

UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Kapitel 3: Folgen und Reihen

Folgen · Konvergenz · Einschließungskriterium · Bestimmte Divergenz · Rechenregeln für Grenzwerte

Rückblick · Zum Mitdenken

Auflösung „Zum Mitdenken“ vom Mittwoch.

(1) $M = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$.

- $\min M = \inf M = 0$: $0 = 1 - \frac{1}{1} \in M$, und $1 - \frac{1}{n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\sup M = 1$: 1 ist obere Schranke. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 2.5.9 ein n mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$, also $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ *(ε-Kriterium)*.
- $\max M$ existiert nicht: $1 - \frac{1}{n} < 1$ für alle n, also $\sup M = 1 \notin M$.

(2) Fall $a \geq b$: $|a - b| = a - b$, also $\frac{1}{2}(a + b + a - b) = a$. Fall $a < b$: $|a - b| = b - a$, also $\frac{1}{2}(a + b + b - a) = b$. ✓

Analog: $\min(a, b) = \frac{1}{2}\big(a + b - |a - b|\big)$. *(Mittelpunkt ± halber Abstand.)*

(3) Seien $a < b$. Nach Satz 2.5.11 gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$. Dann ist $a < r + \sqrt{2} < b$, und $r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, denn sonst wäre $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r \in \mathbb{Q}$. □

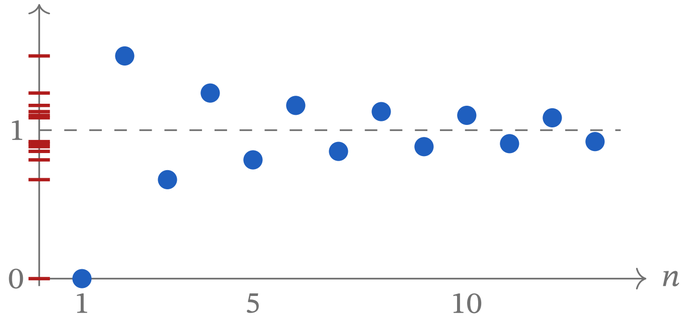
Heute präzisieren wir: Was heißt „$1 - \frac{1}{n}$ kommt der 1 beliebig nahe“? Antwort: Konvergenz.

3.1 Folgen

Definition 3.1.1. Eine *Folge* mit Werten in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Man schreibt a_n statt $a(n)$ und nennt $a_1, a_2, \dots$ die *Folgenglieder*. Schreibweisen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n), $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Beispiele 3.1.2.

- konstante Folge $a_n = a$: $(a, a, a, \dots)$
- $a_n = \frac{1}{n}$: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
- $a_n = (-1)^n$: $(-1, 1, -1, 1, \dots)$
- $a_n = \frac{n}{n+1}$: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$
- anderer Startindex: $(\frac{n}{n-1})_{n\geq 2}$
- *rekursiv*: Fibonacci $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$:
  $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$
- Quadratzahlen n^2, Dreieckszahlen $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *(Beispiel 1.5.1)*



$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$: *als Graph $n \mapsto a_n$, als Punkte auf der Zahlengeraden (rote Striche).*

Eine Folge ist mehr *als die Menge ihrer Glieder: Reihenfolge und Wiederholungen zählen.* $((-1)^n)$ *hat die Wertemenge* $\{-1, 1\}$, *ist aber eine unendliche Folge.*

3.1 Konvergenz · Was heißt „sich annähern“?

Was soll „a_n nähert sich a an“ bedeuten? Drei Versuche:

Versuch 1: „Der Abstand $|a_n - a|$ wird immer kleiner.“

- *Zu schwach: Für $a_n = \frac{1}{n}$ wird auch $|a_n - (-1)| = 1 + \frac{1}{n}$ immer kleiner – aber $\frac{1}{n}$ nähert sich nicht der -1.*
- *Zu streng: $(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots)$ nähert sich der 0, der Abstand wird aber nicht* immer *kleiner.*

Versuch 2: „Die Folge kommt a beliebig nahe“ – zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es *ein* n mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

- *Zu schwach: $(0, 5, 0, 5, 0, 5, \dots)$ trifft die 5 sogar exakt – entfernt sich aber immer wieder.*

Versuch 3: „Für *jede* Genauigkeit $\varepsilon > 0$ liegen *ab einem gewissen Index alle* Folgenglieder ε-nah bei a.“ ✓
Das ist die richtige Idee. Präzise Fassung auf der nächsten Folie.

Physik: Ein Messgerät zeigt nach dem Einschalten Werte $a_1, a_2, a_3, \dots$ an. „Der Wert hat sich auf a eingependelt“ heißt: Welche Genauigkeit ε Sie auch verlangen – nach einer gewissen Wartezeit n_0 weichen alle *weiteren Anzeigen um weniger als ε von a ab.*

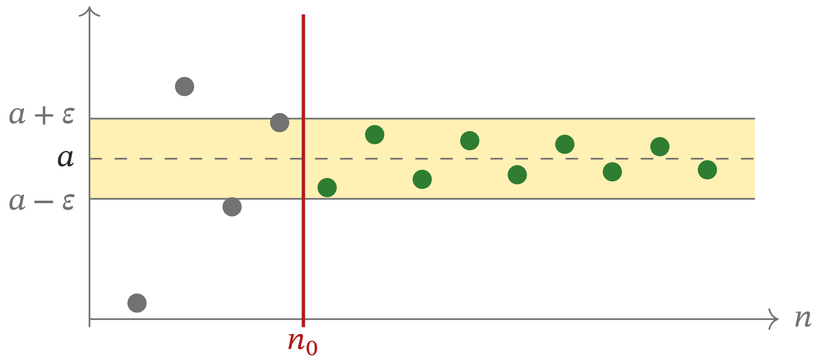
3.1 Konvergenz · Definition

Definition 3.1.3 (Konvergenz). Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für jedes } n \geq n_0.$$

Schreibweise: $a_n \to a$ *(„a_n konvergiert gegen a“)*.

- $|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$,
  d. h. a_n liegt in der ε-*Umgebung* $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- In Worten: In jeder ε-Umgebung von a liegen *fast alle* Folgenglieder *(alle bis auf endlich viele)*.
- n_0 darf (und wird meist) von ε abhängen: kleineres ε ⇝ größeres n_0.



Ab n_0 bleiben alle Punkte im ε-Streifen.

3.1 Konvergenz · Quantoren lesen

Die Definition in Quantoren:

$$a_n \to a \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_0 \;: \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Als Spiel: Ein Gegner nennt eine Genauigkeit $\varepsilon > 0$ *(so klein er will)*. Sie müssen ein n_0 liefern, ab dem *alle* Glieder ε-nah bei a liegen. „$a_n \to a$“ heißt: Sie gewinnen *immer*.

