


UNIVERSITÄT
LEIPZIG

# Kapitel 1: Mengentheoretische Grundlagen

## Kartesisches Produkt · Relationen · Äquivalenzrelationen · Äquivalenzklassen · Restklassen

# **Rückblick** · Zum Mitdenken

**Auflösung „Zum Mitdenken“ vom Mittwoch.**

**(1)** $f : (0,1) \to (1,3),\ f(x) = 2x+1$ ist wohldefiniert: $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < 2x+1 < 3$.
Kandidat für die Umkehrabbildung: $g : (1,3) \to (0,1),\ g(y) = \frac{y-1}{2}$. Prüfe *beide* Gleichungen:

$$g\big(f(x)\big) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x, \qquad f\big(g(y)\big) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y.$$

Also ist $f$ bijektiv mit $f^{-1} = g$ *(Satz 1.3.5)*.

**(2)** $f : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1$ (Vertauschung) und $g \equiv 1$ (konstant). Dann ist

$$f \circ g \equiv 2, \qquad g \circ f \equiv 1, \qquad \text{also} \quad f \circ g \neq g \circ f.$$

**(3)** $f(x) = x^3 + 1$ ist bijektiv mit $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$, denn

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = (y-1)+1 = y, \qquad f^{-1}\big(f(x)\big) = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

*Dass jede reelle Zahl eine dritte Wurzel besitzt, ist gar nicht selbstverständlich: Es beruht auf der* Vollständigkeit *von* $\mathbb{R}$ *– dem Ziel dieser Woche (Kapitel 2).*

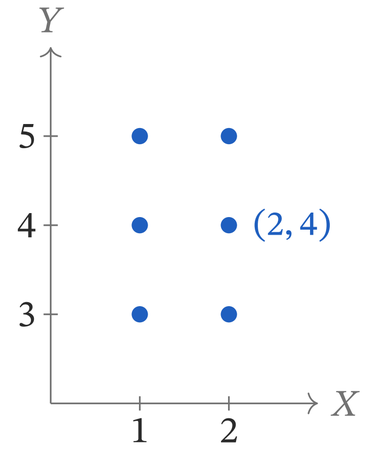
# 1.4 Kartesisches Produkt

**Kartesisches Produkt.** Für Mengen $X, Y$ ist

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

die Menge aller *geordneten Paare*. Dabei gilt

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ und } y = y'.$$




$2 \cdot 3 = 6$ *Punkte*

**Beispiele 1.4.1.**

- $\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$.
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ist die *kartesische Ebene*.

- *Reihenfolge zählt:* $(1, 3) \neq (3, 1)$, und im Allgemeinen ist $X \times Y \neq Y \times X$.
- Sind $X, Y$ endlich, so gilt $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.
- Genauso: $X \times Y \times Z = \{(x, y, z) : x \in X, y \in Y, z \in Z\}$, z. B. der Ortsraum $\mathbb{R}^3$.

*Physik: Ein Ereignis ist ein Punkt $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (Raumzeit); der Zustand eines Teilchens ist ein Punkt $(\vec{x}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (Phasenraum).*

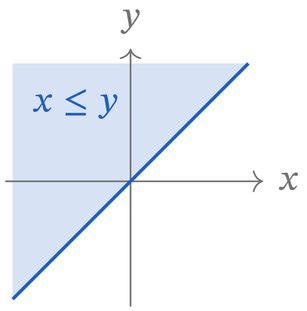
# 1.4 Relationen

**Definition 1.4.2.** Sei $X$ eine Menge. Eine *Relation* auf $X$ ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$.
Man schreibt $x \sim_R y$ oder einfach $x \sim y$, falls $(x, y) \in R$.

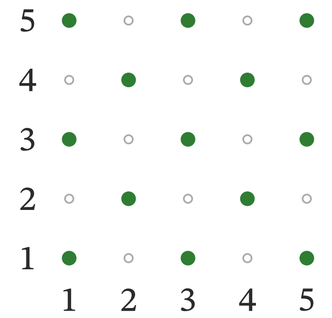
*Eine Relation legt also fest,* welche Paare *„in Beziehung stehen“.*

**Beispiele 1.4.3.**

- Auf der Menge aller Menschen:
  $x \sim y \iff x$ ist Vetter von $y$.
- Auf $\mathbb{R}$ die „kleiner-gleich-Relation“:
  $x \sim y \iff x \leq y$.
- Auf $\mathbb{Z}$ die *Parität*:
  $x \sim y \iff x - y$ ist gerade.
- Auf jeder Menge die *Gleichheit*:
  $R = \{(x, x) : x \in X\}$ *(die „Diagonale“)*.



$R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



*Parität auf* $\{1, \dots, 5\}$

# 1.4 Äquivalenzrelationen

**Definition 1.4.4.** Eine Relation $\sim$ auf $X$ heißt *Äquivalenzrelation*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

| | |
|---|---|
| $x \sim x$ | *Reflexivität* |
| $x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x$ | *Symmetrie* |
| $x \sim y,\ y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z$ | *Transitivität* |

Gilt $x \sim y$, so sagt man: $x$ ist *äquivalent* zu $y$. *Idee: „gleich bis auf Unterschiede, die uns nicht interessieren“.*

**Beispiele 1.4.5.**

- Die Vetter-Relation ist *keine* Äquivalenzrelation: Niemand ist sein eigener Vetter *(nicht reflexiv)*; und ist $x$ Vetter von $y$ und $y$ Vetter von $z$, muss $x$ nicht Vetter von $z$ sein.
- $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist *keine* Äquivalenzrelation: $0 \leq 1$, aber $1 \not\leq 0$ *(nicht symmetrisch)*.
- Die Parität auf $\mathbb{Z}$ *ist* eine Äquivalenzrelation:

  *reflexiv*: $x - x = 0$ ist gerade; *symmetrisch*: $y - x = -(x - y)$ ist gerade, wenn $x - y$ es ist;

  *transitiv*: $x - z = (x - y) + (y - z)$ ist als Summe gerader Zahlen gerade. □

# 1.4 Äquivalenzrelationen · Quiz

**Quiz: Reflexiv? Symmetrisch? Transitiv?**

| | Relation | reflexiv | symm. | transitiv | Äq.-Rel.? |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $x \sim y \iff x < y$ auf $\mathbb{R}$ | | | | |
| (b) | $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ | | | | |
| (c) | $x \sim y \iff \lvert x - y \rvert < 1$ auf $\mathbb{R}$ *(„ungefähr gleich“)* | | | | |
| (d) | $x \sim y \iff x \cdot y > 0$ auf $\mathbb{R}$ | | | | |
| (e) | $g \sim h \iff g \parallel h$ auf der Menge der Geraden in der Ebene | | | | |
| (f) | $R = \emptyset$ auf einer Menge $X \neq \emptyset$ | | | | |

*Tipp: Zum Widerlegen genügt jeweils* ein *Gegenbeispiel – bei der Transitivität also drei Elemente $x, y, z$ mit $x \sim y$, $y \sim z$, aber $x \nsim z$.*

# 1.4 Äquivalenzrelationen · Auflösung des Quiz

| | Relation | refl. | symm. | trans. | Begründung |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $x < y$ | nein | nein | ja | $0 \not< 0$; $0 < 1$, *aber* $1 \not< 0$ |
| (b) | $x - y \in \mathbb{Z}$ | ja | ja | ja | *wie bei der Parität:* $x - z = (x - y) + (y - z)$ |
| (c) | $\lvert x - y \rvert < 1$ | ja | ja | nein | $0 \sim 0{,}6$, $0{,}6 \sim 1{,}2$, *aber* $0 \nsim 1{,}2$ |
| (d) | $xy > 0$ | nein | ja | ja | $0 \cdot 0 = 0$; $xy > 0$, $yz > 0 \Rightarrow$ *gleiche Vorzeichen* |
| (e) | $g \parallel h$ | ja | ja | ja | *Klassen = Richtungen* |
| (f) | $R = \varnothing$ | nein | ja | ja | *Voraussetzung nie erfüllt – „leer wahr“* |

Äquivalenzrelationen sind also genau **(b)** und **(e)**.

- **(c)** „Ungefähr gleich“ ist *nicht* transitiv: Viele kleine Abweichungen summieren sich zu einer großen. *Physik: Messwerte, die jeweils im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen, können insgesamt weit auseinanderliegen.*
- **(d)** Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $xy > 0$ eine Äquivalenzrelation *(„gleiches Vorzeichen“)*. Die Grundmenge zählt!
- **(f)** Symmetrie und Transitivität sind „Wenn–dann“-Aussagen – sie sind wahr, wenn das „Wenn“ nie eintritt.

# 1.4 Äquivalenzklassen

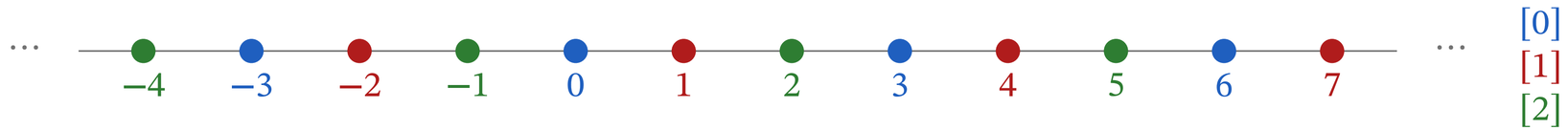
**Definition 1.4.6.** Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Für $x \in X$ heißt

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

die *Äquivalenzklasse* von $x$. Jedes $y \in [x]$ nennt man einen *Repräsentanten* der Klasse.

**Parität auf $\mathbb{Z}$.** $[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ (gerade Zahlen), $[1] = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ (ungerade Zahlen).
Dabei ist $[0] = [2] = [-4] = \dots$ und $[1] = [3] = [-1] = \dots$ – es gibt nur *zwei* verschiedene Klassen.

**Reste modulo 3.** Auf $\mathbb{Z}$ sei $x \sim y \iff x - y$ ist durch $3$ teilbar. Drei Klassen $[0], [1], [2]$:




*Alltag: Uhrzeiten rechnen „modulo 12“ bzw. „modulo 24“: 3 Uhr und 15 Uhr zeigen dieselbe Zeigerstellung.*

# 1.4 Äquivalenzklassen · Zerlegung in Klassen

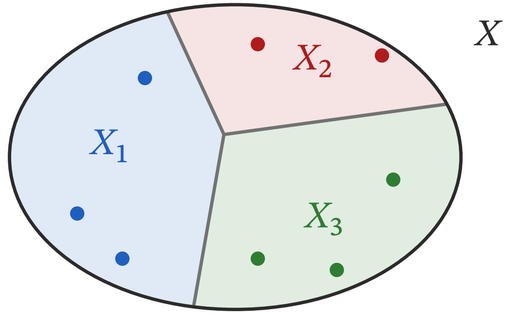
**Proposition 1.4.7.** Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$, so zerfällt $X$ in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen.
Ist umgekehrt eine disjunkte Zerlegung

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

gegeben, so definiert

$$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ liegen in derselben Menge } X_i$$

eine Äquivalenzrelation, deren Klassen genau die $X_i$ sind.




