine Homtopie von v nach w. □

Die Fundamentalgruppe von S^1

Bemerkung und Definition.

Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0, $\tilde{w}$ die Liftung mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Bemerkung und Definition.

Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0, $\tilde{w}$ die Liftung mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei $\tilde{\tilde{x}}_0$ ein weiterer Punkt in $\mathbf{R}$ mit $p(\tilde{\tilde{x}}_0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w} + (\tilde{\tilde{x}}_0 - \tilde{x}_0)$ die Liftung von w bezüglich $\tilde{\tilde{x}}_0$.

Bemerkung und Definition.

Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0, $\tilde{w}$ die Liftung mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei $\tilde{\tilde{x}}_0$ ein weiterer Punkt in $\mathbf{R}$ mit $p(\tilde{\tilde{x}}_0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w} + (\tilde{\tilde{x}}_0 - \tilde{x}_0)$ die Liftung von w bezüglich $\tilde{\tilde{x}}_0$.

Somit ist $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0)$ von der Wahl $\tilde{x}_0$ unabhängig.

Bemerkung und Definition.

Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0, $\tilde{w}$ die Liftung mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei $\tilde{\tilde{x}}_0$ ein weiterer Punkt in $\mathbf{R}$ mit $p(\tilde{\tilde{x}}_0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w} + (\tilde{\tilde{x}}_0 - \tilde{x}_0)$ die Liftung von w bezüglich $\tilde{\tilde{x}}_0$.

Somit ist $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0)$ von der Wahl $\tilde{x}_0$ unabhängig.

Für einen geschlossenen Weg w ist $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) \in \mathbf{Z}$.

Bemerkung und Definition.

Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0, $\tilde{w}$ die Liftung mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei $\tilde{\tilde{x}}_0$ ein weiterer Punkt in $\mathbf{R}$ mit $p(\tilde{\tilde{x}}_0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w} + (\tilde{\tilde{x}}_0 - \tilde{x}_0)$ die Liftung von w bezüglich $\tilde{\tilde{x}}_0$.

Somit ist $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0)$ von der Wahl $\tilde{x}_0$ unabhängig.

Für einen geschlossenen Weg w ist $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) \in \mathbf{Z}$.

Wir definieren dies als den **Grad** von w, $\deg(w)$.

Wegen b) ist der Grad invariant unter Homotopie.

Bemerkung und Definition.

Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0, $\tilde{w}$ die Liftung mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei $\tilde{\tilde{x}}_0$ ein weiterer Punkt in $\mathbf{R}$ mit $p(\tilde{\tilde{x}}_0) = x_0$. Dann ist $\tilde{w} + (\tilde{\tilde{x}}_0 - \tilde{x}_0)$ die Liftung von w bezüglich $\tilde{\tilde{x}}_0$.

Somit ist $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0)$ von der Wahl $\tilde{x}_0$ unabhängig.

Für einen geschlossenen Weg w ist $\tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) \in \mathbf{Z}$.

Wir definieren dies als den **Grad** von w, $\deg(w)$.

Wegen b) ist der Grad invariant unter Homotopie.

Wir erhalten eine Abbildung

$$\deg : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbf{Z} .$$

Die Fundamentalgruppe von S^1

Satz. Die Abbildung $\deg : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Die Fundamentalgruppe von S^1

Satz. Die Abbildung $\deg : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Zum Beweis.

Die Fundamentalgruppe von S^1

Satz. Die Abbildung $\deg : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Zum Beweis.

Gruppenhomomorphismus

Die Fundamentalgruppe von S^1

Satz. Die Abbildung $\deg : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Zum Beweis.

Gruppenhomomorphismus

surjektiv

Satz. Die Abbildung $\deg : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Zum Beweis.

Gruppenhomomorphismus

surjektiv

injektiv

$\square$

Die Fundamentalgruppe von S^1

Satz. Die Abbildung $\deg : \pi_1(S^1, x_0) \longrightarrow \mathbf{Z}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Zum Beweis.

Gruppenhomomorphismus

surjektiv

injektiv

$\square$

Korollar. Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Seien v und w Wege in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann sind v und w genau dann homotop zueinander, wenn $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$ ist.

Freie Schleifen

Definition.

- Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung von S^1 von X heißt **(freie) Schleife**.
- Für einen Punktierter Raum (X, x_0) heißt ein Morphismus von $(S^1, 1)$ nach (X, x_0) **(punktierte) Schleife**.

Freie Schleifen

Definition.

- Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung von S^1 von X heißt **(freie) Schleife**.
- Für einen Punktierter Raum (X, x_0) heißt ein Morphismus von $(S^1, 1)$ nach (X, x_0) **(punktierte) Schleife**.