Verneinung *(Regeln aus Kapitel 1: $\forall \leftrightarrow \exists$ tauschen, innere Aussage verneinen)*:

$$a_n \not\to a \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq n_0 \;: \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

D. h. es gibt eine Genauigkeit ε, die unendlich oft *verletzt wird.*

Typische Fehler:

- Quantoren vertauscht: „$\exists\, n_0 \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\forall\, n \geq n_0$“ erzwingt $a_n = a$ für alle $n \geq n_0$ *(„am Ende konstant“)*.
- ε fest gewählt, z. B. $\varepsilon = \frac{1}{1000}$: Das zeigt nur Genauigkeit $\frac{1}{1000}$, nicht Konvergenz.
- Harmlos ist dagegen „$\leq \varepsilon$“ statt „$< \varepsilon$“ oder „$n > n_0$“ statt „$n \geq n_0$“ *(ersetze ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ bzw. n_0 durch $n_0 + 1$)*.

3.1 Konvergenz · Beispiele

Beispiele 3.1.4.

- Konstante Folge $a_n = a$: $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ für alle n *($n_0 = 1$ für jedes ε)*.
- *Am Ende konstante* Folgen: Gibt es n_1 mit $a_n = a_{n_1}$ für alle $n \geq n_1$, so gilt $a_n \to a_{n_1}$ *($n_0 = n_1$)*.
- $\frac{1}{n} \to 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.5.9 *(Archimedes)* gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ ist

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

- $\frac{n}{n+1} \to 1$: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Wähle n_0 mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ wie eben.

Konkret. Für $a_n = \frac{n}{n+1}$ und $\varepsilon = \frac{1}{100}$: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \iff n > 99$. Also $n_0 = 100$ *(oder jedes größere)*.
Für $\varepsilon = 10^{-6}$ braucht man $n_0 = 10^6$. *Man muss nicht das* kleinste n_0 *finden – irgendeines genügt.*

Das Archimedische Prinzip ist der Motor fast aller Konvergenzbeweise: Es liefert $\frac{1}{n} \to 0$.

3.1 Konvergenz · Ein divergentes Beispiel

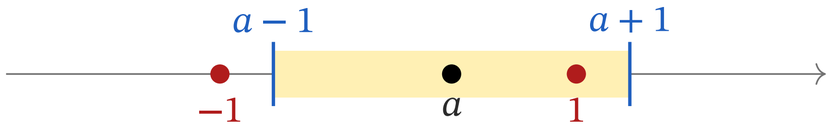
Definition 3.1.9 (Teil 1). Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Beispiel. Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent.

Beweis. Angenommen, $(-1)^n \to a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es n_0 mit $|(-1)^n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$.
Mit einem geraden und einem ungeraden $n \geq n_0$ folgt $|1 - a| < 1$ und $|-1 - a| < 1$. Dreiecksungleichung:

$$2 = |1 - (-1)| = |(1 - a) + (a + 1)| \leq |1 - a| + |a + 1| < 1 + 1 = 2.$$

Widerspruch $(2 < 2)$. □



Anschaulich: Ein offenes Intervall $(a - 1, a + 1)$ der Länge 2 kann nicht beide *Punkte -1 und 1 enthalten.*

Rezept für Divergenzbeweise: Annehmen, $a_n \to a$; ein *passendes* ε wählen; Folgenglieder finden, die nicht gleichzeitig ε-nah bei a sein können.

3.1 Konvergenz · Wie findet man n_0?

Strategie für ε-n_0-Beweise *(Schmierzettel → Reinschrift)*: 1. Grenzwert *raten*. 2. $|a_n - a|$ *vereinfachen*. 3. *Grob* nach oben *abschätzen*, z. B. durch $\frac{C}{n}$. 4. n_0 wählen.

Beispiel. $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n}$.

1. Für große n ist $a_n \approx \frac{2n^2}{n^2} = 2$. Vermutung: $a = 2$.
2. $|a_n - 2| = \left|\dfrac{2n^2+1-2n^2-2n}{n^2+n}\right| = \dfrac{2n-1}{n^2+n}$ *(für $n \geq 1$ ist $2n-1 > 0$)*.
3. Zähler vergrößern, Nenner verkleinern: $\dfrac{2n-1}{n^2+n} \leq \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$. *Nicht exakt nach n auflösen – abschätzen!*
4. $\frac{2}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon}$. Wähle also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ *(Archimedes)*.

Reinschrift: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - 2| = \frac{2n-1}{n^2+n} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon. \qquad \square$$

Mit den Rechenregeln (Satz 3.1.16, 3.1.23) geht das gleich viel schneller – aber diese Regeln beweist man genau so.

3.1 Konvergenz · Übung

Übung: Konvergenz mit der Definition. *(5–7 Minuten)*

(1) Zeigen Sie mit der Definition: $\dfrac{3n-1}{n+2} \to 3$.

Geben Sie ein konkretes n_0 für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ an.

(2) Zeigen Sie mit der Definition: $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

(3) Wahr oder falsch? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

(a) Aus $a_n \to a$ folgt $|a_n| \to |a|$.

(b) Aus $|a_n| \to |a|$ folgt $a_n \to a$.

(c) $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$.

Tipp zu (3a): umgekehrte Dreiecksungleichung $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$ *(Lemma 2.3.8).*

3.1 Konvergenz · Auflösung der Übung

(1) $\left|\frac{3n-1}{n+2}-3\right| = \left|\frac{3n-1-3n-6}{n+2}\right| = \frac{7}{n+2} < \frac{7}{n}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 > \frac{7}{\varepsilon}$; für $n \geq n_0$ ist dann $\frac{7}{n} \leq \frac{7}{n_0} < \varepsilon$.
Für $\varepsilon = \frac{1}{10}$: $\frac{7}{n+2} < \frac{1}{10} \iff n+2 > 70 \iff n > 68$, also $n_0 = 69$. *(Mit der Abschätzung $\frac{7}{n}$: $n_0 = 71$ – auch richtig.)*

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Für $n \geq n_0$ ist $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, also $\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ *(für $x, y \geq 0$ gilt $x < y \iff x^2 < y^2$)*,
also $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. □

(3a) **Wahr.** $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. *(Das ist Lemma 3.1.31 im Buch.)*

(3b) **Falsch.** $a_n = (-1)^n$, $a = 1$: $|a_n| = 1 \to 1 = |a|$, aber (a_n) divergiert.

(3c) **Wahr.** $|a_n - 0| = |a_n| = \big||a_n| - 0\big|$ – beide Aussagen sind wörtlich gleich.