**Merke:** Eine Äquivalenzrelation auf $X$ ist *dasselbe* wie eine Zerlegung von $X$ in disjunkte Teilmengen.

- Parität: $\mathbb{Z} = \{\text{gerade Zahlen}\} \sqcup \{\text{ungerade Zahlen}\}$.
- Parallelität: Menge der Geraden $= \bigsqcup$ (Geraden mit fester Richtung).

*Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnet man mit $X/\sim$ („$X$ modulo $\sim$“).*

# 1.4 Äquivalenzklassen · Beweis von Proposition 1.4.7

*Beweis.* Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$.

**Schritt 1.** Jedes $x \in X$ liegt in einer Klasse, nämlich $x \in [x]$ – wegen der *Reflexivität* $x \sim x$.

**Schritt 2.** Für $x, y \in X$ gilt: $\quad y \in [x] \implies [y] = [x]$.

„$\subset$“: Sei $u \in [y]$, also $u \sim y$. Mit $y \sim x$ folgt $u \sim x$ *(Transitivität)*, also $u \in [x]$.
„$\supset$“: Aus $y \sim x$ folgt $x \sim y$ *(Symmetrie)*, also $x \in [y]$. Nach „$\subset$“ mit vertauschten Rollen folgt $[x] \subset [y]$.

**Schritt 3.** Für $x, y \in X$ gilt *entweder* $[x] = [y]$ *oder* $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Ist $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, so gibt es ein $u$ mit $u \in [x]$ und $u \in [y]$. Nach Schritt 2 ist $[u] = [x]$ und $[u] = [y]$, also $[x] = [y]$.

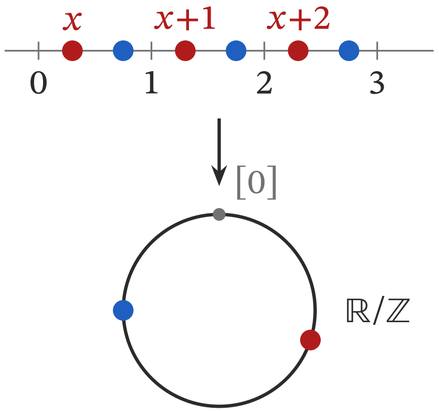
Nach Schritt 1 und 3 bilden die Äquivalenzklassen eine disjunkte Zerlegung von $X$.
Die Umkehrung *(Zerlegung ⇒ Äquivalenzrelation)* ist eine gute Übung. □

**Folgerung:** $[x] = [y] \iff x \sim y$. *Man darf also mit* beliebigen *Repräsentanten einer Klasse rechnen.*

# 1.4 Äquivalenzklassen · Beispiele

**Beispiel 1.4.8.** Auf $\mathbb{R}$ sei $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. *(Äquivalenzrelation, siehe Quiz (b).)*
Die Klasse von $x$ ist $[x] = \{\dots, x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2, \dots\}$. Man schreibt $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ für die Menge der Klassen.

- Jede Klasse hat *genau einen* Repräsentanten in $[0, 1)$ *(den „Nachkommaanteil“)*.
- Die Projektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ x \mapsto [x]$, „wickelt die Gerade auf einen Kreis auf“: $x$ und $x+1$ landen auf demselben Punkt.




**Physik: Winkel und Phasen.** Die Winkel $\varphi$ und $\varphi + 2\pi$ beschreiben dieselbe Stellung eines Zeigers. Eigentlich lebt ein Winkel also in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ – ebenso die Phase einer Schwingung $\cos(\omega t + \varphi)$.

**Brüche sind Äquivalenzklassen.** Auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ sei $(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q$.
Dann ist z. B. $(1, 2) \sim (2, 4) \sim (-3, -6)$, und der Bruch $\frac{1}{2}$ *ist* die Klasse $[(1, 2)]$. So kann man $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ konstruieren.
*Transitivität: Aus $pq' = p'q$ und $p'q'' = p''q'$ folgt $q'(pq'' - p''q) = 0$, und wegen $q' \neq 0$ dann $pq'' = p''q$.*

# 1.4 Rechnen mit Restklassen · $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

**Restklassen modulo $n$.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Auf $\mathbb{Z}$ sei $a \sim b \iff n$ teilt $a - b$. *(Äquivalenzrelation wie die Parität.)*
Die Klassen $[a] = \{\dots, a-n,\ a,\ a+n,\ a+2n, \dots\}$ heißen *Restklassen modulo $n$*; es gibt genau $n$ davon:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[0], [1], \dots, [n-1]\}.$$

**Rechnen mit Klassen.** Man definiert $[a] + [b] := [a+b], \qquad [a] \cdot [b] := [ab]$.

**Problem:** Ist das überhaupt eine Definition? Eine Klasse hat viele Repräsentanten – hängt das Ergebnis von der Wahl ab?

**Lemma.** Die Verknüpfungen sind *wohldefiniert*: Aus $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$ folgt $[a+b] = [a'+b']$ und $[ab] = [a'b']$.

*Beweis.* Es ist $a' = a + kn$ und $b' = b + ln$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$a' + b' = (a+b) + (k+l)n, \qquad a'b' = ab + (al + bk + kln)\, n.$$

Also teilt $n$ die Differenzen $(a'+b') - (a+b)$ und $a'b' - ab$. □

**Beispiel $n = 12$ (Uhr).** $[9] + [5] = [14] = [2]$: 5 Stunden nach 9 Uhr ist es 2 Uhr. *Kurz:* $9 + 5 \equiv 2 \pmod{12}$.

# 1.4 Wohldefiniertheit · Vektoren als Klassen

**Wohldefiniertheit kann schiefgehen.**

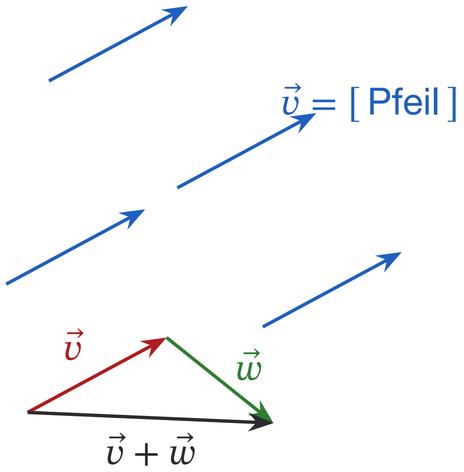
**Gegenbeispiel 1.** „$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ [a]_6 \mapsto [a]_4$“ ist *keine* Abbildung: $[0]_6 = [6]_6$, aber $[0]_4 \neq [6]_4 = [2]_4$.

**Gegenbeispiel 2.** „$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ \frac{p}{q} \mapsto p + q$“ ist nicht wohldefiniert: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, aber $1 + 2 \neq 2 + 4$.

*Dagegen ist $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{ps+rq}{qs}$ wohldefiniert – das ist der eigentliche Grund, warum die Bruchrechnung funktioniert.*

**Physik: Vektoren als Äquivalenzklassen.** Zwei Pfeile in der Ebene (oder im Raum) heißen äquivalent, wenn sie durch eine Parallelverschiebung ineinander übergehen *(gleiche Länge, gleiche Richtung)*.

- Ein *Vektor* $\vec{v}$ ist eine Klasse von Pfeilen; jeder Pfeil ist ein Repräsentant.
- Kräfte, Geschwindigkeiten, … sind Vektoren: Es kommt nur auf Betrag und Richtung an, nicht auf den Angriffspunkt.
- Die Addition „Pfeil an Pfeil“ ist wohldefiniert: Verschiebt man die Repräsentanten, so verschiebt sich auch das Ergebnis nur parallel.



# 1.4 Restklassen · Übung

**Übung: Rechnen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.** *(5 Minuten, gern zu zweit)*

(1) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $[3]+[4]$, $[3]\cdot[4]$, $[2]^4$, $[-7]$ *(als $[r]$ mit $0 \le r \le 4$)*.

(2) Finden Sie in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zu jedem $[a] \neq [0]$ ein $[b]$ mit $[a]\cdot[b] = [1]$.

(3) Finden Sie in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ zwei Klassen $[a], [b] \neq [0]$ mit $[a]\cdot[b] = [0]$.

(4) Gibt es in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ eine Klasse $[b]$ mit $[2]\cdot[b] = [1]$?

*Tipp: Stellen Sie eine Multiplikationstabelle auf. Bei (4): Welche Reste kann $2b$ modulo $6$ überhaupt haben?*

**Zur Einordnung:** Gleich definieren wir den Begriff *Körper*. Die Übung zeigt schon den Unterschied: In $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ kann man durch jede Klasse $\neq [0]$ „teilen“, in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nicht.

# 1.4 Restklassen · Auflösung der Übung

**Multiplikation in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:**

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

*Jede Zeile $\neq 0$ enthält genau eine $1$.*

**Multiplikation in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:**

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

(1) $[3]+[4]=[7]=[2]$, $[3]\cdot[4]=[12]=[2]$, $[2]^4=[16]=[1]$, $[-7]=[-7+10]=[3]$.

(2) $[1]^{-1}=[1]$, $[2]^{-1}=[3]$, $[3]^{-1}=[2]$, $[4]^{-1}=[4]$ *(denn $2\cdot 3=6$, $4\cdot 4=16$)*.

(3) $[2]\cdot[3]=[6]=[0]$ oder $[3]\cdot[4]=[12]=[0]$.