Wir betrachten freie Schleifen in S^1 und dann freie Schleifen modulo beliebiger ("freier") Homotopie, also die Menge $[S^1; S^1]$.

Freie Schleifen

Für jede freie Schleife w haben wir $\deg(w)$.

Freie Schleifen

Für jede freie Schleife w haben wir $\deg(w)$.

Seien nun w und v homotope freie Schleifen.

Freie Schleifen

Für jede freie Schleife w haben wir $\deg(w)$.

Seien nun w und v homotope freie Schleifen.

Wir haben also eine Homotopie $H : I \times S^1 \longrightarrow S^1$ von w nach v.

Freie Schleifen

Für jede freie Schleife w haben wir $\deg(w)$.

Seien nun w und v homotope freie Schleifen.

Wir haben also eine Homotopie $H : I \times S^1 \longrightarrow S^1$ von w nach v.

Sei $\tilde{H}$ eine Liftung von $H \circ (\mathrm{id} \times p) : I \times I \longrightarrow S^1$.

Freie Schleifen

Für jede freie Schleife w haben wir $\deg(w)$.

Seien nun w und v homotope freie Schleifen.

Wir haben also eine Homotopie $H : I \times S^1 \longrightarrow S^1$ von w nach v.

Sei $\tilde{H}$ eine Liftung von $H \circ (\mathrm{id} \times p) : I \times I \longrightarrow S^1$.

Setze $\tilde{h}_i := \tilde{H}(i, \_0)$.

Freie Schleifen

Für jede freie Schleife w haben wir $\deg(w)$.

Seien nun w und v homotope freie Schleifen.

Wir haben also eine Homotopie $H : I \times S^1 \longrightarrow S^1$ von w nach v.

Sei $\tilde{H}$ eine Liftung von $H \circ (\mathrm{id} \times p) : I \times I \longrightarrow S^1$.

Setze $\tilde{h}_i := \tilde{H}(i, \_0)$.

$i \longmapsto \deg(h_i) = \tilde{h}_i(1) - \tilde{h}_i(0)$ ist stetig und das Bild liegt in $\mathbf{Z}$.

Also ist die Abbildung konstant und

$$\deg(w) = \deg(v)\ .$$

Freie Schleifen

Für jede freie Schleife w haben wir $\deg(w)$.

Seien nun w und v homotope freie Schleifen.

Wir haben also eine Homotopie $H : I \times S^1 \longrightarrow S^1$ von w nach v.

Sei $\tilde{H}$ eine Liftung von $H \circ (\mathrm{id} \times p) : I \times I \longrightarrow S^1$.

Setze $\tilde{h}_i := \tilde{H}(i, \_0)$.

$i \longmapsto \deg(h_i) = \tilde{h}_i(1) - \tilde{h}_i(0)$ ist stetig und das Bild liegt in $\mathbf{Z}$.

Also ist die Abbildung konstant und

$$\deg(w) = \deg(v) \ .$$

Wir erhalten eine induzierte Abbildung

$$\deg : [S^1; S^1] \longrightarrow \mathbf{Z} \ .$$

Wir haben das kommutative Diagramm von Mengen

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, x_0) = [S^1, 1; S^1; x_0] \arrow[d] \arrow[dr, "\deg"] & \\ [S^1; S^1] \arrow[r, "\deg"'] & \mathbf{Z}\,. \end{tikzcd}$$

Freie Schleifen

Wir können auf $[S^1; S^1]$ mittels der komplexen Multiplikation eine Gruppenstruktur definieren:

Für freie Schleifen v, w haben wir $v \cdot w$ mit $(v \cdot w)(t) = v(t) \cdot w(t)$.

Freie Schleifen

Wir können auf $[S^1; S^1]$ mittels der komplexen Multiplikation eine Gruppenstruktur definieren:

Für freie Schleifen v, w haben wir $v \cdot w$ mit $(v \cdot w)(t) = v(t) \cdot w(t)$.

Wenn w_1, w_1, v_1, v_2 freie Schleifen mit

$w_1 \simeq w_2$ mittels H,

$v_1 \simeq v_2$ mittels K sind,

dann ist $H \cdot K$ eine Homotopie von $v_1 \cdot v_1$ nach $w_1 \cdot w_2$.

Freie Schleifen

Wir können auf $[S^1; S^1]$ mittels der komplexen Multiplikation eine Gruppenstruktur definieren:

Für freie Schleifen v, w haben wir $v \cdot w$ mit $(v \cdot w)(t) = v(t) \cdot w(t)$.