Merke: $a_n \to a \iff a_n - a \to 0 \iff |a_n - a| \to 0$. *Jede Konvergenzfrage lässt sich auf eine Folge* nichtnegativer *Zahlen mit Grenzwert 0 zurückführen.*

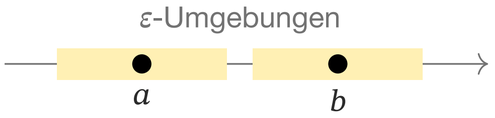
3.1 Konvergenz · Eindeutigkeit des Limes

Satz 3.1.5 (Eindeutigkeit des Limes). Konvergiert (a_n) gegen a und gegen b, so ist $a = b$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt n_1 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_1$, und n_2 mit $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_2$. Für $n = \max(n_1, n_2)$ gilt beides, also

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also $0 \leq |a - b| < \varepsilon$ für *jedes* $\varepsilon > 0$. Daher ist $|a - b| = 0$ *(sonst wähle $\varepsilon = |a - b|$)*, d. h. $a = b$. □



Für $\varepsilon \leq \frac{|a-b|}{2}$ sind die Umgebungen disjunkt – fast alle a_n können nicht in beiden liegen.

Definition 3.1.6. Ist $a_n \to a$, so heißt a der *Limes* oder *Grenzwert* der Folge, und man schreibt

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

- Der $\frac{\varepsilon}{2}$*-Trick*: Man verlangt von jedem der zwei Terme nur $\frac{\varepsilon}{2}$, damit die Summe $< \varepsilon$ wird. *Den brauchen wir ständig.*
- „$\max(n_1, n_2)$“: Endlich viele Bedingungen der Form „ab n_i“ gelten gemeinsam ab dem größten n_i.
- Achtung: „$\lim a_n$“ hinschreiben darf man erst, wenn die Konvergenz feststeht!

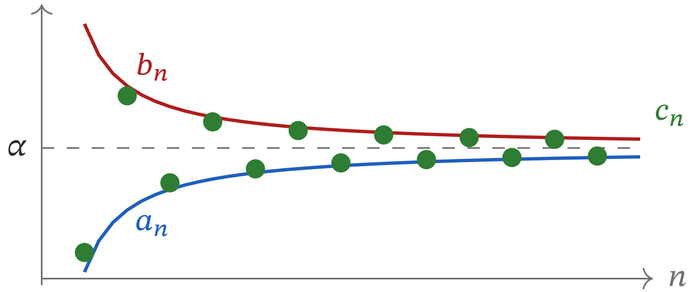
3.1 Einschließungskriterium

Satz 3.1.7 (Einschließungskriterium, „Sandwich“). Seien $a_n \to \alpha$ und $b_n \to \alpha$ *(derselbe Limes!)*.
Ist (c_n) eine Folge mit $a_n \le c_n \le b_n$ für alle $n \ge n_0$, so gilt auch $c_n \to \alpha$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_1 \ge n_0$, so dass für $n \ge n_1$ *beide* gelten:
$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ und $|b_n - \alpha| < \varepsilon$. Dann ist

$$-\varepsilon < a_n - \alpha \le c_n - \alpha \le b_n - \alpha < \varepsilon,$$

also $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_1$. □



Beispiele.

- $-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{(-1)^n}{n} \to 0.$
- $0 \le \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n}$ für $k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^k} \to 0.$
- Häufigste Form: Ist $|c_n - \alpha| \le b_n$ mit $b_n \to 0$, so folgt $c_n \to \alpha$. *(Sandwich mit $\alpha - b_n \le c_n \le \alpha + b_n$.)*

Typische Anwendung: c_n lässt sich nicht direkt ausrechnen, aber geschickt nach oben und unten abschätzen.

3.1 Konvergenz · Rationale Näherungen

Satz 3.1.8.

(a) $T \subset \mathbb{R}$ ist genau dann dicht in $\mathbb{R}$, wenn es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Folge (t_n) in T gibt mit $t_n \to x$.

(b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge rationaler Zahlen (r_n) mit $r_n \to x$.

Beweis. (a) „⇒“: Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $t_n \in T \cap (x, x + \frac{1}{n})$ *(T dicht)*. Dann ist $|t_n - x| < \frac{1}{n}$, also $t_n \to x$ *(Sandwich)*.

„⇐“: Seien $a < b$, $x = \frac{a+b}{2}$ und $t_n \to x$ in T. Zu $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ gibt es n mit $|t_n - x| < \varepsilon$, d. h. $t_n \in (a, b) \cap T$.

(b) folgt aus (a), da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist *(Satz 2.5.11)*. □

Dezimalnäherungen *(letzte Woche)*. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $d_n = \frac{[10^n x]}{10^n} \in \mathbb{Q}$ mit $0 \le x - d_n < 10^{-n}$.

Wegen $10^n \ge n$ *(Bernoulli: $10^n = (1+9)^n \ge 1 + 9n$)* ist $0 \le x - d_n < \frac{1}{n}$, also $d_n \to x$.

Für $x = \sqrt{2}$: $\quad 1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots \ \to\ \sqrt{2}$.

- Damit ist gerechtfertigt, was „$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ mit unendlich vielen Stellen“ bedeutet: Die Folge der abgebrochenen Dezimalbrüche *konvergiert* gegen $\sqrt{2}$.
- Eine Folge in $\mathbb{Q}$ kann einen Grenzwert *außerhalb* von $\mathbb{Q}$ haben.
- *Physik: Gemessene und berechnete Werte sind immer rational. Eine reelle Größe „kennen“ heißt: eine Folge rationaler Näherungen angeben können, die gegen sie konvergiert.*

3.1 Bestimmte Divergenz

Definition 3.1.9 (Teil 2). (a_n) *divergiert bestimmt gegen* $+\infty$, falls es zu jedem $T > 0$ ein n_0 gibt mit

$$a_n > T \qquad \text{für jedes } n \geq n_0.$$

(a_n) *divergiert bestimmt gegen* $-\infty$, falls $(-a_n)$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Schreibweise: $a_n \to \pm\infty$, $\lim a_n = \pm\infty$.
Man sagt auch „konvergiert gegen $\pm\infty$ *in* $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*“. Aber:* $\pm\infty$ *sind* keine *reellen Zahlen – in* $\mathbb{R}$ *ist so eine Folge divergent!*

Beispiele.

- $a_n = n \to +\infty$ *(zu* T *wähle* $n_0 > T$*: Archimedes)*; wegen $n^2 \geq n$ auch $n^2 \to +\infty$; $-\sqrt{n} \to -\infty$.
- $a_n = (-1)^n n$: $(-1, 2, -3, 4, \dots)$ ist unbeschränkt, aber *nicht* bestimmt divergent *(„unbestimmt divergent“)*.

