Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. Stefan Czimek

Leipzig, 08.11.2026

Übungen zur Vorlesung

Mathematik I für Studierende der Physik

Serie 4

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der *Limes superior*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big)$$

und der *Limes inferior*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k : k \geq n\}\big)$$

in $\mathbb{R}$ existieren und dass die Folge genau dann konvergiert, wenn die beiden gleich sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

(a) $x_n = \frac{n\cdot|n-10|}{|n-5|-n^2}$, (b) $x_n = \frac{n}{1+n^n}$, (c) $x_n = \frac{3^n}{2^{2n}+n}$.

Aufgabe 3 (1 Punkt)**.** Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ so, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1.$$

Zeigen Sie, dass dann (x_n) eine Nullfolge ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *"Fakultät"* $n!$ rekursiv durch

$$0! := 1,\ (n+1)! := (n+1)n!.$$

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in (1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folgen

$$\frac{n^k}{b^n},\quad \frac{a^n}{n!},\quad \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Nullfolgen sind. *Hinweis:* Die vorhergehende Aufgabe kann verwendet werden.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$x_n = \sqrt{n^2+2n} - n,\ \ y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}},\ \ z_n = \sqrt[n]{n^2+1},$$

wobei für $0 < a \in \mathbb{R}$ die n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ (auch geschrieben: $a^{\frac{1}{n}}$) definiert ist als positive reelle Zahl, sodass $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Die Existenz und Eindeutigkeit dieser reellen Zahl folgt aus der Dedekind-Vollständigkeit von $\mathbb{R}$: Die Menge $\{y > 0 : y^n < a\}$ ist nicht leer und nach oben beschränkt. Generell definiert man $a^r := (a^m)^{\frac{1}{k}}$ für $a > 0$ und $0 < r = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$, und schreibt $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.

Hinweis: Wenden Sie das Sandwichkriterium mit geeigneten Folgen an.

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Folgen beschränkt sind.

(a) $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\,\text{Wurzeln}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)_{n\geq 1}$. (*Hinweis:* $\frac{1}{2}a_n = a_n - \frac{1}{2}a_n$),

Aufgabe 7 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ genau dann beschränkt ist, wenn $(a_n^3 - a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist.

Aufgabe 8 (1 Punkt)**.** Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Die Aufgaben werden in den Übungsklassen in der Woche vom 09.11.2026 vorbesprochen (Gruppe a: Montag, 09.11.; Gruppe b: Donnerstag, 12.11.). Lösungen werden zu Beginn der eigenen Übungsklasse in der Woche vom 16.11.2026 (Gruppe a: Montag, 16.11.; Gruppe b: Donnerstag, 19.11.) auf Papier abgegeben (keine Abgabe über Moodle); die Abgabe ist in Gruppen von bis zu vier Studierenden möglich. In denselben Übungsklassen können die Aufgaben an der Tafel vorgerechnet werden.