Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. Stefan Czimek

Leipzig, 01.11.2026

Übungen zur Vorlesung

Mathematik I für Studierende der Physik

Serie 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (a) Sei X eine Menge und $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen X_i. Für $x, y \in X$ sei

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow\ x \text{ und } y \text{ liegen in derselben Menge } X_i.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und dass ihre Äquivalenzklassen genau die Mengen X_i sind. (Dies ist die Umkehrung in Proposition 1.4.7.) (2 Punkte)

(b) Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \ :\Leftrightarrow\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und beschreiben Sie die Äquivalenzklassen geometrisch. (1 Punkt)

(c) Auf $\mathbb{N}$ sei $m \sim n \ :\Leftrightarrow\ m$ teilt n oder n teilt m. Welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, transitiv hat $\sim$? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Wir rechnen in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ wie in der Vorlesung (jede Teilaufgabe gibt 1 Punkt).

(a) Bestimmen Sie alle $[a] \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, zu denen es ein $[b] \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ mit $[a] \cdot [b] = [1]$ gibt, und geben Sie jeweils $[b]$ an. Begründen Sie, warum es für die übrigen Klassen kein solches $[b]$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt: $[a]^2 \in \{[0], [1]\}$. Folgern Sie, dass keine Zahl der Form $4k + 3$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ eine Summe von zwei Quadratzahlen ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $\mathcal{K}$ ein Körper. Zeigen Sie die Teile (b), (c), (d), (e) und (h) von Lemma 2.2.4 (jeder Teil gibt 1 Punkt). Sie dürfen dabei die in der Vorlesung bewiesenen Teile (a), (f), (g) und (i) von Lemma 2.2.4 sowie Lemma 2.2.3 benutzen.

(b) Für jedes $a \in \mathcal{K}$ gilt $-(-a) = a$.

(c) Für alle $a, b \in \mathcal{K}$ gilt $-(a + b) = -a - b$.

(d) Für jedes $a \neq 0$ und jedes $b \in \mathcal{K}$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung in $\mathcal{K}$, nämlich $x = ba^{-1}$.

(e) Für alle $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt $(a + b)c = ac + bc$.

(h) Für alle $a \in \mathcal{K}$ gilt $(-1)a = -a$.

Geben Sie bei jedem Rechenschritt an, welches Axiom bzw. welche bereits bewiesene Aussage Sie benutzen.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{K}$ ein Körper. Zeigen Sie für $x, y \in \mathcal{K}$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Rechenregeln

$$(x^n)^m = x^{nm} \qquad \text{und} \qquad x^n y^n = (xy)^n.$$

Sie dürfen die in der Vorlesung bewiesene Regel $x^{n+m} = x^n x^m$ benutzen.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Seien a, b, x, y Elemente eines angeordneten Körpers $\mathcal{K}$. Zeigen Sie die Teile (c), (g) und (h) von Lemma 2.3.3 (jeder Teil gibt 1 Punkt). Die in der Vorlesung bewiesenen Teile (a), (b), (d), (e), (f) dürfen Sie benutzen.

(c) Man kann Ungleichungen bedingt multiplizieren:

$$0 \leq a < b,\ 0 \leq x < y \ \Rightarrow\ ax < by.$$

(g) Für jedes $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ gilt $x > 0 \ \Leftrightarrow\ x^{-1} > 0$.

(h) Ist $0 < x < y$, so folgt $x^{-1} > y^{-1}$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

Wann gilt Gleichheit? (*Hinweis*: Fallunterscheidung nach Vorzeichen von a und b.)

Aufgabe 7 (1 Punkt)**.** Seien $0 < a < b$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{ab}$ wird das *geometrische Mittel* und $\frac{a+b}{2}$ das *arithmetische Mittel* genannt. Benutzen Sie, dass nach der Vorlesung jedes $c \geq 0$ eine eindeutige Quadratwurzel $\sqrt{c} \geq 0$ besitzt.

Aufgabe 8 (2 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie: Für alle $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}\, x^2.$$

(b) Folgern Sie $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$ für alle $n \geq 2$, und zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{n}{2^n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.
Hinweis: Binomischer Lehrsatz bzw. Archimedisches Prinzip.

Aufgabe 9 (2 Punkte)**.** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \alpha x + |x|$, injektiv bzw. surjektiv?

Aufgabe 10 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, sofern sie existieren, und beweisen Sie Ihre Antworten (jede Teilaufgabe gibt 1 Punkt).

(a) $M_1 = \big\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\big\}$,

(b) $M_2 = \Big\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \frac{2x}{x+1} < 1\Big\}$,

(c) $M_3 = \big\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\big\}$.

Aufgabe 11 (2 Punkte)**.** Seien $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

nach oben beschränkt ist und dass gilt

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Aufgabe 12 (1 Punkt)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $x \leq y$ ist.

Die Aufgaben werden in den Übungsklassen in der Woche vom 02.11.2026 vorbesprochen (Gruppe a: Montag, 02.11.; Gruppe b: Donnerstag, 05.11.). Lösungen können bis Montag, 09.11.2026, 15:15 Uhr (vor Beginn der Übungsklasse) auf Moodle eingereicht werden; die Abgabe ist in Gruppen von bis zu vier Studierenden möglich. In den Übungsklassen in der Woche vom 09.11.2026 (Gruppe a: Montag, 09.11.; Gruppe b: Donnerstag, 12.11.) können die Aufgaben an der Tafel vorgerechnet werden.