Rechnen mit $\pm\infty$ *(Konventionen)*: Für $a \in \mathbb{R}$ ist $a + \infty = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ für $a > 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$ usw.
Nicht definiert: $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty$. Warum? Mit $a_n \to \infty$ kann alles Mögliche passieren:

$$(n+1) - n \to 1, \qquad 2n - n \to \infty, \qquad \big(n + (-1)^n\big) - n \text{ divergent}; \qquad \frac{1}{n} \cdot n \to 1, \qquad \frac{1}{n} \cdot n^2 \to \infty.$$

„Unbestimmte Ausdrücke“ $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ *muss man im Einzelfall genauer untersuchen (später: Regeln von de l’Hospital, Abschnitt 5.3).*

3.1 Nullfolgen

Definition 3.1.10. Eine Folge mit $a_n \to 0$ heißt *Nullfolge*.

Satz 3.1.11. Sei $a_n > 0$ für alle n. Dann gilt: $a_n \to 0 \iff \frac{1}{a_n} \to +\infty$.

Beweis. „⇒“: Sei $T > 0$. Zu $\varepsilon = \frac{1}{T}$ gibt es n_0 mit $0 < a_n < \frac{1}{T}$ für $n \geq n_0$. Inversenbildung *(Lemma 2.3.3 (h))*: $\frac{1}{a_n} > T$.
„⇐“: Sei $\varepsilon > 0$. Zu $T = \frac{1}{\varepsilon}$ gibt es n_0 mit $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}$ für $n \geq n_0$, also $0 < a_n < \varepsilon$. □

Beispiele. $\frac{1}{n^2} \to 0$, da $n^2 \to \infty$. $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, da $\sqrt{n} \to \infty$ *(vgl. Übung)*. $\frac{1}{n^2+5n} \to 0$.

- Die Voraussetzung $a_n > 0$ ist nötig: $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, aber $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ divergiert nicht bestimmt.
  Allgemein gilt für $a_n \neq 0$: $a_n \to 0 \iff \left|\frac{1}{a_n}\right| \to +\infty$.
- Merkregel in $[-\infty, \infty]$: „$\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$“ – als Aussage über Folgen ist das genau Satz 3.1.11.

Physik: Größen wie $\frac{1}{r}$ (Coulomb-Potential) werden beliebig groß, wenn der Abstand $r_n \to 0$ geht – und beliebig klein für $r_n \to \infty$.

3.1 Beschränkte Folgen

Definition 3.1.12. (a_n) heißt *nach oben beschränkt*, falls es $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ *(d. h. die Menge $\{a_1, a_2, \dots\}$ ist nach oben beschränkt)*; analog *nach unten beschränkt*. (a_n) heißt *beschränkt*, falls beides gilt – äquivalent: es gibt S mit $|a_n| \leq S$ für alle n.

Satz 3.1.13. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

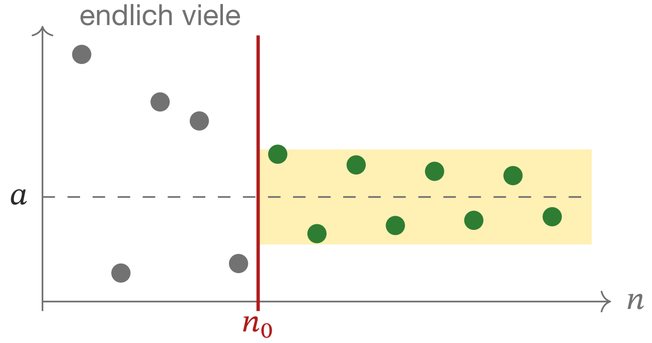
Beweis. Sei $a_n \to a$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es n_0 mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq n_0$, also

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \qquad (n \geq n_0).$$

Für die *endlich vielen* übrigen Glieder sei $M = \max\big(|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\big)$. Dann gilt für *alle* n:

$$|a_n| \leq \max\big(M,\ 1 + |a|\big).$$

□



Beispiel 3.1.14. Die Umkehrung gilt nicht: $(-1)^n$ ist beschränkt, aber divergent.

- Kontraposition: *Unbeschränkte Folgen divergieren. Z. B. $(-1)^n n$, n^2, Fibonacci-Zahlen.*
- Beweismuster: „Ab n_0 kontrolliert die Konvergenz, davor sind es nur *endlich viele* Glieder."

3.1 Konvergenz · Quiz

Quiz: Beschränkt? Konvergent? Bestimmt divergent? *(Grenzwert angeben, falls vorhanden)*

	Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	beschränkt?	konvergent?	Grenzwert bzw. $\pm\infty$
(a)	$\dfrac{(-1)^n}{n}$			
(b)	$(-1)^n + \dfrac{1}{n}$			
(c)	$\dfrac{n^2+1}{n}$			
(d)	$\left(1+(-1)^n\right) n$			
(e)	$\dfrac{1}{n} - n$			
(f)	$a_n = 1$, falls n eine Primzahl ist, sonst $a_n = 0$			
(g)	$\dfrac{[n/2]}{n}$ *(Gauß-Klammer)*			

Tipp: Schreiben Sie jeweils die ersten fünf Glieder auf.

3.1 Konvergenz · Auflösung des Quiz

	Folge	beschr.	konv.	Grenzwert	Begründung
(a)	$\frac{(-1)^n}{n}$	ja	ja	0	*Sandwich:* $-\frac{1}{n} \le a_n \le \frac{1}{n}$
(b)	$(-1)^n + \frac{1}{n}$	ja	nein	–	$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ *springt zwischen Nähe von* 1 *und* -1
(c)	$\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$	nein	nein	$+\infty$	$a_n \ge n$
(d)	$(1 + (-1)^n)n$	nein	nein	–	$0, 4, 0, 8, 0, 12, \ldots$ *unbeschränkt, aber immer wieder* 0
(e)	$\frac{1}{n} - n$	nein	nein	$-\infty$	$-a_n = n - \frac{1}{n} \ge n - 1$
(f)	Primzahl-Indikator	ja	nein	–	*unendlich viele Primzahlen* und *Nicht-Primzahlen*
(g)	$\frac{[n/2]}{n}$	ja	ja	$\frac{1}{2}$	$\frac{n}{2} - 1 < [\frac{n}{2}] \le \frac{n}{2}$, *also* $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < a_n \le \frac{1}{2}$

- **(b), (d), (f)** Divergenz zeigt man wie bei $(-1)^n$: Es gibt zwei Werte, denen die Folge *immer wieder* nahekommt. *(Am Mittwoch eleganter mit* Teilfolgen*.)*
- **(f)** Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen. Also ist $a_n = 1$ für unendlich viele n und $a_n = 0$ für unendlich viele n (z. B. alle geraden $n \ge 4$).
- **(g)** Typischer Einsatz der Gauß-Klammer: $x - 1 < [x] \le x$ und dann Sandwich.