Wenn w_1, w_1, v_1, v_2 freie Schleifen mit

$w_1 \simeq w_2$ mittels H,

$v_1 \simeq v_2$ mittels K sind,

dann ist $H \cdot K$ eine Homotopie von $v_1 \cdot v_1$ nach $w_1 \cdot w_2$.

Wir haben eine Gruppenstruktur auf $[S^1; S^1]$,

hiermit ist $\deg : [S^1; S^1] \longrightarrow \mathbf{Z}$ ein Gruppenisomorphismus.

Freie Schleifen

Wir haben das kommutative Diagramm von Gruppen und Gruppenisomorphismen:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, x_0) = [S^1, 1; S^1; x_0] \arrow[d] \arrow[dr, "\deg"] & \\ {[S^1; S^1]} \arrow[r, "\deg"'] & \mathbf{Z}\,. \end{tikzcd}$$

Freie Schleifen

Wir haben das kommutative Diagramm von Gruppen und Gruppenisomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, x_0) = [S^1, 1; S^1; x_0] \arrow[dd] \arrow[dr, "\deg"] & \\
& \mathbf{Z}\,. \\
{[S^1; S^1]} \arrow[ur, "\deg"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Auch auf $\pi_1(S^1, x_0)$ kann man mittels der komplexen Multiplikation eine Gruppenstruktur definieren. Die beiden Gruppenstrukturen sind dann gleich.

Freie Schleifen

Wir haben das kommutative Diagramm von Gruppen und Gruppenisomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, x_0) = [S^1, 1; S^1; x_0] \arrow[dd] \arrow[dr, "\deg"] & \\
& \mathbf{Z}\,. \\
{[S^1; S^1]} \arrow[ur, "\deg"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Auch auf $\pi_1(S^1, x_0)$ kann man mittels der komplexen Multiplikation eine Gruppenstruktur definieren. Die beiden Gruppenstrukturen sind dann gleich.

Man kann ganz allgemein zeigen: Wenn auf einer Menge zwei Gruppenstrukuren definiert sind, die in gewisser – recht schwacher – Hinsicht kompatibel sind, dann sind die beiden Strukturen gleich und die entstehende Gruppe ist abelsch.)

Hochhebung

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S}^1$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Beweis.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Hochhebungen

Beweis.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

Beweis.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

$w^{-1}(U_i)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle (den Wegzusammenhangskomponenten). Diese Intervalle überdecken I. Es gibt somit endlich viele offene Intervalle $J_1, J_2, \ldots$ mit $w(J_i) \subseteq U_1$ oder $w(J_i) \subseteq U_2$. Diese seien OE so angeordnet: $J_i \cap J_{i+1} \neq \emptyset$.

Beweis.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

$w^{-1}(U_i)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle (den Wegzusammenhangskomponenten). Diese Intervalle überdecken I. Es gibt somit endlich viele offene Intervalle $J_1, J_2, \dots$ mit $w(J_i) \subseteq U_1$ oder $w(J_i) \subseteq U_2$. Diese seien OE so angeordnet: $J_i \cap J_{i+1} \neq \emptyset$.

Man kann $w_{|J_i}$ liften.

Beweis.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

$w^{-1}(U_i)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle (den Wegzusammenhangskomponenten). Diese Intervalle überdecken I. Es gibt somit endlich viele offene Intervalle $J_1, J_2, \ldots$ mit $w(J_i) \subseteq U_1$ oder $w(J_i) \subseteq U_2$. Diese seien OE so angeordnet: $J_i \cap J_{i+1} \neq \emptyset$.

Man kann $w_{|J_i}$ liften.

Sei $t \in J_i$. Dann bestimmt jedes Element von $p^{-1}(\{w(t)\})$ in eindeutiger Weise eine Liftung.

Beweis.

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

$w^{-1}(U_i)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle (den Wegzusammenhangskomponenten). Diese Intervalle überdecken I. Es gibt somit endlich viele offene Intervalle $J_1, J_2, \ldots$ mit $w(J_i) \subseteq U_1$ oder $w(J_i) \subseteq U_2$. Diese seien OE so angeordnet: $J_i \cap J_{i+1} \neq \emptyset$.

Man kann $w_{|J_i}$ liften.

Sei $t \in J_i$. Dann bestimmt jedes Element von $p^{-1}(\{w(t)\})$ in eindeutiger Weise eine Liftung.

Nun liftet man der Reihe nach $w_{|J_1}, w_{|J_1 \cup J_2}, \ldots, w$.