(4) Nein: $2b$ ist gerade, und $2b-1$ ist ungerade, also nie durch $6$ teilbar. *(Zeile 2 enthält keine 1.)*

*In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gibt es „Nullteiler“: $[2]\cdot[3]=[0]$, obwohl beide Faktoren $\neq[0]$ sind. Wir werden sehen: In einem Körper geht das nicht.*




UNIVERSITÄT
LEIPZIG

# Kapitel 2: Die reellen Zahlen

## Zahlbereiche · Körper · Folgerungen aus den Axiomen · Potenzen · Binomischer Lehrsatz

# 2.1 Zahlbereiche

**Warum immer größere Zahlbereiche?** Jede Erweiterung macht eine Rechenoperation uneingeschränkt möglich.

| Zahlbereich | neu möglich | noch unlösbar |
|---|---|---|
| $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ | Zählen, $+$, $\cdot$ | $x + 5 = 3$ |
| $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ | Subtraktion | $3x = 1$ |
| $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ p \text{ und } q \text{ teilerfremd}\right\}$ | Division *(durch $q \neq 0$)* | $x^2 = 2$ |
| $\mathbb{R}$ | „Lücken geschlossen“ *(Mittwoch)* | $x^2 = -1$ *$\to \mathbb{C}$, Abschnitt 4.5* |

**Proposition 2.1.1.** Es gibt keine rationale Zahl $r$ mit $r^2 = 2$.

*Beweis.* Angenommen doch, $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Kürzen wir alle Faktoren $2$, so sind $p$ und $q$ *nicht beide* gerade.

Aus $2 = r^2 = \frac{p^2}{q^2}$ folgt $p^2 = 2q^2$. Also ist $p^2$ gerade, damit auch $p$ *(denn ungerade · ungerade ist ungerade)*, etwa $p = 2k$.

Dann ist $2q^2 = p^2 = 4k^2$, also $q^2 = 2k^2$, und genauso ist $q$ gerade. Widerspruch! □

*Die Diagonale $d$ eines Quadrats mit Seitenlänge $1$ erfüllt $d^2 = 1 + 1 = 2$ (Pythagoras). In $\mathbb{Q}$ hat diese Länge keinen Platz.*

# 2.1 Zahlbereiche · Weitere irrationale Zahlen

**Wie weit trägt der Beweis von Proposition 2.1.1?**

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Angenommen $\frac{p}{q}$ gekürzt mit $p^2 = 3q^2$. Dann teilt $3$ die Zahl $p^2$.

Ist $p = 3k + r$ mit $r \in \{1, 2\}$, so ist $p^2 = 9k^2 + 6kr + r^2$ und $r^2 \in \{1, 4\}$ – also lässt $p^2$ den Rest $1$ bei Division durch $3$.
Folglich ist $3 \mid p$, etwa $p = 3k$, also $9k^2 = 3q^2$, $q^2 = 3k^2$, und ebenso $3 \mid q$. Widerspruch zur Kürzung. □

*Das ist Rechnen in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $[1]^2 = [1]$, $[2]^2 = [4] = [1]$. Also: $[p]^2 = [0] \Rightarrow [p] = [0]$.*

**Warum klappt das bei $\sqrt{4}$ nicht?** Aus „4 teilt $p^2$“ folgt *nicht* „4 teilt $p$“ (Beispiel $p = 2$). Natürlich, denn $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$.

**Allgemein gilt** *(ohne Beweis):* Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{n}$ rational $\iff$ $n$ ist eine Quadratzahl.
*Also sind $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots$ irrational.*

**Noch eins.** $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$: Sonst wäre $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ und $r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, also $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$. Widerspruch.

*Irrationale Zahlen sind keine Ausnahme: Wir werden sehen, dass es „viel mehr“ irrationale als rationale Zahlen gibt (Kapitel 3).*

# 2.1 Zahlbereiche · Warum Axiome?

**Was ist eigentlich eine reelle Zahl?**

**Schule:** Dezimalzahlen mit eventuell unendlich vielen Nachkommastellen, etwa $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, $\pi = 3{,}14159265\ldots$

*Tücken: Die Darstellung ist nicht eindeutig, $0{,}999\ldots = 1$. Und wie multipliziert man zwei unendliche Dezimalzahlen, wenn man „von hinten“ nicht anfangen kann?*

**Mathematik:** Man beschreibt $\mathbb{R}$ durch die *Rechengesetze*, die in $\mathbb{R}$ gelten – möglichst wenige, aus denen sich alle anderen herleiten lassen. Diese Grundgesetze heißen *Axiome*.

| | Axiome | regeln | |
|---|---|---|---|
| **Körper** | K1–K3 | $+,\ -,\ \cdot,\ :$ | *Abschnitt 2.2 – heute* |
| **angeordnet** | O1–O4 | $<,\ \leq,$ Beträge | *Abschnitt 2.3 – Mittwoch* |
| **Dedekind-vollständig** | Supremumsaxiom | „keine Lücken“ | *Abschnitt 2.5 – Mittwoch* |

**Fakt** *(Appendix A):* Es gibt bis auf Isomorphie genau *einen* vollständigen angeordneten Körper – das ist $\mathbb{R}$.
*Ab jetzt wird jede Aussage über reelle Zahlen aus diesen Axiomen* bewiesen. *Ähnlich wie in der Mechanik: Aus wenigen Grundgesetzen (Newton) folgt alles Weitere.*

# 2.2 Körper

**Definition 2.2.1.** Ein *Körper* ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ aus einer Menge $K$ und zwei Abbildungen

$$K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto a+b \quad \text{(Addition)}, \qquad K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto ab \quad \text{(Multiplikation)},$$

so dass für alle $a, b, c \in K$ die folgenden Axiome gelten:

**K1 Addition**

| | | |
|---|---|---|
| (K1.1) | $a + (b + c) = (a + b) + c$ | *Assoziativität* |
| (K1.2) | $\exists\, 0 \in K$: $a + 0 = a$ | *neutrales El.* |
| (K1.3) | $\exists\, b \in K$: $a + b = 0$ | *inverses El.* |
| (K1.4) | $a + b = b + a$ | *Kommutativität* |

$(K, +)$ *ist eine* abelsche Gruppe.

**K2 Multiplikation**

| | | |
|---|---|---|
| (K2.1) | $a(bc) = (ab)c$ | *Assoziativität* |
| (K2.2) | $\exists\, 1 \in K \setminus \{0\}$: $a1 = a$ | *neutrales El.* |
| (K2.3) | $a \neq 0 \Rightarrow \exists\, b \neq 0$: $ab = 1$ | *inverses El.* |
| (K2.4) | $ab = ba$ | *Kommutativität* |

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

**K3 Distributivgesetz** $a(b + c) = ab + ac$. *(Das einzige Axiom, das $+$ und $\cdot$ verbindet!)*

*Bemerkung: In (K2.2) steckt $1 \neq 0$. Wäre $1 = 0$, so folgte $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$ (Lemma 2.2.4 f), also $K = \{0\}$. Diese Menge erfüllt alle übrigen Axiome (K2.3 sogar trivial), ist aber nur ein* Ring, *der* Nullring *– kein Körper. (Ring: K1, K3 und K2 ohne (K2.3), z. B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.)*

*Achtung bei (K1.3) und (K2.3): Das Inverse $b$ hängt von $a$ ab. Die Quantoren lauten „$\forall a\ \exists b$“, nicht „$\exists b\ \forall a$“.*

# 2.2 Exkurs · Gruppen

**Exkurs: Gruppen.** Eine *Gruppe* ist eine Menge $G$ mit einer Abbildung $G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto g * h$, so dass

(G1) $g * (h * k) = (g * h) * k$ *(Assoziativität)*, (G2) es gibt ein $e \in G$ mit $g * e = e * g = g$ *(neutrales Element)*,
(G3) zu jedem $g$ gibt es $g^{-1} \in G$ mit $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ *(inverses Element)*.

Gilt zusätzlich $g * h = h * g$ für alle $g, h$, so heißt die Gruppe *abelsch (nach N. H. Abel)*.

**Ein Körper besteht also aus zwei abelschen Gruppen** $(K,+)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$, verbunden durch das Distributivgesetz.

| Gruppe | Verknüpfung | neutral | abelsch? |
|---|---|---|---|
| $(\mathbb{Z},+),\ (\mathbb{Q},+),\ (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ | Addition | $0$ | ja |
| $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot),\ (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ | Multiplikation | $1$ | ja |
| Per$(M)$ *(Permutationen, letzte Woche)* | Komposition $\circ$ | $\mathrm{Id}_M$ | nein, falls $\lvert M\rvert \geq 3$ |
| Galilei-Transformationen $G_v$ | Komposition $\circ$ | $G_0$ | ja |
| Drehungen im Raum | Komposition $\circ$ | keine Drehung | nein |

*Physik: Symmetrien eines Systems bilden immer eine Gruppe (Hintereinanderausführen zweier Symmetrien ist wieder eine). Gruppentheorie ist die Sprache der Symmetrien – von der Kristallographie bis zur Teilchenphysik.*

# 2.2 Körper · Beispiele

**Beispiele 2.2.2.**

- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind mit der üblichen Addition und Multiplikation Körper.
- *Keine* Körper: $\mathbb{N}$ *(es fehlt die* $0$ *und additive Inverse)*, $\mathbb{Z}$ *(*$2 \cdot b = 1$ *hat keine Lösung* $b \in \mathbb{Z}$*, verletzt K2.3)*.
- Jeder Körper hat mindestens zwei Elemente, $0$ und $1$ *(nach K2.2 ist* $1 \neq 0$*)*. Das genügt schon:

**Der Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$:**

| $+$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $0$ |

| $\cdot$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ |

In $\mathbb{F}_2$ gilt $1 + 1 = 0$, also $-1 = 1$.

**Woher kennen wir das?**

- Lies $0 =$ „gerade“, $1 =$ „ungerade“: gerade + ungerade = ungerade, ungerade + ungerade = gerade, …
  $\mathbb{F}_2$ *besteht aus den beiden* Paritätsklassen $[0], [1]$ *in* $\mathbb{Z}$*!*
- Informatik: Bits, $+ =$ XOR, $\cdot =$ AND.

*Weitere Körper:* $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ *(ein Unterkörper von* $\mathbb{R}$*), die komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ *(Abschnitt 4.5), endliche Körper* $\mathbb{F}_p$ *für jede Primzahl* $p$ *(Reste modulo* $p$*).*

# 2.2 Körper · Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

**Beispiel.** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ ist mit der Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ ein Körper.

*Beweis.* Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, gelten Assoziativität, Kommutativität und Distributivität automatisch. Zu zeigen ist nur, dass man *nicht aus* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *herausfällt*:

- $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ und $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ liegen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; mit $x$ liegt auch $-x$ darin.
- $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$, $\quad (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$.
- *Inverse:* Sei $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$. Dann ist $a^2 - 2b^2 \neq 0$ *(sonst wäre $a = b = 0$ oder $\sqrt{2} = |a/b| \in \mathbb{Q}$)* und

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

□

**Beispiele.** $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = -1 + \sqrt{2}$, $\qquad \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 3 - 2\sqrt{2}$.