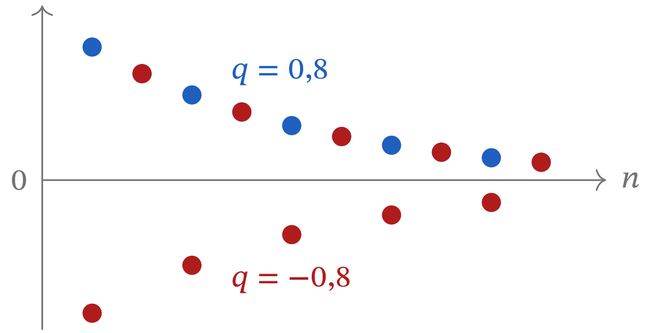
3.1 Die geometrische Folge q^n

Satz 3.1.15. (a) Ist $q > 1$, so gilt $q^n \to +\infty$. (b) Ist $|q| < 1$, so gilt $q^n \to 0$.

Beweis. (a) Schreibe $q = 1 + h$ mit $h > 0$. Bernoulli *(letzte Woche)*: $q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$.
Zu $T > 0$ wähle $n_0 > \frac{T}{h}$ *(Archimedes)*. Für $n \geq n_0$: $q^n \geq 1 + nh > nh \geq n_0 h > T$.
(b) Für $q = 0$ klar. Sonst ist $\frac{1}{|q|} > 1$, also $\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \to +\infty$ nach (a), also $|q^n| = |q|^n \to 0$ nach Satz 3.1.11. □

Alle Fälle:

$q > 1$	$q^n \to +\infty$
$q = 1$	$q^n = 1 \to 1$
$-1 < q < 1$	$q^n \to 0$
$q = -1$	divergent, beschränkt
$q < -1$	divergent, unbeschränkt, *nicht* bestimmt divergent



Wie schnell? $(\frac{1}{2})^{10} \approx 10^{-3}$, $(\frac{1}{2})^{20} \approx 10^{-6}$: *Jeder Schritt halbiert den Abstand – „exponentiell schnell“, viel schneller als* $\frac{1}{n}$.

3.1 Geometrische Folge · Physik

Physik: Radioaktiver Zerfall. Nach jeder Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist die Hälfte der Kerne übrig: $N_n = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^n$ nach n Halbwertszeiten, also $N_n \to 0$.
Wann ist weniger als $1\,\%$ übrig? $(\frac{1}{2})^n < \frac{1}{100} \iff 2^n > 100 \iff n \geq 7$ *($2^6 = 64$, $2^7 = 128$).*
Iod-131 ($T_{1/2} \approx 8$ Tage): nach etwa 8 Wochen ist weniger als $1\,\%$ übrig.

Physik: Springender Ball. Bei jedem Aufprall bleibt der Anteil $q \in (0,1)$ der Höhe erhalten: $h_n = h_0\, q^n \to 0$.
Die Dauer des n-ten Sprungs ist proportional zu $\sqrt{h_n} = \sqrt{h_0}\,(\sqrt{q})^n$ – wieder geometrisch. Ob die Gesamtdauer *unendlich vieler Sprünge endlich ist, klären die* Reihen *(Abschnitt 3.4, nächste Woche).*

Physik: Gedämpfte Schwingung. Amplitude nach jeder Periode: $A_n = A_0\, q^n$ mit $0 < q < 1$.
Das logarithmische Dekrement $\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = -\ln q$ (Logarithmus: Kapitel 4) misst die Dämpfung.

Vergleich der Geschwindigkeiten: Für $\varepsilon = 10^{-6}$ braucht

$$\frac{1}{n} < 10^{-6} : \quad n_0 = 10^6 + 1, \qquad (\tfrac{1}{2})^n < 10^{-6} : \quad n_0 = 20 \quad (2^{20} = 1\,048\,576).$$

3.1 Rechenregeln

Satz 3.1.16 (Summe und Produkt). Seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt

(a) $a_n + b_n \to a + b$, (b) $a_n b_n \to ab$.

Insbesondere: $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Kurz: $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$, $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
Lineare Algebra: Die konvergenten Folgen bilden einen Untervektorraum von Abb$(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, *und* lim *ist eine* lineare *Abbildung nach* $\mathbb{R}$.

Beispiel 3.1.17. $\frac{1}{n^k} = \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n} \to 0 \cdots 0 = 0$, also $c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_s}{n^s} \to c_0$.

Definition 3.1.18. Eine *Polynomfunktion* ist $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s$ mit $a_0, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$.

Korollar 3.1.19. Ist f eine Polynomfunktion und $x_n \to a$, so gilt $f(x_n) \to f(a)$. *(Wiederholte Anwendung von (a), (b).)*
Polynome sind also „folgenstetig“ – ein Vorbote der Stetigkeit in Kapitel 4.

Achtung: Die Regeln setzen voraus, dass *beide* Grenzwerte existieren!

- $a_n = n$, $b_n = -n$: $a_n + b_n = 0 \to 0$, aber „$\lim a_n + \lim b_n$“ ist sinnlos.
- $a_n = b_n = (-1)^n$: $a_n b_n = 1 \to 1$, obwohl (a_n) und (b_n) divergieren.
- Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, so ist $(a_n + b_n)$ divergent *(sonst wäre $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ konvergent)*.

3.1 Rechenregeln · Beweis

Beweis von Satz 3.1.16. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) *Trick: eine geschickte Null addieren.*

$$a_n b_n - ab \;=\; a_n b_n \underbrace{- a_n b + a_n b}_{=0} - ab \;=\; a_n(b_n - b) + (a_n - a)\, b.$$

Konvergente Folgen sind beschränkt *(Satz 3.1.13)*: Es gibt $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle n und $|b| \leq M$. Also

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| \leq M\big(|b_n - b| + |a_n - a|\big).$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle n_0 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n \geq n_0$. Dann ist $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$. □

- Beide Beweise folgen dem Muster: *Differenz zum Grenzwert durch bekannte Nullfolgen abschätzen.*
- Der Trick „$-a_n b + a_n b$“ ist derselbe wie bei der Fehlerfortpflanzung letzte Woche *($xy - \tilde{x}\tilde{y}$)*: Konvergenz eines Produkts *ist* Fehlerfortpflanzung mit Fehlern $\to 0$.

3.1 Rechenregeln · Quotienten

Lemma 3.1.22. Konvergente Folgen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ haben genau dann denselben Grenzwert, wenn $a_n - b_n \to 0$.
(Denn $a - b = \lim(a_n - b_n)$.)