$\square$

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S}^1$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Hochhebungen

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

b) Sei $H : I \times I \longrightarrow S^1$ mit $H(0,0) = x_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0, \quad p_*(\tilde{H}) = H$, wieder genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von H mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Beweis von b).

Eindeutigkeit.

Beweis von b).

Eindeutigkeit. Es sei $\tilde{H}$ so eine Liftung.

Beweis von b).

Eindeutigkeit. Es sei $\tilde{H}$ so eine Liftung.

Es ist $\tilde{H}(0, \_)$ die Liftung von $H(0, \_)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Beweis von b).

Eindeutigkeit. Es sei $\tilde{H}$ so eine Liftung.

Es ist $\tilde{H}(0, \_)$ die Liftung von $H(0, \_)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei nun $t \in I$. Es ist $\tilde{H}(0, t)$ eindeutig bestimmt durch $\tilde{x}_0$ und H.

Beweis von b).

Eindeutigkeit. Es sei $\tilde{H}$ so eine Liftung.

Es ist $\tilde{H}(0, \_)$ die Liftung von $H(0, \_)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei nun $t \in I$. Es ist $\tilde{H}(0, t)$ eindeutig bestimmt durch $\tilde{x}_0$ und H. Nun ist $\tilde{H}(\_, t)$ die Liftung von $H(\_, t)$ mit Anfangspunkt $\tilde{H}(0, t)$. Damit ist auch $\tilde{H}(i, t)$ eindeutig bestimmt.

Beweis von b).

Eindeutigkeit. Es sei $\tilde{H}$ so eine Liftung.

Es ist $\tilde{H}(0, \_)$ die Liftung von $H(0, \_)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei nun $t \in I$. Es ist $\tilde{H}(0, t)$ eindeutig bestimmt durch $\tilde{x}_0$ und H. Nun ist $\tilde{H}(\_, t)$ die Liftung von $H(\_, t)$ mit Anfangspunkt $\tilde{H}(0, t)$. Damit ist auch $\tilde{H}(i, t)$ eindeutig bestimmt.

Existenz. Man könnte $\tilde{H}$ auch so definieren. Aber dann ist es recht schwer zu zeigen, dass $\tilde{H}$ stetig ist.

Beweis von b).

Eindeutigkeit. Es sei $\tilde{H}$ so eine Liftung.

Es ist $\tilde{H}(0, \_)$ die Liftung von $H(0, \_)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Sei nun $t \in I$. Es ist $\tilde{H}(0, t)$ eindeutig bestimmt durch $\tilde{x}_0$ und H. Nun ist $\tilde{H}(\_, t)$ die Liftung von $H(\_, t)$ mit Anfangspunkt $\tilde{H}(0, t)$. Damit ist auch $\tilde{H}(i, t)$ eindeutig bestimmt.

Existenz. Man könnte $\tilde{H}$ auch so definieren. Aber dann ist es recht schwer zu zeigen, dass $\tilde{H}$ stetig ist.

Deshalb anders . . .

Das Lemma von Lebesgue

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Das Lemma von Lebesgue

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Definition. So eine Zahl δ nennen wir **Lebesgue-Zahl** (zu den gegebenen Daten).

Das Lemma von Lebesgue

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Definition. So eine Zahl δ nennen wir **Lebesgue-Zahl** (zu den gegebenen Daten).

Bemerkung.

- In Laures & Szymik wird gefordert:

$$\forall x \in X \, \exists U \in \mathcal{U} \, : U_\delta(x) \subseteq U$$

Das Lemma von Lebesgue

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Definition. So eine Zahl δ nennen wir **Lebesgue-Zahl** (zu den gegebenen Daten).

Bemerkung.

- In Laures & Szymik wird gefordert:

$$\forall x \in X \, \exists U \in \mathcal{U} \; : U_\delta(x) \subseteq U$$

- In der Wikipedia wird "$< \delta$" gefordert.

Das Lemma von Lebesgue

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Satz. (Lemma von Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass jeder Unterraum A von X mit Durchmesser $\leq \delta$ von einer der Mengen U in der Umgebung $\mathcal{U}$ umfasst wird, d.h. $A \subseteq U$.

Beweis.

Seien die Daten gegeben.

Sei zunächst $A \subseteq X$ mit Durchmesser $\leq \delta$.

Dann gilt für ein $x \in A$: $A \subseteq \overline{U}_\delta(x) \subseteq U_{2\delta}(x)$.

Es reicht somit zu zeigen:

Es gibt ein $\delta > 0$ mit:

$$\forall x \in X \exists U \in \mathcal{U} \, : \, U_\delta(x) \subseteq U$$

Da X kompakt ist, kann außerdem die Überdeckung $\mathcal{U}$ als endlich angenommen werden; wir tun dies.