*Der Trick „mit $a - b\sqrt{2}$ erweitern“ macht den Nenner rational – genauso wird man bei den komplexen Zahlen mit $\bar{z}$ erweitern (Abschnitt 4.5). Beachte, wo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ benutzt wurde!*

# 2.2 Körper · Eindeutigkeit von Neutralen und Inversen

**Lemma 2.2.3.** In einem Körper $K$ sind die neutralen Elemente $0$ und $1$ eindeutig bestimmt. Ferner sind zu $a \in K$ das additive Inverse und, falls $a \neq 0$, das multiplikative Inverse eindeutig bestimmt.

**Schreibweise:** $-a$ für das additive, $a^{-1}$ für das multiplikative Inverse; $a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

*Beweis.* Sei $0'$ ein weiteres neutrales Element.

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 && \text{(0 ist neutral)} \\ &= 0 + 0' && \text{(Kommutativität)} \\ &= 0 && \text{(0' ist neutral)} \end{aligned}$$

Seien $b$ und $c$ zwei additive Inverse zu $a$.

$$\begin{aligned} c &= c + 0 && \text{(0 ist neutral)} \\ &= c + (a + b) && \text{(b ist invers zu a)} \\ &= (c + a) + b && \text{(Assoziativität)} \\ &= (a + c) + b && \text{(Kommutativität)} \\ &= 0 + b \;=\; b + 0 \;=\; b && \text{(c invers, Komm., 0 neutral)} \end{aligned}$$

Für die Multiplikation geht alles genauso *(Übung: einfach $+ \to \cdot$, $0 \to 1$ ersetzen)*. □

*Jeder Schritt ist durch ein Axiom begründet – so sieht ein Beweis „aus den Axiomen“ aus.*

# 2.2 Folgerungen aus den Körperaxiomen

**Lemma 2.2.4 (Folgerungen aus den Körperaxiomen).** Sei $K$ ein Körper und $a, b, c \in K$.

a) $a + x = b$ hat genau eine Lösung $x \in K$, nämlich $x = b - a$.

b) $-(-a) = a$.

c) $-(a + b) = -a - b$.

d) Ist $a \neq 0$, so hat $ax = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = ba^{-1}$.

e) $(a + b)c = ac + bc$.

f) $a \cdot 0 = 0$. $\Rightarrow$ *0 hat kein multiplikatives Inverses*

g) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$. *(Nullteilerfreiheit)*

h) $(-1)a = -a$.

i) $(-1)(-1) = 1$. *„Minus mal Minus gibt Plus“*

*Alle diese „Schulregeln“ sind* Sätze*, keine Axiome: Sie gelten in* jedem *Körper – auch in* $\mathbb{F}_2$.
*Ebenso folgen* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *und* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *für* $b, d \neq 0$ *(Aufgabe 2.1).*

# 2.2 Folgerungen aus den Körperaxiomen · Beweise

*Beweis.* **(a)** *Existenz:* $a + (b - a) = a + \big((-a) + b\big) = \big(a + (-a)\big) + b = 0 + b = b$.
*Eindeutigkeit:* Ist $a + x = b$, so folgt $x = 0 + x = \big((-a) + a\big) + x = (-a) + (a + x) = (-a) + b = b - a$.

**(f)** Es ist $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Also lösen *sowohl* $x = 0$ *als auch* $x = a \cdot 0$ die Gleichung

$$a \cdot 0 + x = a \cdot 0.$$

Nach (a) ist die Lösung eindeutig, also $a \cdot 0 = 0$.

**(g)** Sei $ab = 0$ und $a \neq 0$. Dann existiert $a^{-1}$, und

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 \overset{\text{(f)}}{=} 0.$$

**(i)** Mit dem Distributivgesetz und (f):

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)(-1) + (-1) \cdot 1 = (-1)\big((-1) + 1\big) = (-1) \cdot 0 = 0.$$

Also ist $(-1)(-1)$ ein additives Inverses von $-1$. Eindeutigkeit (Lemma 2.2.3) und (b): $(-1)(-1) = -(-1) = 1$. □

*Nach (f) ist $0 \cdot b = 0 \neq 1$ für alle $b$: Durch $0$ kann man in* keinem *Körper teilen. Deshalb verlangt K2.3 nur $a \neq 0$.*

# 2.2 Körper · Wann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Körper?

**Wann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Körper?**

Die Rechenregeln (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität, $[0]$ und $[1]$ neutral, $-[a] = [-a]$) übertragen sich von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Offen ist nur (K2.3): Hat jedes $[a] \neq [0]$ ein multiplikatives Inverses?

- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *ist* ein Körper: Inverse haben wir in der Übung gefunden. Ebenso $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{F}_2$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist *kein* Körper: Es ist $[2] \cdot [3] = [0]$, aber $[2] \neq [0] \neq [3]$.
  Das widerspricht der *Nullteilerfreiheit*, Lemma 2.2.4 (g), die in *jedem* Körper gilt.
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist kein Körper: $[2] \cdot [2] = [4] = [0]$.

**Satz** *(ohne Beweis der Rückrichtung)*. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn $n$ eine Primzahl ist.
Man schreibt dann $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

*Beweis von „⇒“.* Ist $n = a \cdot b$ mit $1 < a, b < n$, so ist $[a] \neq [0]$, $[b] \neq [0]$, aber $[a][b] = [n] = [0]$. Nach 2.2.4 (g) kein Körper. □

*So sieht man den Nutzen der „Folgerungen aus den Axiomen“: Eine einzige Rechnung $[2][3] = [0]$ beweist, dass $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ kein Körper sein kann – ohne alle Axiome einzeln zu prüfen.*
*Endliche Körper sind übrigens in der Praxis wichtig: Fehlerkorrigierende Codes (QR-Codes, CDs) und Kryptographie rechnen in $\mathbb{F}_p$.*

# 2.2 Potenzen

**Definition 2.2.5 (Potenzen).** Für $x \in K$ definiert man *rekursiv*

$$x^0 = 1, \qquad x^{n+1} = x^n \cdot x \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{also} \quad x^1 = x, \;\; x^2 = xx, \;\; x^3 = xxx, \;\; \ldots$$

*Insbesondere ist $0^0 = 1$. Rekursive Definition und vollständige Induktion gehören zusammen.*

**Lemma 2.2.6.** Für $x, y \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x^{n+m} = x^n x^m, \qquad (x^n)^m = x^{nm}, \qquad x^n y^n = (xy)^n.$$

*Beweis* der ersten Regel durch Induktion nach $m$ *($n$ fest)*.

*Induktionsanfang* $m = 0$: $x^{n+0} = x^n = x^n \cdot 1 = x^n x^0$.
*Induktionsschritt* $m \to m+1$:

$$x^{n+(m+1)} = x^{(n+m)+1} \overset{\text{Def.}}{=} x^{n+m} \cdot x \overset{\text{IV}}{=} (x^n x^m) \cdot x \overset{\text{K2.1}}{=} x^n (x^m x) \overset{\text{Def.}}{=} x^n x^{m+1}.$$

Die anderen beiden Regeln gehen ähnlich *(Aufgabe 2.2)*. □

*Für $x \neq 0$ setzt man $x^{-n} := (x^{-1})^n$. Dann gelten die Regeln sogar für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ – etwa beim Rechnen mit Zehnerpotenzen: $10^3 \cdot 10^{-3} = 10^0 = 1$.*

# 1.5 Binomialkoeffizienten

**Rückgriff auf Abschnitt 1.5: Binomialkoeffizienten.**

**Definition 1.5.8.** Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist

$\binom{n}{k}$ = Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge.

**Proposition 1.5.10.** Für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

*Idee: $k$ Elemente* mit *Reihenfolge auswählen: $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ Möglichkeiten; jede Teilmenge wird dabei $k!$-mal gezählt.*

**Proposition 1.5.11 (Pascal).** Für $k, n \geq 1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

*Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$* mit *der $1$* $+$ *Teilmengen* ohne *die $1$.*

**Pascalsches Dreieck**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$

*Jede Zahl ist die Summe der beiden darüber.*

# 1.5 Der binomische Lehrsatz

**Satz 1.5.12 (Binomischer Lehrsatz).** In jedem Körper $K$ gilt für $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

*Dabei ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$ als $\binom{n}{k}$-fache Summe $1 + \cdots + 1$ in $K$ zu lesen.* **z. B.** $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

*Beweis.* Induktion nach $n$. $n = 0$: $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$. *Schritt $n \to n+1$:* Mit der Induktionsvoraussetzung ist

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \qquad \text{(Indexverschiebung } k \to k-1 \text{ links)} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \overset{\text{Pascal}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

*Benutzt wurden nur die Körperaxiome (Distributivität, Kommutativität, …) und die Potenzregeln – deshalb gilt der Satz in* jedem *Körper, auch in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ oder $\mathbb{F}_p$.*

# 1.5 Binomischer Lehrsatz · Übung

**Übung: Binomischer Lehrsatz.** *(5 Minuten)*

(1) Multiplizieren Sie $(x+y)^4$ und $(1+\sqrt{2})^4$ aus.

(2) Zeigen Sie mit dem binomischen Lehrsatz *(geschickt $x$ und $y$ wählen!)*:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1).$$

Was bedeutet die erste Formel für Teilmengen einer $n$-elementigen Menge?

(3) Zeigen Sie: In $\mathbb{F}_2$ gilt $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ für alle $x, y$.
Gilt in $\mathbb{F}_3$ auch $(x+y)^3 = x^3 + y^3$?

*Zu (3): Schauen Sie, welche Binomialkoeffizienten in $\mathbb{F}_p$ zu $0$ werden.*

# 1.5 Binomischer Lehrsatz · Auflösung der Übung

**(1)** Mit der Zeile $1, 4, 6, 4, 1$ des Pascalschen Dreiecks:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

$$(1+\sqrt{2})^4 = 1 + 4\sqrt{2} + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2\sqrt{2} + 4 = 17 + 12\sqrt{2}.$$

*Probe:* $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, *und* $(3+2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8$. ✓

**(2)** $x = y = 1$: $2^n = (1+1)^n = \sum_k \binom{n}{k}$. $\quad$ $x = -1, y = 1$: $0 = 0^n = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k$.