Satz 3.1.23 (Quotient). Seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$ mit $b \neq 0$. Dann gibt es n_0 mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, und

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \qquad (n \geq n_0).$$

Beweis. Zu $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ gibt es n_0 mit $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für $n \geq n_0$. Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$|b_n| \;\geq\; |b| - |b - b_n| \;>\; |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \qquad \textit{(die } b_n \textit{ bleiben von } 0 \textit{ weg)}.$$

Damit gilt für $n \geq n_0$:

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \frac{|b - b_n|}{|b_n|\,|b|} \leq \frac{2}{|b|^2}\,|b_n - b| \;\to\; 0,$$

also $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ *(Sandwich)*. Mit der Produktregel: $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. □

Für $b = 0$ ist keine allgemeine Aussage möglich: $\frac{1/n}{1/n} \to 1$, $\frac{1/n}{1/n^2} = n \to \infty$, $\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0$ *(„$\frac{0}{0}$“ ist unbestimmt).*

3.1 Rechenregeln · Brüche von Polynomen

Beispiel 3.1.24. $a_n = \dfrac{3n^2+7n}{n^2+5}$. Zähler und Nenner divergieren – Satz 3.1.23 ist nicht direkt anwendbar.

Trick: Mit $\frac{1}{n^2}$ erweitern *(höchste Potenz des Nenners ausklammern)*:

$$a_n = \frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{5}{n^2}} \;\to\; \frac{3+0}{1+0} = 3.$$

Allgemein: Für $f(x) = a_p x^p + \cdots + a_0$ und $g(x) = b_q x^q + \cdots + b_0$ mit $a_p, b_q \neq 0$ gilt *(nachrechnen!)*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0, & p < q, \\ \dfrac{a_p}{b_q}, & p = q, \\ +\infty \text{ bzw. } -\infty \text{ (Vorzeichen von } a_p/b_q), & p > q. \end{cases}$$

„Für große n gewinnt die höchste Potenz."

Beispiele. $\dfrac{n^3-1}{4n^3+n} \to \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{5n+2}{n^2-3} \to 0$, $\dfrac{1-n^4}{2n^2+1} \to -\infty$, $\dfrac{(2n+1)^3}{n^3} = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^3 \to 8$.

Physik: Grenzverhalten für große Parameter („führende Ordnung") bestimmt man genau so, z. B. für große Abstände oder hohe Energien.

3.1 Rechenregeln · Übung

Übung: Grenzwerte berechnen. *(5–7 Minuten)* Bestimmen Sie die Grenzwerte und begründen Sie mit den Rechenregeln.

(a) $\dfrac{(n+1)(2n-3)}{n^2+4n}$ (b) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5$ (c) $\dfrac{n^2+(-1)^n\,n}{n^2+1}$ (d) $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

Wo steckt der Fehler?

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\infty\cdot 0=0.$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}_{n\text{ Summanden}}=\lim\dfrac{1}{n}+\lim\dfrac{1}{n}+\cdots+\lim\dfrac{1}{n}=0+0+\cdots+0=0.$

3.1 Rechenregeln · Auflösung der Übung

(a) $\dfrac{(n+1)(2n-3)}{n^2+4n} = \dfrac{2n^2-n-3}{n^2+4n} = \dfrac{2-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n}} \to \dfrac{2}{1} = 2.$

(b) $1+\frac{1}{n} \to 1$, also nach Korollar 3.1.19 mit $f(x) = x^5$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \to 1^5 = 1.$

Aber Vorsicht: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *– Exponent wächst mit! Dort ist die Antwort* nicht 1 *(Mittwoch, Zum Mitdenken).*

(c) $\dfrac{n^2+(-1)^n n}{n^2+1} = \dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to \dfrac{1+0}{1+0} = 1$ *(mit* $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ *aus dem Sandwich-Beispiel).*

(d) Dreieckszahlen: $\dfrac{n(n+1)/2}{n^2} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to \dfrac{1}{2}.$

(e) Die Produktregel gilt nur, wenn *beide* Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren; (n) divergiert. Richtig: $n \cdot \frac{1}{n} = 1 \to 1.$

„$\infty \cdot 0$“ ist ein unbestimmter Ausdruck.

(f) Die Summenregel gilt für eine *feste* Anzahl von Summanden. Hier wächst die Anzahl mit n.

Richtig: $n \cdot \frac{1}{n} = 1 \to 1.$ *Bei solchen Summen hilft oft Abschätzen jedes Summanden nach oben und unten – und dann Sandwich.*

Zusammenfassung · Montag

Das sollten Sie nach heute können:

- Die Definition der Konvergenz aufschreiben, in Worten erklären *(„fast alle Glieder in jeder ε-Umgebung“)* und verneinen.
- Konvergenz mit ε und n_0 nachweisen *(raten – vereinfachen – abschätzen – n_0 wählen)*; Divergenz beweisen.
- Eindeutigkeit des Limes, Einschließungskriterium, Beschränktheit konvergenter Folgen; $\frac{\varepsilon}{2}$-Trick.
- Bestimmte Divergenz; erklären, warum $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty$ nicht definiert sind.
- q^n in allen Fällen; Rechenregeln für Summe, Produkt, Quotient – *und ihre Voraussetzungen*.

Zum Mitdenken bis Mittwoch:

(1) Finden Sie Folgen $a_n \to +\infty$ und $b_n \to 0$ mit (i) $a_n b_n \to 5$, (ii) $a_n b_n \to +\infty$, (iii) $(a_n b_n)$ beschränkt, aber divergent.

(2) Zeigen Sie: Ist (a_n) beschränkt und $b_n \to 0$, so gilt $a_n b_n \to 0$. *(Warum hilft die Produktregel hier nicht?)*

(3) Wahr oder falsch: Ist $a_n > 0$ für alle n und $a_n \to a$, so ist $a > 0$.

Nächstes Mal: Monotone Folgen, Cauchy-Folgen, Intervallschachtelung, Abzählbarkeit, Teilfolgen, Bolzano–Weierstraß.



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Kapitel 3: Folgen und Reihen

Monotone Folgen · Cauchy-Folgen · Intervallschachtelung · Abzählbarkeit · Teilfolgen · Bolzano–Weierstraß

Rückblick · Zum Mitdenken

Auflösung „Zum Mitdenken“ vom Montag.

(1) (i) $a_n = n,\ b_n = \frac{5}{n}$: $a_n b_n = 5 \to 5$. (ii) $a_n = n^2,\ b_n = \frac{1}{n}$: $a_n b_n = n \to +\infty$.

(iii) $a_n = n,\ b_n = \frac{(-1)^n}{n}$: $a_n b_n = (-1)^n$ – beschränkt, aber divergent.