Seien $U_1, \ldots, U_n$ die überdeckenden offenen Unterräume, seien $C_i := X \backslash U_i$.

Definiere nun die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ durch

$$f(x) := \max_i d(x, C_i)$$

Diese Funktion ist auf ganz X positiv

Das Lemma von Lebesgue

Da X kompakt ist, kann außerdem die Überdeckung $\mathcal{U}$ als endlich angenommen werden; wir tun dies.

Seien $U_1, \ldots, U_n$ die überdeckenden offenen Unterräume, seien $C_i := X \backslash U_i$.

Definiere nun die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ durch

$$f(x) := \max_i d(x, C_i)$$

Diese Funktion ist auf ganz X positiv:

Sei $x \in X$. Dann gibt es ein i mit $x \in U_i$

Das Lemma von Lebesgue

Da X kompakt ist, kann außerdem die Überdeckung $\mathcal{U}$ als endlich angenommen werden; wir tun dies.

Seien $U_1, \ldots, U_n$ die überdeckenden offenen Unterräume, seien $C_i := X \backslash U_i$.

Definiere nun die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ durch

$$f(x) := \max_i d(x, C_i)$$

Diese Funktion ist auf ganz X positiv:

Sei $x \in X$. Dann gibt es ein i mit $x \in U_i$ und dazu ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq U_i$.

Da X kompakt ist, kann außerdem die Überdeckung $\mathcal{U}$ als endlich angenommen werden; wir tun dies.

Seien $U_1, \ldots, U_n$ die überdeckenden offenen Unterräume, seien $C_i := X \backslash U_i$.

Definiere nun die Funktion $f : X \longrightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ durch

$$f(x) := \max_i d(x, C_i)$$

Diese Funktion ist auf ganz X positiv:

Sei $x \in X$. Dann gibt es ein i mit $x \in U_i$ und dazu ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq U_i$.

Da f stetig ist und X kompakt, hat die Funktion ein Minimum $\delta > 0$.

Das Lemma von Lebesgue

$$f(x) = \max_i d(x, C_i)$$

Das Lemma von Lebesgue

$$f(x) = \max_i d(x, C_i)$$

Für $x \in X$ gilt:

$$\delta \leq f(x) = \max_i d(x, C_i)$$

Das Lemma von Lebesgue

$$f(x) = \max_i d(x, C_i)$$

Für $x \in X$ gilt:

$$\delta \leq f(x) = \max_i d(x, C_i)$$

Also gibt es ein i mit

$$\delta \leq d(x, C_i)$$

Das Lemma von Lebesgue

$$f(x) = \max_i d(x, C_i)$$

Für $x \in X$ gilt:

$$\delta \leq f(x) = \max_i d(x, C_i)$$

Also gibt es ein i mit

$$\delta \leq d(x, C_i) \ ,$$

d.h.

$$U_\delta(x) \subseteq U_i \ .$$

$\square$

Hochhebungen

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

b) Sei $H : I \times I \longrightarrow S^1$ mit $H(0,0) = x_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$, $p_*(\tilde{H}) = H$, wieder genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von H mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Beweis von a).

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Beweis von a).

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

Beweis von a).

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

bisher. $w^{-1}(U_i)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle (den Wegzusammenhangskomponenten). Diese Intervalle überdecken I. Es gibt somit endlich viele offene Intervalle $J_1, J_2, \ldots$ mit $w(J_i) \subseteq U_1$ oder $w(J_i) \subseteq U_2$. Diese seien OE so angeordnet: $J_i \cap J_{i+1} \neq \emptyset$.

Beweis von a).

Sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0.

Sei U_1, U_2 eine offene Überdeckung von S^1 gegeben durch offene Intervalle I_1, I_2 von $\mathbf{R}$ mit $p : I_i \xrightarrow{\sim} U_i \subseteq S^1$.

bisher. $w^{-1}(U_i)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle (den Wegzusammenhangskomponenten). Diese Intervalle überdecken I. Es gibt somit endlich viele offene Intervalle $J_1, J_2, \ldots$ mit $w(J_i) \subseteq U_1$ oder $w(J_i) \subseteq U_2$. Diese seien OE so angeordnet: $J_i \cap J_{i+1} \neq \emptyset$.

neu. $w^{-1}(U_1), w^{-1}(U_i)$ ist eine offene Überdeckung von I. Es sei δ eine Lebegue-Zahl hierzu.

Dann liegt jedes Intervall $[k\delta, \min((k+1)\delta, 1)]$ in $w^{-1}(U_1)$ oder in $w^{-1}(U_2)$.