*Deutung: Eine $n$-elementige Menge hat insgesamt $2^n$ Teilmengen (vgl. $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ aus Woche 1) – sortiert nach ihrer Größe $k$. Die zweite Formel sagt: Es gibt gleich viele Teilmengen gerader wie ungerader Größe.*

**(3)** $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, und in $\mathbb{F}_2$ ist $2 = 1 + 1 = 0$. Also $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

In $\mathbb{F}_3$: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$, da $3 = 0$ in $\mathbb{F}_3$. ✓

*Allgemein gilt in $\mathbb{F}_p$: $(x+y)^p = x^p + y^p$, weil $p$ alle $\binom{p}{k}$ mit $0 < k < p$ teilt („Freshman's dream"). In $\mathbb{R}$ ist das natürlich falsch!*

# Zusammenfassung · Montag

**Das sollten Sie nach heute können:**

- Mit kartesischen Produkten umgehen; eine Relation als Teilmenge $R \subset X \times X$ verstehen.
- Reflexivität, Symmetrie und Transitivität *nachweisen* – und mit einem Gegenbeispiel *widerlegen*.
- Äquivalenzklassen bestimmen; Äquivalenzrelation = Zerlegung in disjunkte Klassen.
- In $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ rechnen – und verstehen, warum man Wohldefiniertheit prüfen muss.
- Die Körperaxiome kennen und erkennen, ob eine Menge mit $+, \cdot$ ein Körper ist *($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_2$ ja; $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ nein)*.
- Einfache Rechenregeln aus den Axiomen herleiten *(jeden Schritt begründen!)*; Nullteiler erkennen.
- Den binomischen Lehrsatz anwenden *(er gilt in jedem Körper)*.

**Zum Mitdenken bis Mittwoch:**

(1) Ist $x \sim y \iff x^2 = y^2$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$? Wie sehen die Klassen aus?

(2) Zeigen Sie in einem beliebigen Körper: $(-a)b = -(ab)$ und $(-a)(-b) = ab$.

(3) Kann es auf $\mathbb{F}_2$ eine Relation $<$ geben mit: genau eines von $0 < 1$, $1 < 0$ gilt, und $a < b \Rightarrow a + c < b + c$?

*Nächstes Mal: Anordnung, Betrag und Dreiecksungleichung, Supremum und Infimum, Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.*




UNIVERSITÄT
LEIPZIG

# Kapitel 2: Die reellen Zahlen

## Anordnung · Betrag · Ungleichungen · Intervalle · Supremum · Vollständigkeit · Dichtheit

# **Rückblick** · Zum Mitdenken

**Auflösung „Zum Mitdenken“ vom Montag.**

**(1)** $x \sim y \iff x^2 = y^2$ ist eine Äquivalenzrelation: $x^2 = x^2$; $x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$; $x^2 = y^2,\ y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$.
Klassen: $[x] = \{x, -x\}$ *(zwei Elemente für $x \neq 0$)*, $[0] = \{0\}$.

*Allgemein: Für jede Abbildung $f : X \to Y$ ist $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation; ihre Klassen sind die* Fasern $f^{-1}(\{y\})$ *(letzte Woche). Hier: $f(x) = x^2$.*

**(2)** Mit Lemma 2.2.4 (h), (i) und den Axiomen:

$$(-a)b = \big((-1)a\big)b = (-1)(ab) = -(ab), \qquad (-a)(-b) = (-1)a(-1)b = (-1)(-1)\,ab = ab.$$

**(3)** *Nein.* Gilt $0 < 1$, so folgt durch Addition von $1$: $1 < 1 + 1 = 0$ – also gälten $0 < 1$ *und* $1 < 0$.
Gilt $1 < 0$, so folgt genauso $0 = 1 + 1 < 0 + 1 = 1$. Beides ist ein Widerspruch.

*Auf $\mathbb{F}_2$ gibt es also keine „vernünftige“ Anordnung. Genau diese Verträglichkeit von $<$ mit $+$ und $\cdot$ ist das Thema von heute.*

# 2.3 Angeordnete Körper

**Definition 2.3.1.** Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper $K$ zusammen mit einer Relation $<$ auf $K$, so dass für alle $a, b, c \in K$ gilt:

| | | |
|---|---|---|
| (O1) | genau einer der Fälle $a < b,\ a = b,\ b < a$ tritt ein | *Vergleichbarkeit* |
| (O2) | $a < b,\ b < c \ \Rightarrow\ a < c$ | *Transitivität* |
| (O3) | $a < b \ \Rightarrow\ a + c < b + c$ | *Additivität: Verschieben erhält* $<$ |
| (O4) | $a < b,\ 0 < c \ \Rightarrow\ ac < bc$ | *Multiplikativität: Strecken mit* $c > 0$ *erhält* $<$ |

**Schreibweisen:** $a > b :\iff b < a$; $\quad a \leq b :\iff a < b$ oder $a = b$.
$a$ heißt *positiv*, falls $a > 0$, *negativ*, falls $a < 0$; *semi-positiv*, falls $a \geq 0$.
Aus (O1) folgt: $a \leq b$ und $b \leq a \ \Rightarrow\ a = b$.

**Beispiele 2.3.2.** $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Kleiner-Relation sind angeordnete Körper.
$\mathbb{F}_2$ lässt sich *nicht* anordnen *(Zum Mitdenken (3))*.

*Vergleich mit Montag: $\leq$ ist reflexiv und transitiv, aber* antisymmetrisch *statt symmetrisch – eine* Ordnungsrelation*, keine Äquivalenzrelation.*

# 2.3 Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen

**Lemma 2.3.3 (Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen).** Seien $a, b, x, y \in K$, $K$ angeordneter Körper.

a) $x < y \iff 0 < y - x$.

b) $a < b,\ x < y \Rightarrow a + x < b + y$. *Ungleichungen addieren*

c) $0 \leq a < b,\ 0 \leq x < y \Rightarrow ax < by$. *bedingt multiplizieren*

d) $x < y \iff -x > -y$. *Vorzeichenwechsel dreht um*

e) $a < b,\ x < 0 \Rightarrow ax > bx$. *mit Negativem multiplizieren dreht um*

f) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$.

g) $x > 0 \iff x^{-1} > 0$.

h) $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$. *Kehrwert dreht um*

*Vorsicht bei c): Ohne „$\geq 0$“ falsch, z. B. $-3 < 1$ und $-3 < 1$, aber $(-3)(-3) = 9 > 1$.*
*Vorsicht bei h): Ohne „$0 <$“ falsch, z. B. $-1 < 2$, aber $(-1)^{-1} = -1 < \frac{1}{2}$.*

# 2.3 Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen · Beweise

*Beweis.* **(a)** Aus $x < y$ folgt mit (O3), $c = -x$: $0 = x - x < y - x$. Umgekehrt addiere $x$.

**(b)** $a < b \overset{\text{O3}}{\Rightarrow} a + x < b + x$, und $x < y \overset{\text{O3}}{\Rightarrow} b + x < b + y$. Mit (O2) folgt $a + x < b + y$.

**(d)** $x < y \overset{\text{(a)}}{\iff} 0 < y - x = (-x) - (-y) \overset{\text{(a)}}{\iff} -y < -x$.

**(e)** $x < 0 \overset{\text{(d)}}{\Rightarrow} -x > 0 \overset{\text{O4}}{\Rightarrow} a(-x) < b(-x)$, also $-ax < -bx$, also $ax > bx$ nach (d).

**(f)** Ist $x > 0$, so folgt mit (O4): $0 = 0 \cdot x < x \cdot x = x^2$.
Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und daher $x^2 = (-x)(-x) > 0$ *(Montag, Zum Mitdenken (2))*.
Mit $x = 1$: $1 = 1^2 > 0$. □

**Beispiel 2.3.4.** Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung: Dort gibt es ein $i$ mit $i^2 = -1$. Nach (f) wäre dann

$$-1 = i^2 > 0 \quad \text{und} \quad 1 > 0, \quad \text{also nach (b)} \quad 0 = -1 + 1 > 0. \qquad \text{Widerspruch!}$$

# 2.3 Angeordnete Körper · Unendlich viele Elemente

**Satz 2.3.5.** Ein angeordneter Körper $K$ hat stets unendlich viele Elemente.
Genauer: Die Abbildung $\mathbb{N} \to K,\ n \mapsto n_K := \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ Summanden}}$ ist injektiv.

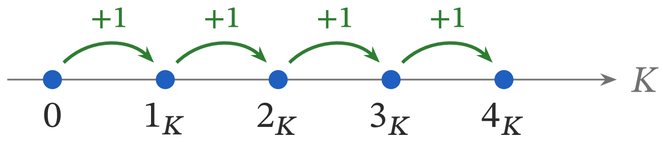
*Beweis.* Nach Lemma 2.3.3 (f) ist $0 < 1$. Addiert man $n_K$ *(O3)*, so folgt $n_K < n_K + 1 = (n+1)_K$. Mit (O2) also

$$0 < 1_K < 2_K < 3_K < 4_K < \cdots$$

Für $m < n$ folgt $m_K < n_K$, insbesondere $m_K \neq n_K$. □

**Folgerungen.**

- Endliche Körper *($\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_p$, …)* lassen sich nicht anordnen.
- Jeder angeordnete Körper enthält eine „Kopie“ von $\mathbb{N}$, damit auch von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ *(Differenzen und Quotienten)*.




*Ist $K$ ein angeordneter Körper, so ist also $\mathbb{Q} \subset K$. Die Anordnungsaxiome allein legen $\mathbb{R}$ aber noch nicht fest – $\mathbb{Q}$ erfüllt sie ja auch. Es fehlt die Vollständigkeit (Abschnitt 2.5).*

# 2.3 Bernoullische Ungleichung

**Satz (Bernoullische Ungleichung).** Sei $K$ ein angeordneter Körper, $x \in K$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

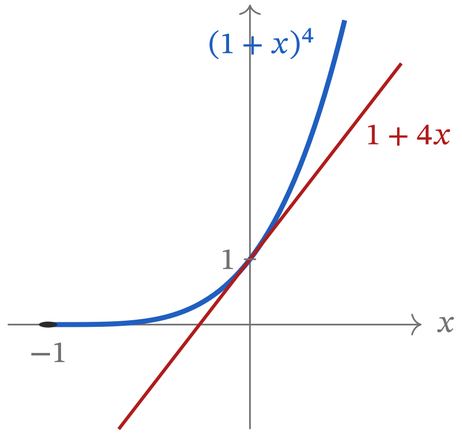
$$(1+x)^n \;\geq\; 1+nx.$$

*Beweis.* Induktion nach $n$. $n=0$: $1 \geq 1$. ✓
*Schritt* $n \to n+1$*:* Wegen $x \geq -1$ ist $1+x \geq 0$. Multiplikation der Induktionsvoraussetzung mit $1+x \geq 0$ erhält „$\geq$“ *(O4)*:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) &\;\geq\; (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \;\geq\; 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

□

*Ohne* $x \geq -1$ *falsch:* $x=-3$, $n=5$ *gibt* $(-2)^5 = -32 < -14 = 1+5\cdot(-3)$.