„$\infty \cdot 0$“ kann also alles *sein – deshalb ist es nicht definiert.*

(2) Sei $|a_n| \le S$ für alle n. Dann gilt

$$-S|b_n| \ \le\ a_n b_n \ \le\ S|b_n|,$$

und $\pm S|b_n| \to 0$ *(Produktregel mit der konstanten Folge S)*. Sandwich: $a_n b_n \to 0$. □

Die Produktregel ist nicht anwendbar, weil (a_n) nicht konvergieren muss. Beispiel: $(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \to 0$.

Merke: beschränkt mal Nullfolge ist Nullfolge.

(3) **Falsch:** $a_n = \frac{1}{n} > 0$, aber $\lim a_n = 0$. Richtig ist nur $a \ge 0$ – das ist der erste Satz heute.

3.1 Monotonie des Limes

Satz 3.1.25 (Monotonie des Limes). Seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$, und es gebe n_0 mit $a_n \le b_n$ für alle $n \ge n_0$. Dann gilt

$$a \le b.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für n groß genug *($n \ge n_0$ und $|a_n - a|, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$)* gilt

$$a = a_n + (a - a_n) \le b_n + (a - a_n) = b + (b_n - b) + (a - a_n) < b + \varepsilon.$$

Wäre $a > b$, so ergäbe $\varepsilon = a - b$ den Widerspruch $a < b + (a - b) = a$. Also ist $a \le b$. □

- Spezialfälle: $a_n \le S$ für alle $n \Rightarrow \lim a_n \le S$; $a_n \ge 0$ für alle $n \Rightarrow \lim a_n \ge 0$.
- **Achtung:** Aus $a_n < b_n$ folgt nur $a \le b$, *nicht* $a < b$: $0 < \frac{1}{n}$, aber $\lim 0 = 0 = \lim \frac{1}{n}$.
  „Beim Grenzübergang werden strikte Ungleichungen zu $\le$."
- Ist $a_n \in [c, d]$ für alle n, so ist auch $\lim a_n \in [c, d]$: Abgeschlossene Intervalle sind „grenzwertstabil", offene nicht *($\frac{1}{n} \in (0,1)$ für $n \ge 2$, aber der Limes $0 \notin (0,1)$)*.

Physik: Erfüllt jede Messung $a_n \le S$ (z. B. eine Energie unterhalb einer Schranke), so auch der Grenzwert – aber eine echte *Ungleichung kann im Limes zur Gleichheit werden.*

3.1 Rechenregeln · Wurzeln

Lemma (Wurzel und Limes). Seien $a_n \geq 0$ und $a_n \to a$. Dann gilt $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

(Nach Satz 3.1.25 ist $a \geq 0$, also $\sqrt{a}$ definiert.)

Beweis. Fall $a > 0$: Mit $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$ *(dritte binomische Formel)* ist

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |a_n - a| \ \to \ 0.$$

Fall $a = 0$: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es n_0 mit $a_n < \varepsilon^2$ für $n \geq n_0$, also $\sqrt{a_n} < \varepsilon$. □

Erweitern mit der „Konjugierten“. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist vom Typ „$\infty - \infty$“. Aber

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \ \to \ 0.$$

Beispiel: $\sqrt[n]{a} \to 1$ für jedes $a > 0$. Sei zuerst $a \geq 1$. Dann ist $\sqrt[n]{a} \geq 1$; setze $h_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$. Bernoulli:

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + n h_n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq h_n \leq \frac{a-1}{n} \ \to \ 0.$$

Für $0 < a < 1$ ist $\frac{1}{a} > 1$, also $\sqrt[n]{a} = 1 \big/ \sqrt[n]{1/a} \to \frac{1}{1} = 1$ *(Quotientenregel)*. □

3.1 Monotone Folgen

Definition 3.1.26. (a_n) heißt *monoton wachsend*, falls $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und *monoton fallend*, falls $a_n \ge a_{n+1}$ für alle n. *Monoton* heißt: monoton wachsend oder monoton fallend. *(Mit $<$ bzw. $>$:* streng *monoton.)*

Wie prüft man Monotonie?

- *Differenz:* $a_{n+1} - a_n \ge 0 \Rightarrow$ wachsend.
  Bsp.: $a_n = \frac{n}{n+1}$: $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.
- *Quotient* (nur für $a_n > 0$): $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \Rightarrow$ fallend.
  Bsp.: $a_n = \frac{n!}{n^n}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \le 1$.
- *Induktion,* v. a. bei rekursiv definierten Folgen *(gleich: Heron-Verfahren)*.

Beispiele. wachsend: n^2, $1 - \frac{1}{n}$, Fibonacci f_n $(f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \ge 0)$; fallend: $\frac{1}{n}$, q^n für $0 < q < 1$;
nicht monoton: $(-1)^n$, $\frac{(-1)^n}{n}$ *(obwohl konvergent)*.

Monotonie muss nicht ab $n = 1$ gelten: „monoton ab n_0" genügt für Konvergenzfragen – endlich viele Glieder ändern nichts an Konvergenz und Grenzwert.

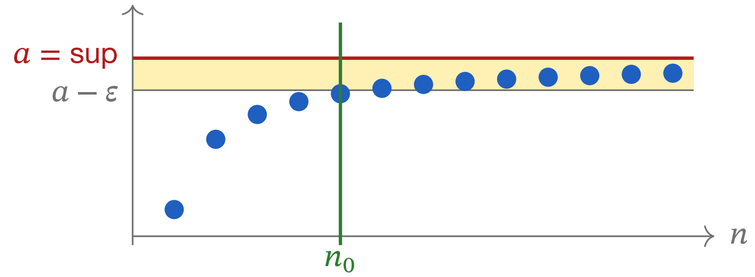
3.1 Monotone Konvergenz

Satz 3.1.27 (Monotone Konvergenz). Sei (a_n) monoton. Ist (a_n) beschränkt, so konvergiert (a_n) in $\mathbb{R}$.
Ist (a_n) unbeschränkt, so divergiert (a_n) bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$.
Genauer: (a_n) wachsend und beschränkt $\Rightarrow$ $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. O. B. d. A. ist (a_n) wachsend *(sonst betrachte $-a_n$)*.
Unbeschränkt: Zu T gibt es n_0 mit $a_{n_0} > T$, wegen der Monotonie also $a_n \geq a_{n_0} > T$ für alle $n \geq n_0$.
Beschränkt: Nach dem *Supremumsaxiom* existiert $a = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$.
Sei $\varepsilon > 0$. $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke, also gibt es n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$.
Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a,$$

also $|a_n - a| < \varepsilon$. □



- Erster Konvergenzsatz, der Konvergenz liefert, *ohne den Grenzwert vorher zu kennen*.
- Hier steckt die *Vollständigkeit* von $\mathbb{R}$: In $\mathbb{Q}$ ist der Satz falsch – $1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \dots$ ist wachsend und beschränkt, hat aber keinen Limes in $\mathbb{Q}$.