...

Hochhebungen

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

b) Sei $H : I \times I \longrightarrow S^1$ mit $H(0,0) = x_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$, $p_*(\tilde{H}) = H$, wieder genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von H mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Beweis von b).

Existenz.

Seien U_1, U_2 mit I_1, I_2 mit $p_i : I_i \xrightarrow{\sim} U_i$ wie in a).

Beweis von b).

Existenz.

Seien U_1, U_2 mit I_1, I_2 mit $p_i : I_i \xrightarrow{\sim} U_i$ wie in a).

Betrachte $I \times I$ mit der Maximumnorm. Sei δ eine Lebegue-Zahl der Überdeckung $H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)$ von $I \times I$.

Beweis von b).

Existenz.

Seien U_1, U_2 mit I_1, I_2 mit $p_i : I_i \xrightarrow{\sim} U_i$ wie in a).

Betrachte $I \times I$ mit der Maximumnorm. Sei δ eine Lebegue-Zahl der Überdeckung $H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)$ von $I \times I$.

Sei $Q_{kl} := [\delta k, \min(\delta(k+1), 1)] \times [\delta \ell, \min(\delta(\ell+1), 1)]$.

Dann ist also $H(Q_{k\ell}) \subseteq U_1 / \subseteq U_2$.

Beweis von b).

Existenz.

Seien U_1, U_2 mit I_1, I_2 mit $p_i : I_i \xrightarrow{\sim} U_i$ wie in a).

Betrachte $I \times I$ mit der Maximumnorm. Sei δ eine Lebegue-Zahl der Überdeckung $H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)$ von $I \times I$.

Sei $Q_{kl} := [\delta k, \min(\delta(k+1), 1)] \times [\delta \ell, \min(\delta(\ell+1), 1)]$.

Dann ist also $H(Q_{k\ell}) \subseteq U_1 \ / \ \subseteq U_2$.

Konstruiere nun $\tilde{H}$ induktiv nach k und ℓ.

(Es “passt” am Rand aufgrund der Eindeutigkeit für Wege.) □

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$

Hochhebungen

Satz (Hochhebung / Liftung für $\mathbf{S^1}$). Sei $x_0 \in S^1$, sei $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

a) Es sei w ein Weg in S^1 mit Anfangspunkt x_0. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{w}$ in $\mathbf{R}$ mit $\tilde{w}(0) = \tilde{x}_0$ und $p_*(\tilde{w}) = w$, genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von w mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

b) Sei $H : I \times I \longrightarrow S^1$ mit $H(0,0) = x_0$. Dann gibt es genau ein $\tilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbf{R}$ mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$, $p_*(\tilde{H}) = H$, wieder genannt die **Hochhebung** oder **Liftung** von H mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$.

Anwendungen – Der Torus

Definition. Der **Torus** ist $T := S^1 \times S^1$.

Definition. Der **Torus** ist $T := S^1 \times S^1$.

Satz. Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) topologische Räume. Dann ist $(X \times Y, (x_0, y_0))$ mit p_X, p_Y ein Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0).

Definition. Der **Torus** ist $T := S^1 \times S^1$.

Satz. Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) topologische Räume. Dann ist $(X \times Y, (x_0, y_0))$ mit p_X, p_Y ein Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0).

Wir haben einen Isomorphismus

$$(\pi_1(p_X), \pi_1(p_Y)) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \ .$$

Definition. Der **Torus** ist $T := S^1 \times S^1$.

Satz. Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) topologische Räume. Dann ist $(X \times Y, (x_0, y_0))$ mit p_X, p_Y ein Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0).

Wir haben einen Isomorphismus

$$(\pi_1(p_X), \pi_1(p_Y)) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \ .$$

"Der Funktor π_1 erhält Produkte."

Definition. Der **Torus** ist $T := S^1 \times S^1$.

Satz. Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) topologische Räume. Dann ist $(X \times Y, (x_0, y_0))$ mit p_X, p_Y ein Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0).

Wir haben einen Isomorphismus

$$(\pi_1(p_X), \pi_1(p_Y)) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) .$$

"Der Funktor π_1 erhält Produkte."

Als Anwendung:

$$\pi_1(T) \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} .$$

Anwendungen – Der Torus

Definition. Der **Torus** ist $T := S^1 \times S^1$.

Satz. Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) topologische Räume. Dann ist $(X \times Y, (x_0, y_0))$ mit p_X, p_Y ein Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0).

Wir haben einen Isomorphismus

$$(\pi_1(p_X), \pi_1(p_Y)) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\sim} \pi(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \ .$$

"Der Funktor π_1 erhält Produkte."