*Die Gerade* $1+nx$ *ist die Tangente an* $(1+x)^n$ *bei* $x=0$.

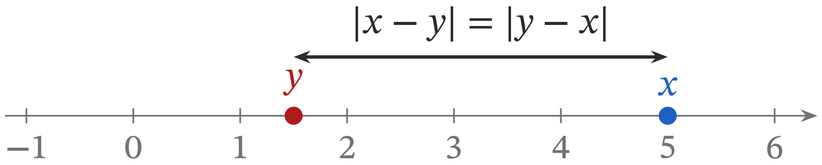
**Anwendungen.** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$. Zinseszins: $1{,}01^{100} \geq 1+100\cdot 0{,}01 = 2$ *(tatsächlich* $\approx 2{,}70$*)*.
Für $b>1$ ist $b^n = (1+(b-1))^n \geq 1+n(b-1)$: *$b^n$ wird beliebig groß (Archimedes – brauchen wir in Kapitel 3)*.

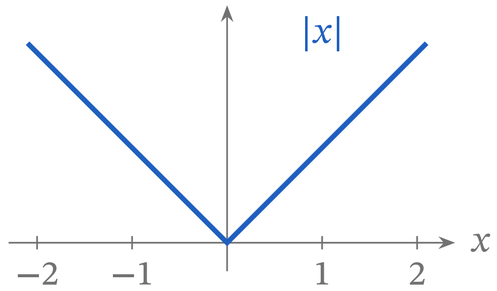
# 2.3 Absolutbetrag

**Definition 2.3.6.** Das *Maximum* zweier Zahlen $a, b \in K$ ist die größere der beiden, der *Absolutbetrag* von $x \in K$ ist

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b, \\ b & \text{falls } a < b, \end{cases} \qquad |x| = \max(x,-x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

**Anschauung:** $|x|$ ist der *Abstand* von $x$ zu $0$, und $|x-y|$ ist der Abstand von $x$ und $y$ auf der Zahlengeraden.




**Nützlich:** Für $c \geq 0$ gilt $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$,
*denn* $\max(x,-x) \leq c \iff x \leq c$ *und* $-x \leq c$.

**Beispiel.** $|x-2| < 1 \iff -1 < x-2 < 1 \iff 1 < x < 3$.

# 2.3 Absolutbetrag · Dreiecksungleichung

**Satz 2.3.7.** Für $x, y$ in einem angeordneten Körper $K$ gilt $|x| \geq 0$ und

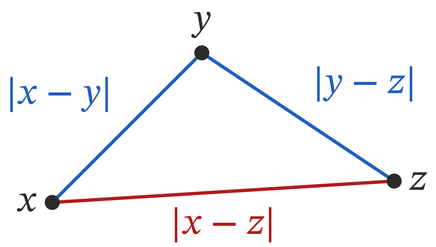
$$|x| = 0 \iff x = 0 \quad \textit{(Definitheit)}, \qquad |xy| = |x|\,|y| \quad \textit{(Multiplikativität)}, \qquad \boxed{|x+y| \leq |x| + |y|} \quad \textit{(Dreiecksungleichung)}.$$

*Beweis.* $|x| \geq 0$: Für $x \geq 0$ ist $|x| = x \geq 0$; für $x < 0$ ist $|x| = -x > 0$.
*Definitheit:* Ist $|x| = 0$, so ist $x = 0$ oder $-x = 0$, in beiden Fällen $x = 0$. „$\Leftarrow$“ ist klar.
*Multiplikativität:* Schreibe $x = \pm x_0$, $y = \pm y_0$ mit $x_0, y_0 \geq 0$. Dann ist $|xy| = |\pm x_0 y_0| = x_0 y_0 = |x|\,|y|$.
*Dreiecksungleichung:* Es ist $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, also nach Addition $x + y \leq |x| + |y|$.
Ebenso $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$, also $-(x+y) \leq |x| + |y|$. Zusammen: $|x+y| = \max\big(x+y, -(x+y)\big) \leq |x| + |y|$. □

**Abstandsform:** Mit $x - y$ und $y - z$ statt $x$ und $y$:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

*„Ein Umweg über $y$ ist nie kürzer als der direkte Weg.“ Daher der Name: Im Dreieck ist jede Seite höchstens so lang wie die Summe der beiden anderen (für Längen von Vektoren in der Ebene gilt dasselbe).*



# 2.3 Absolutbetrag · Umgekehrte Dreiecksungleichung

**Lemma 2.3.8 (Umgekehrte Dreiecksungleichung).** Für $a, b$ in einem angeordneten Körper $K$ gilt

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |a - b|.$$

*Beweis.* Mit der Dreiecksungleichung ist $|a| = |b + (a - b)| \le |b| + |a - b|$, also $|a| - |b| \le |a - b|$.
Vertauscht man die Rollen von $a$ und $b$: $|b| - |a| \le |b - a| = |a - b|$. Also

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| = \max\big(|a| - |b|,\ |b| - |a|\big) \le |a - b|. \qquad \square$$

**Wozu?** Um Beträge nach *unten* abzuschätzen: $|a| \ge |b| - |a - b|$.

**Beispiel.** Ist $|x - 3| < 1$, so gilt $|x| \ge |3| - |x - 3| > 3 - 1 = 2$, und nach Lemma 2.3.3 (h) $\dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{2}$.

*Solche Abschätzungen sind das tägliche Brot der Analysis (z. B. beim Nachweis der Stetigkeit von $x \mapsto \frac{1}{x}$).*

**Physik: Messfehler.** Weicht ein Messwert $\tilde{x}$ um höchstens $\delta$ vom wahren Wert $x$ ab, $|\tilde{x} - x| \le \delta$, so gilt auch $\big|\,|\tilde{x}| - |x|\,\big| \le \delta$: Der Betrag ist mindestens so genau bekannt wie der Wert selbst.

# 2.3 Ungleichungen lösen · Beispiele

**Ungleichungen lösen: Fallunterscheidung ist das Werkzeug.**

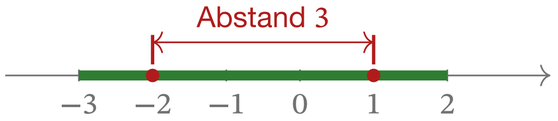
**Beispiel 1.** $M = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x+2| \le 5\}$.

$x \ge 1$: $\quad (x-1)+(x+2) = 2x+1 \le 5 \quad \iff x \le 2$

$-2 \le x < 1$: $\quad (1-x)+(x+2) = 3 \le 5 \quad$ immer wahr

$x < -2$: $\quad (1-x)-(x+2) = -2x-1 \le 5 \quad \iff x \ge -3$

Also $M = [1,2] \cup [-2,1) \cup [-3,-2) = [-3,2]$.




*Geometrisch: Summe der Abstände zu $1$ und $-2$ ist $\le 5$. Zwischen den Punkten ist sie konstant $3$.*

**Beispiel 2.** $\dfrac{x+1}{x-1} > 2$ für $x \ne 1$. *Vorsicht:* Beim Multiplizieren mit $x-1$ kommt es auf das Vorzeichen an!

- $x > 1$: $x+1 > 2(x-1) \iff x < 3$. Lösungen: $(1,3)$.
- $x < 1$: Multiplikation mit $x-1 < 0$ dreht um *(Lemma 2.3.3 (e))*: $x+1 < 2(x-1) \iff x > 3$. Widerspruch zu $x < 1$.

Also ist die Lösungsmenge $(1,3)$. *Probe:* $x = 2$: $\frac{3}{1} = 3 > 2$ ✓; $\quad x = 0$: $\frac{1}{-1} = -1 \not> 2$ ✓.

*Häufiger Fehler: „$\frac{x+1}{x-1} > 2 \Rightarrow x+1 > 2x-2$“ ohne Fallunterscheidung.*

# 2.3 Ungleichungen lösen · Übung

**Übung: Lösungsmengen bestimmen.** *(5–7 Minuten)* Schreiben Sie jeweils als Intervall bzw. Vereinigung von Intervallen:

(1) $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| < x\}$

(2) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < |x|\}$

(3) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} < x\}$

(4) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq |x|\}$ *(Tipp: Abstände!)*

*Hilfsmittel:* $|y| < c \iff -c < y < c$; $|y|^2 = y^2$; *Lemma 2.3.3 (Vorzeichen beim Multiplizieren beachten!).*
*Machen Sie am Ende immer eine Probe mit einem Punkt innerhalb und einem außerhalb der Lösungsmenge.*

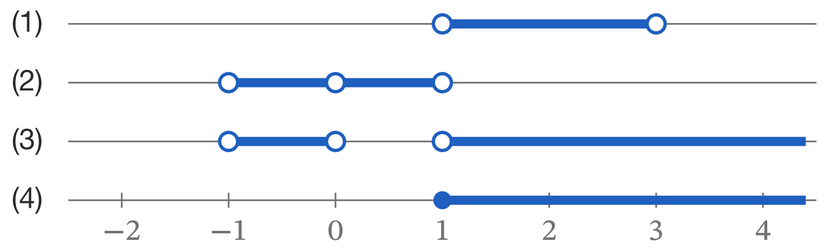
# 2.3 Ungleichungen lösen · Auflösung der Übung

**(1)** $|2x-3| < x \iff -x < 2x-3 < x \iff (3x > 3 \text{ und } x < 3) \iff x \in (1,3)$.
*(Für $x \le 0$ ist die Ungleichung unmöglich, da $|2x-3| \ge 0$ – das ist automatisch berücksichtigt.)*

**(2)** Mit $t = |x| \ge 0$: $x^2 = t^2 < t \iff t(t-1) < 0 \iff 0 < t < 1$. Also $(-1,0) \cup (0,1)$.

**(3)** *Fall $x > 0$:* Multiplikation mit $x$: $1 < x^2 \iff x > 1$.
*Fall $x < 0$:* Multiplikation mit $x < 0$ dreht um: $1 > x^2 \iff -1 < x < 1$, zusammen mit $x < 0$: $-1 < x < 0$.
Also $(-1,0) \cup (1,\infty)$. *Probe:* $x = -\frac{1}{2}$: $-2 < -\frac{1}{2}$ ✓; $x = \frac{1}{2}$: $2 \not< \frac{1}{2}$ ✓.