3.1 Monotone Konvergenz · Heron-Verfahren

Heron-Verfahren für $\sqrt{2}$. $\quad x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$

Idee: Ist $x > \sqrt{2}$, so ist $\frac{2}{x} < \sqrt{2}$ – der Mittelwert der beiden ist eine bessere Näherung. (Babylonier, ca. 1700 v. Chr.)

1. **Wohldefiniert, $x_n > 0$:** Induktion: $x_1 = 2 > 0$, und $x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 0$.

2. **$x_n^2 \geq 2$ für alle n:** $x_1^2 = 4$, und

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 4 + \frac{4}{x_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2 \geq 0.$$

3. **Monoton fallend:** $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \geq 0$ *(nach 1. und 2.)*.

4. **Konvergenz:** (x_n) ist fallend und durch 0 nach unten beschränkt $\Rightarrow$ $x_n \to x$ *(Satz 3.1.27)*.

5. **Grenzwert:** Aus $x_n^2 \geq 2$ folgt $x^2 \geq 2$ *(Satz 3.1.25)*, also $x \geq \sqrt{2} > 0$. Mit $x_{n+1} \to x$ und den Rechenregeln:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \iff 2x^2 = x^2 + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \quad (\text{da } x > 0).$$

3.1 Heron-Verfahren · Numerik

Die ersten Glieder:

n	x_n	$x_n - \sqrt{2}$
1	2	$5{,}9 \cdot 10^{-1}$
2	$3/2 = 1{,}5$	$8{,}6 \cdot 10^{-2}$
3	$17/12 = 1{,}41\underline{6}\,666\ldots$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$
4	$577/408 = 1{,}414215\,\underline{6}\,86\ldots$	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$
5	$665\,857/470\,832 = 1{,}41421356237\underline{4}\ldots$	$1{,}6 \cdot 10^{-12}$
6		$9{,}0 \cdot 10^{-25}$

- Alle x_n sind *rational*, der Grenzwert nicht.
- Fehlerformel *(nachrechnen!)*:

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}.$$

  Quadratische Konvergenz: Die Zahl der richtigen Stellen *verdoppelt* sich in jedem Schritt.
- *Heron ist das Newton-Verfahren für $f(x) = x^2 - 2$ (Kapitel 5). So berechnen Taschenrechner Wurzeln.*

Vorsicht beim „Fixpunkt-Trick“ *(Grenzübergang in der Rekursion)*: Er setzt voraus, dass der Grenzwert *existiert*!
$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$: „$a = 2a$, also $a = 0$“ – **falsch**, denn $a_n = 2^{n-1} \to +\infty$.
Reihenfolge also immer: erst Konvergenz zeigen (z. B. monoton + beschränkt), dann Grenzwert aus der Fixpunktgleichung.

3.1 Monotone Konvergenz · Übung

Übung: Monotone Konvergenz. *(5–7 Minuten)*

(1) Sei $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$. Berechnen Sie a_2, a_3, a_4.
Zeigen Sie: $a_n \leq 2$ für alle n, und (a_n) ist monoton wachsend. Bestimmen Sie $\lim a_n$.

(2) Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie, dass (s_n) konvergiert.

Tipp: Für $k \geq 2$ ist $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

(3) Wahr oder falsch?
(a) Jede konvergente Folge ist monoton.
(b) Ist (a_n) wachsend und $a_n \to a$, so ist $a_n \leq a$ für alle n.

3.1 Monotone Konvergenz · Auflösung der Übung

(1) $a_2 = 1,\ a_3 = \frac{3}{2},\ a_4 = \frac{7}{4}$. *Schranke* (Induktion): $a_1 = 0 \le 2$; aus $a_n \le 2$ folgt $a_{n+1} \le \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$.
Monotonie: $a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}(2 - a_n) \ge 0$. Also konvergiert $a_n \to a$, und $a = \frac{1}{2}a + 1 \iff a = 2$.
Explizit: $a_n = 2 - 2^{2-n}$ *(Induktion) – der Abstand zum Grenzwert halbiert sich in jedem Schritt.*

(2) (s_n) ist wachsend $(s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0)$. *Beschränkt* mit der *Teleskopsumme*:

$$s_n \le 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Nach Satz 3.1.27 konvergiert (s_n), mit Grenzwert ≤ 2. *(Euler: Der Grenzwert ist* $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$ *– Fourier-Reihen, Kapitel 7.)*

(3a) **Falsch:** $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$, aber nicht monoton.

(3b) **Wahr:** Nach dem Beweis von Satz 3.1.27 ist $a = \sup\{a_n\}$. *Oder: Für festes* m *ist* $a_m \le a_n$ *für alle* $n \ge m$, *also* $a_m \le \lim_n a_n = a$ *(Satz 3.1.25).*

(2) ist unsere erste Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$*: eine Folge von Partialsummen. Darum geht es nächste Woche.*

3.1 Monotone Konvergenz · Physik

Physik: Annäherung an ein Gleichgewicht. Viele Prozesse, in festen Zeitschritten betrachtet, folgen einer Rekursion

$$a_{n+1} = q\,a_n + c \qquad \text{mit } 0 < q < 1.$$

- *Abkühlung* (Newton): Pro Minute verringert sich der Abstand zur Raumtemperatur T_U um einen festen Anteil: $T_{n+1} - T_U = q\,(T_n - T_U)$, also $T_{n+1} = q\,T_n + (1-q)T_U$.
- *Kondensator laden*: Spannung nach jeweils einer Zeitkonstante $U_{n+1} = e^{-1}\,U_n + (1 - e^{-1})\,U_0$.
- Die Übung (1) eben: $q = \frac{1}{2},\ c = 1$.

Lösung: Der *Fixpunkt* $a^* = qa^* + c$ ist $a^* = \frac{c}{1-q}$. Subtrahieren gibt $a_{n+1} - a^* = q\,(a_n - a^*)$, also

$$a_n - a^* = q^{n-1}\,(a_1 - a^*) \;\to\; 0 \qquad \text{(Satz 3.1.15).}$$

Also $a_n \to a^* = \frac{c}{1-q}$ für *jeden* Startwert a_1 – monoton von unten ($a_1 < a^*$) oder von oben ($a_1 > a^*$).

Der Abstand zum Gleichgewicht ist eine geometrische *Folge – das ist der diskrete Vorläufer der Exponentialfunktion $e^{-t/\tau}$ (Kapitel 4 und Differentialgleichungen, Kapitel 11).*