Als Anwendung:

$$\pi_1(T) \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \ .$$

(Wir können den Basispunkt weglassen, da die Gruppe abelsch ist – ansonsten sollte man nur "$\approx$" schreiben.)

Anwendungen – Der Browersche Fixpunktsatz

Satz. Jede stetige Abbildung $f : D^2 \longrightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt

Anwendungen – Der Browersche Fixpunktsatz

Satz. Jede stetige Abbildung $f : D^2 \longrightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.

Satz. Jede stetige Abbildung $f : D^2 \longrightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.

Beweis.

Angenommen, dies ist nicht der Fall.

Satz. Jede stetige Abbildung $f : D^2 \longrightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.

Beweis.

Angenommen, dies ist nicht der Fall.

Es sei $r : D^2 \longrightarrow S^1$ wie folgt definiert:

Für $x \in D^2$ sei $r(x)$ der Schnittpunkt des Strahls von $f(x)$ duch x mit S^1.

Anwendungen – Der Browersche Fixpunktsatz

Satz. Jede stetige Abbildung $f : D^2 \longrightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.

Beweis.

Angenommen, dies ist nicht der Fall.

Es sei $r : D^2 \longrightarrow S^1$ wie folgt definiert:

Für $x \in D^2$ sei $r(x)$ der Schnittpunkt des Strahls von $f(x)$ duch x mit S^1.

Diese Abbildung ist stetig. Außerdem ist sie die Identität auf S^1.

Satz. Jede stetige Abbildung $f : D^2 \longrightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.

Beweis.

Angenommen, dies ist nicht der Fall.

Es sei $r : D^2 \longrightarrow S^1$ wie folgt definiert:

Für $x \in D^2$ sei $r(x)$ der Schnittpunkt des Strahls von $f(x)$ duch x mit S^1.

Diese Abbildung ist stetig. Außerdem ist sie die Identität auf S^1.

Damit ist S^1 ein Retrakt von D^2, also $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}$.

Anwendungen – Der Browersche Fixpunktsatz

- Wir haben
$$\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \xrightarrow{\iota} D^2 \xrightarrow{r} S^1 \quad .$$
- D^2 ist zusammenziehbar.

Anwendungen – Der Browersche Fixpunktsatz

- Wir haben
$$\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \xrightarrow{\iota} D^2 \xrightarrow{r} S^1 \quad .$$
- D^2 ist zusammenziehbar.

Widerspruch auf zwei Arten:

Anwendungen – Der Browersche Fixpunktsatz

- Wir haben
$$\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \xrightarrow{\iota} D^2 \xrightarrow{r} S^1 \quad .$$
- D^2 ist zusammenziehbar.

Widerspruch auf zwei Arten:

- ι ist nullhomotop (alternativ r), also auch $r \circ \iota$. Aber id_{S^1} ist nicht nullhomotop.

Anwendungen – Der Browersche Fixpunktsatz

- Wir haben
$$\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \xrightarrow{\iota} D^2 \xrightarrow{r} S^1 \quad .$$
- D^2 ist zusammenziehbar.

Widerspruch auf zwei Arten:

- ι ist nullhomotop (alternativ r), also auch $r \circ \iota$. Aber id_{S^1} ist nicht nullhomotop.
- Wir haben
$$\begin{array}{c} \mathrm{id}_{\pi_1(S^1,1)} : \pi_1(S^1,1) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(D^2,1) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1,1) \ . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ ist eine stetige Abbildung.

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \backslash \{0\}$ ist eine stetige Abbildung.

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \backslash \{0\}$ ist eine stetige Abbildung.

Wir benutzen: $\mathbf{C}^*$ ist homotop zu S^1, also haben wir wieder

$$\deg : [S^1; \mathbf{C}^*] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} \,.$$

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ ist eine stetige Abbildung.

Wir benutzen: $\mathbf{C}^*$ ist homotop zu S^1, also haben wir wieder

$$\deg : [S^1; \mathbf{C}^*] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} \ .$$

Sei OE f normiert, $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$.

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \backslash \{0\}$ ist eine stetige Abbildung.

Wir benutzen: $\mathbf{C}^*$ ist homotop zu S^1, also haben wir wieder

$$\deg : [S^1; \mathbf{C}^*] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} \, .$$

Sei OE f normiert, $f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$.

Da $\mathbf{C}$ zusammenziehbar ist, ist f nullhomotop, z.B. mit $h_i(z) := f(iz)$.

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ ist eine stetige Abbildung.