**(4)** $|x-2| \le |x|$: „$x$ ist näher an $2$ als an $0$ (oder gleich weit)“. Also $x \ge 1$, d. h. $[1,\infty)$.
*Rechnerisch: beide Seiten $\ge 0$, also äquivalent zu $(x-2)^2 \le x^2 \iff -4x+4 \le 0 \iff x \ge 1$.*



# 2.3 Absolutbetrag · Fehlerfortpflanzung

**Physik: Fehlerfortpflanzung beim Produkt.** Gemessen werden $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ statt der wahren Werte $x, y$, mit

$$|x - \tilde{x}| \le \delta_x, \qquad |y - \tilde{y}| \le \delta_y.$$

Wie genau kennt man dann das Produkt $xy$ (z. B. eine Fläche, oder Leistung $P = U \cdot I$)?

**Abschätzung.** Es gilt $|xy - \tilde{x}\tilde{y}| \le |\tilde{x}|\,\delta_y + |\tilde{y}|\,\delta_x + \delta_x\delta_y$.

*Beweis.* Man schreibt die Differenz geschickt um *(nachrechnen!)*:

$$xy - \tilde{x}\tilde{y} = \tilde{x}(y - \tilde{y}) + \tilde{y}(x - \tilde{x}) + (x - \tilde{x})(y - \tilde{y}).$$

Dreiecksungleichung und Multiplikativität des Betrags liefern die Behauptung. □

**Relative Fehler addieren sich:** Division durch $|\tilde{x}\tilde{y}|$ gibt

$$\frac{|xy - \tilde{x}\tilde{y}|}{|\tilde{x}\tilde{y}|} \le \frac{\delta_x}{|\tilde{x}|} + \frac{\delta_y}{|\tilde{y}|} + \underbrace{\frac{\delta_x}{|\tilde{x}|} \cdot \frac{\delta_y}{|\tilde{y}|}}_{\text{meist vernachlässigbar}}.$$

**Zahlenbeispiel.** Rechteck mit $a = 2{,}00 \pm 0{,}01\,\text{m}$, $b = 3{,}00 \pm 0{,}02\,\text{m}$: $|A - 6{,}00\,\text{m}^2| \le 2 \cdot 0{,}02 + 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}0002 \approx 0{,}07\,\text{m}^2$.
*Relativ: $0{,}5\,\% + 0{,}67\,\% \approx 1{,}2\,\%$. Im Praktikum lernen Sie die statistische Variante (Gaußsche Fehlerfortpflanzung) – die obige ist die „worst-case"-Abschätzung.*

# 2.4 Intervalle

**Definition 2.4.1 / 2.4.2.** Sei $K$ ein angeordneter Körper und $a \le b$ in $K$. Die *Intervalle* von $a$ bis $b$ sind

$[a,b] = \{x \in K : a \le x \le b\}$  *abgeschlossen*

$(a,b) = \{x \in K : a < x < b\}$  *offen*

$[a,b) = \{x \in K : a \le x < b\}, \quad (a,b] = \{x \in K : a < x \le b\}$  *halboffen*

Die *Länge* ist jeweils $L = b - a \ge 0$. Ferner $[a,\infty) = \{x \in K : a \le x\}$, $(-\infty, b) = \{x \in K : x < b\}$ usw.

*$\infty$ ist* kein *Element von $K$ – nur ein Symbol für „nach rechts unbeschränkt“. Daher ist bei $\infty$ die Klammer immer offen.*

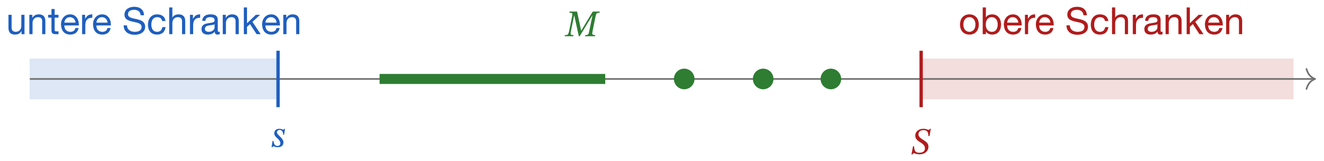
**Intervalle und Beträge:** Für $r > 0$ gilt

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r \iff x \in (a - r,\ a + r).$$

*„Alle Punkte mit Abstand $< r$ von $a$“ – solche Intervalle werden uns ab Kapitel 3 als $\varepsilon$-*Umgebungen *ständig begegnen.*

# 2.4 Beschränkte Mengen · Schranken

**Definition 2.4.3.** $M \subset K$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $S \in K$ gibt mit $x \leq S$ für alle $x \in M$.
Jedes solche $S$ heißt *obere Schranke* von $M$. Analog: *nach unten beschränkt*, *untere Schranke*.
$M$ heißt *beschränkt*, falls $M$ nach oben *und* nach unten beschränkt ist.




*Ist $S$ obere Schranke und $S' \geq S$, so ist auch $S'$ obere Schranke: Obere Schranken sind nie eindeutig.*

**Beispiele 2.4.4.** $[0,1]$ ist beschränkt. $\mathbb{N}$ ist in $K = \mathbb{Q}$ nach unten beschränkt *(durch 1)*, aber nicht nach oben.

**Lemma 2.4.5.** $M \subset K$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $T > 0$ gibt mit $|x| \leq T$ für alle $x \in M$.

*Beweis.* „⇒“: Sei $S_- \leq x \leq S_+$ für alle $x \in M$. Setze $T = \max(|S_-|, |S_+|)$ *(ggf. vergrößern, damit $T > 0$)*. Dann

$$-T \leq -|S_-| \leq S_- \leq x \leq S_+ \leq |S_+| \leq T, \quad \text{also} \quad |x| \leq T.$$

„⇐“: Aus $|x| \leq T$ folgt $-T \leq x \leq T$: $-T$ ist untere, $T$ obere Schranke. □

# 2.4 Maximum und Minimum

**Definition 2.4.6.** $M \subset K$ *besitzt ein Maximum*, wenn es ein $m_0 \in M$ gibt, das obere Schranke von $M$ ist.
Man schreibt $m_0 = \max(M)$. Analog: *Minimum* $\min(M)$ = untere Schranke, die in $M$ liegt.

**Eindeutigkeit:** Sind $m_0, m_0'$ beide Maxima, so ist $m_0 \leq m_0'$ *($m_0'$ obere Schranke, $m_0 \in M$)* und ebenso $m_0' \leq m_0$, also $m_0 = m_0'$.

- Endliche Mengen $M = \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ haben stets ein Maximum $\max(a_1, \dots, a_n)$ und Minimum.
  **Beispiel 2.4.7.** $\min(2,3,5) = 2$, $\max(2,3,5) = 5$.
- $[0,1]$ hat das Maximum $1$ und das Minimum $0$.

**Behauptung.** Das offene Intervall $(0,1)$ hat *kein* Maximum *(weder in $\mathbb{Q}$ noch in $\mathbb{R}$)*.

*Beweis.* Sei $m \in (0,1)$ beliebig. Dann ist auch $m' = \frac{m+1}{2} \in (0,1)$ und

$$m' - m = \frac{1-m}{2} > 0, \quad \text{also} \quad m' > m.$$

Also ist $m$ keine obere Schranke von $(0,1)$, und kein Element von $(0,1)$ ist ein Maximum. □

*Trotzdem ist die $1$ „die natürliche Grenze“ von $(0,1)$ – nur liegt sie nicht in der Menge. Das führt zum* Supremum.

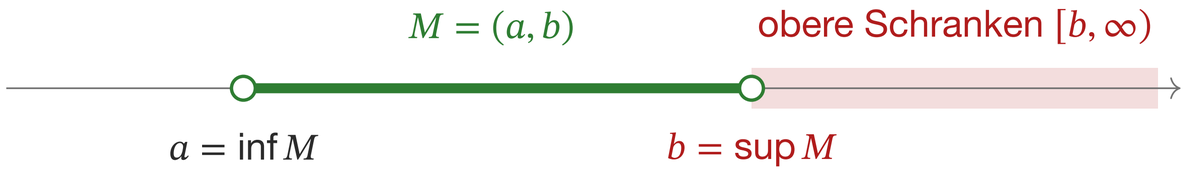
# 2.5 Supremum und Infimum

**Definition 2.5.1.** Sei $M \subset K$. Ein $s \in K$ heißt *Supremum* von $M$, falls

(i) $s$ ist eine obere Schranke von $M$, und

(ii) ist $t$ eine obere Schranke von $M$, so folgt $t \geq s$.

Das Supremum ist also die *kleinste obere Schranke*. Analog: *Infimum = größte untere Schranke*.




**Proposition 2.5.2.** Besitzt $M$ ein Supremum, so ist es eindeutig bestimmt. Man schreibt $\sup(M)$ bzw. $\inf(M)$.

*Beweis.* Seien $s, t$ Suprema von $M$. Beide sind obere Schranken. Da $s$ Supremum ist, folgt $s \leq t$ *(ii)*;
da $t$ Supremum ist, folgt $t \leq s$. Also $s = t$. □

**Unterschied zum Maximum:** Das Supremum muss *nicht* in $M$ liegen.

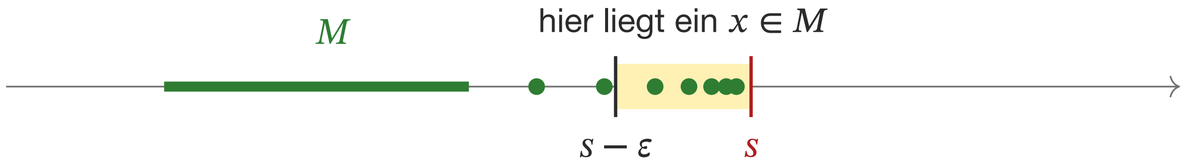
**Beispiel 2.5.3.** $\sup[0, 1] = \sup(0, 1) = 1$. Also hat $(0, 1)$ kein Maximum, aber ein Supremum.

# 2.5 Supremum · Das ε-Kriterium

**Nützliches Kriterium.** Sei $s$ eine obere Schranke von $M \subset K$. Dann gilt

$$s = \sup(M) \iff \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } x \in M \text{ mit } x > s - \varepsilon.$$

*In Worten: Jede noch so kleine Verkleinerung $s - \varepsilon$ ist* keine *obere Schranke mehr.*




*Beweis.* „⇒“: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $s - \varepsilon < s$, also ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke *($s$ ist die kleinste)*.
Das heißt: Es gibt ein $x \in M$ mit $x > s - \varepsilon$.

„⇐“: Angenommen, $t < s$ wäre eine obere Schranke. Setze $\varepsilon = s - t > 0$. Dann gibt es $x \in M$ mit $x > s - \varepsilon = t$ – Widerspruch dazu, dass $t$ obere Schranke ist. Also ist $s$ die kleinste obere Schranke. □

**Anwendung:** $\sup(0,1) = 1$. $1$ ist obere Schranke. Zu $0 < \varepsilon < 1$ liegt $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ in $(0,1)$ und $x > 1 - \varepsilon$.