Wir benutzen: $\mathbf{C}^*$ ist homotop zu S^1, also haben wir wieder

$$\deg : [S^1; \mathbf{C}^*] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} .$$

Sei OE f normiert, $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$.

Da $\mathbf{C}$ zusammenziehbar ist, ist f nullhomotop, z.B. mit $h_i(z) := f(iz)$.

Somit ist auch $f_{|S^1} : S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*$ nullhomotop. ($f_{|S^1} = f \circ \iota$)

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbf{C}[z]$ hat eine Nullstelle.

Beweis.

Angenommen, so ein Polynom f hat keine Nullstelle.

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ ist eine stetige Abbildung.

Wir benutzen: $\mathbf{C}^*$ ist homotop zu S^1, also haben wir wieder

$$\deg : [S^1; \mathbf{C}^*] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} \,.$$

Sei OE f normiert, $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$.

Da $\mathbf{C}$ zusammenziehbar ist, ist f nullhomotop, z.B. mit $h_i(z) := f(iz)$.

Somit ist auch $f_{|S^1} : S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*$ nullhomotop. ($f_{|S^1} = f \circ \iota$)

Sei $s > 0$. Dann ist auch $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*\,,\ z \longmapsto f(sz)$ nullhomotop.

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Wie müssen wir s wählen?

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie
$S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Wie müssen wir s wählen?

Sei $s \geq 1, z \in S^1$.

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Wie müssen wir s wählen?

Sei $s \geq 1, z \in S^1$. Es ist:

$$|f(sz) - s^n z^n|$$

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie
$S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Wie müssen wir s wählen?

Sei $s \geq 1, z \in S^1$. Es ist:

$$|f(sz) - s^n z^n| \quad = |a_{n-1} s^{n-1} z^{n-1} + \cdots a_i z + a_0|$$

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Wie müssen wir s wählen?

Sei $s \geq 1, z \in S^1$. Es ist:

$$\begin{aligned} |f(sz) - s^n z^n| \quad &= |a_{n-1} s^{n-1} z^{n-1} + \cdots a_i z + a_0| \\ &\leq s^{n-1} \big(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| \big) \end{aligned}$$

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Wie müssen wir s wählen?

Sei $s \geq 1, z \in S^1$. Es ist:

$$\begin{aligned} |f(sz) - s^n z^n| &= |a_{n-1} s^{n-1} z^{n-1} + \cdots a_i z + a_0| \\ &\leq s^{n-1}\big(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|\big) \end{aligned}$$

Wir wollen: Dies ist $< s^n$.

Also:

$$s > |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

Idee. Für großes s verhält sich diese Funktion wie
$S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^1$, $z \longmapsto s^n z^n$. Diese Schleife hat den Grad n.

Wir wollen eine Homotopie zwischen den Schleifen $z \longmapsto s^n z^n$ und $z \longmapsto f(z)$ in $\mathbf{C}^*$.

Wie müssen wir s wählen?

Sei $s \geq 1, z \in S^1$. Es ist:

$$\begin{aligned} |f(sz) - s^n z^n| &= |a_{n-1} s^{n-1} z^{n-1} + \cdots a_i z + a_0| \\ &\leq s^{n-1}\big(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|\big) \end{aligned}$$

Wir wollen: Dies ist $< s^n$.

Also:

$$s > |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

Setze z.B. $s := |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| + 1$.

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

$$|f(sz) - s^n z^n| < s^n$$

Nun ist $(h_i)_{i \in I}$ mit

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

$$|f(sz) - s^n z^n| < s^n$$

Nun ist $(h_i)_{i \in I}$ mit

$$h_i : z \longmapsto i \cdot s^n z^n + (1 - i) \cdot f(sz) : S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*$$

eine Homotopie wie gewünscht.

Anwendungen – Der Fundamentalsatz der Algebra

$$|f(sz) - s^n z^n| < s^n$$

Nun ist $(h_i)_{i \in I}$ mit

$$h_i : z \longmapsto i \cdot s^n z^n + (1 - i) \cdot f(sz) : S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*$$

eine Homotopie wie gewünscht.

Also hat die Schleife $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*$, $z \longmapsto f(sz)$ den Grad n.

$$|f(sz) - s^n z^n| < s^n$$

Nun ist $(h_i)_{i \in I}$ mit

$$h_i : z \longmapsto i \cdot s^n z^n + (1-i) \cdot f(sz) : S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*$$

eine Homotopie wie gewünscht.

Also hat die Schleife $S^1 \longrightarrow \mathbf{C}^*\ ,\ z \longmapsto f(sz)$ den Grad n. Sie ist somit nicht nullhomotop.

Widerspruch!

$\square$