*(Für $\varepsilon \geq 1$ tut es z. B. $x = \frac{1}{2}$.)*

*Analog: $i = \inf(M) \iff$ $i$ untere Schranke und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $x \in M$ mit $x < i + \varepsilon$.*

# 2.5 Supremum · Rechenregeln

**Rechenregeln für Suprema.** Seien $\varnothing \neq A, B, M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.

(a) *Monotonie:* $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$.

(b) *Streckung:* Für $\lambda > 0$ ist $\sup(\lambda M) = \lambda \sup M$, wobei $\lambda M = \{\lambda m : m \in M\}$.

(c) *Spiegelung:* $\inf(-M) = -\sup M$ *(vgl. Proposition 2.5.6)*.

(d) *Summe:* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ *(Übungsblatt!)*.

*Beweis.* (a) $\sup B$ ist obere Schranke von $B$, also erst recht von $A \subset B$. Die kleinste obere Schranke von $A$ ist daher $\leq \sup B$.

(b) Sei $s = \sup M$. *Obere Schranke:* Für $m \in M$ ist $m \leq s$, also $\lambda m \leq \lambda s$ *(O4, $\lambda > 0$)*.
*Kleinste:* Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem $\varepsilon$-Kriterium gibt es $m \in M$ mit $m > s - \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Dann ist $\lambda m \in \lambda M$ und

$$\lambda m > \lambda s - \varepsilon.$$

Also $\sup(\lambda M) = \lambda s$ *($\varepsilon$-Kriterium)*. □

*Für $\lambda < 0$ wird aus dem Supremum ein Infimum:* $\inf(\lambda M) = \lambda \sup M$ – *wegen (b) und (c).*
*Muster: „Obere Schranke zeigen“ + „mit dem $\varepsilon$-Kriterium zeigen, dass es keine kleinere gibt“. Das werden Sie oft brauchen.*

# 2.5 Supremum · Übung

**Übung: Supremum verstehen.** *(5–7 Minuten)*

(1) Seien $\varnothing \neq A, B \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Zeigen Sie: $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(2) Wahr oder falsch? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

(a) Ist $s = \sup M$ und $s \notin M$, so hat $M$ unendlich viele Elemente.

(b) Gilt $\sup M = \inf M$, so hat $M$ genau ein Element.

(c) Ist $A \subsetneq B$ (echte Teilmenge), so ist $\sup A < \sup B$.

(d) Ist $t < \sup M$, so gibt es ein $x \in M$ mit $x > t$.

*Tipp zu (1): Zeigen Sie „$\leq$“ (obere Schranke) und „$\geq$“ mit der Monotonie (a) von eben.*

# 2.5 Supremum · Auflösung der Übung

**(1)** Sei $s = \max(\sup A, \sup B)$.
„$\leq$“: Für $x \in A \cup B$ ist $x \leq \sup A \leq s$ oder $x \leq \sup B \leq s$. Also ist $s$ obere Schranke von $A \cup B$, d. h. $\sup(A \cup B) \leq s$.
„$\geq$“: Wegen $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$ ist nach der Monotonie $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ und $\sup B \leq \sup(A \cup B)$. □

**(2a)** **Wahr.** Eine endliche Menge $M \neq \emptyset$ hat ein Maximum, und dann ist $\sup M = \max M \in M$ *(Prop. 2.5.6 (b))*.

**(2b)** **Wahr** (für $M \neq \emptyset$). Für $x \in M$ gilt $\inf M \leq x \leq \sup M = \inf M$, also $x = \sup M$. Alle Elemente sind gleich.

**(2c)** **Falsch.** $A = (0, 1) \subsetneq B = (0, 1]$, aber $\sup A = \sup B = 1$.

**(2d)** **Wahr.** Sonst wäre $t$ eine obere Schranke, die kleiner als die kleinste obere Schranke ist.
*Das ist genau das $\varepsilon$-Kriterium mit $\varepsilon = \sup M - t$.*

*Merke: Das Supremum reagiert nicht auf „einzelne Punkte am Rand“ (2c), aber jedes $t < \sup M$ wird von einem Element von $M$ überholt (2d).*

# 2.5 Supremum und Infimum · Quiz

**Quiz: Maximum, Minimum, Supremum, Infimum in $\mathbb{R}$?** *(Falls nicht vorhanden: „–“.)*

| | Menge $M \subset \mathbb{R}$ | max | min | sup | inf |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $[0, 1)$ | | | | |
| (b) | $\{x \in \mathbb{R} : \lvert x - 1\rvert \leq 2\}$ | | | | |
| (c) | $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ | | | | |
| (d) | $\mathbb{N}$ | | | | |
| (e) | $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ | | | | |
| (f) | $\varnothing$ | | | | |

*Tipp: Erst eine Skizze auf der Zahlengeraden! Gibt es ein Maximum, so ist es auch das Supremum.*

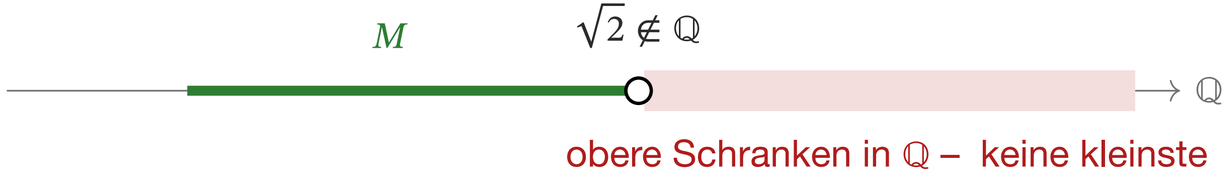
# 2.5 Supremum und Infimum · Auflösung des Quiz

| | Menge | max | min | sup | inf | Bemerkung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | $[0,1)$ | – | $0$ | $1$ | $0$ | *wie* $(0,1)$ *eben* |
| (b) | $\{\lvert x-1\rvert \le 2\} = [-1,3]$ | $3$ | $-1$ | $3$ | $-1$ | *abgeschlossenes Intervall* |
| (c) | $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ | $1$ | – | $1$ | $0$ | inf $= 0$*: Archimedes, gleich* |
| (d) | $\mathbb{N}$ | – | $1$ | – | $1$ | *nach oben unbeschränkt, gleich* |
| (e) | $\{x^2 < 2\} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ | – | – | $\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | *dass es* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ *gibt: gleich* |
| (f) | $\varnothing$ | – | – | – | – | jedes $t \in \mathbb{R}$ *ist obere Schranke* |

- **(f)** Für $M = \varnothing$ ist „$x \le t$ für alle $x \in M$“ *leer wahr*. Es gibt also keine kleinste obere Schranke.
  *Deshalb wird im Supremumsaxiom gleich $M \neq \varnothing$ verlangt.*
- **(e)** Dieselbe Menge *in* $\mathbb{Q}$, also $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$, ist beschränkt – hat aber *kein* Supremum in $\mathbb{Q}$!
  *Das ist genau die „Lücke“ von $\mathbb{Q}$ bei $\sqrt{2}$.*

# 2.5 Dedekind-Vollständigkeit

**Proposition 2.5.2 (Fortsetzung).** Es gibt nichtleere, beschränkte Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzen, z. B. $M = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$.




*Die oberen Schranken* $1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}4143;\ \ldots$ *kommen* $\sqrt{2}$ *beliebig nahe – aber* $\sqrt{2}$ *selbst fehlt in* $\mathbb{Q}$.

**Definition 2.5.4.** Ein angeordneter Körper $K$ heißt *Dedekind-vollständig*, falls *jede* nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset K$ ein Supremum in $K$ besitzt *(Supremumsaxiom)*.

- $\mathbb{Q}$ ist *nicht* Dedekind-vollständig. $\mathbb{R}$ *ist* Dedekind-vollständig.
- **Fakt** *(Appendix A, Bemerkung 2.5.5):* Es gibt einen Dedekind-vollständigen angeordneten Körper, und bis auf Isomorphie nur *einen*: $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ = **Körper** (K1–K3) + **Anordnung** (O1–O4) + **Supremumsaxiom**.

*Ab jetzt wird jede Aussage über* $\mathbb{R}$ *aus diesen drei Axiomgruppen hergeleitet.*

# 2.5 Dedekind-Vollständigkeit · Die Lücke bei $\sqrt{2}$

**Warum hat $M = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$?**

*Beweis.* Angenommen, $s = \sup M \in \mathbb{Q}$. Wegen $1 \in M$ ist $s \geq 1 > 0$, und nach Prop. 2.1.1 ist $s^2 \neq 2$.

**Fall $s^2 < 2$:** Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq s^2 + \frac{2s+1}{n} < 2, \quad \text{sobald} \quad n > \frac{2s+1}{2-s^2}.$$

Dann liegt $s + \frac{1}{n}$ in $M$ und ist größer als $s$ – Widerspruch zu „$s$ ist obere Schranke“.

**Fall $s^2 > 2$:** Für $n > \max\left(\frac{2s}{s^2-2}, \frac{1}{s}\right)$ ist $s - \frac{1}{n} > 0$ und

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 \geq s^2 - \frac{2s}{n} > 2.$$

Für $r \in M$ mit $r > 0$ gilt $r^2 < 2 < (s - \frac{1}{n})^2$, also $r < s - \frac{1}{n}$ *(Lemma 2.3.3 (c))*. Also ist $s - \frac{1}{n}$ eine *kleinere* obere Schranke – Widerspruch zu „$s$ ist die kleinste“. □

*In $\mathbb{R}$ liefert* dasselbe *Argument: $s = \sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ existiert (Supremumsaxiom) und beide Fälle sind unmöglich, also $s^2 = 2$. So folgt die Existenz von $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ aus der Vollständigkeit!*

# 2.5 Dedekind-Vollständigkeit · Existenz von Wurzeln

**Satz (Existenz von Wurzeln).** Zu jedem $a \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^k = a$.
Man schreibt $x = \sqrt[k]{a}$, für $k = 2$ einfach $\sqrt{a}$.

*Beweis. Eindeutigkeit:* Für $0 \leq x < y$ ist $x^k < y^k$ *(Induktion mit Lemma 2.3.3 (c))*. Zwei verschiedene Lösungen $x \neq y$ in $[0, \infty)$ hätten also verschiedene $k$-te Potenzen.

*Existenz (Idee wie bei $\sqrt{2}$)*: Für $a > 0$ ist $M = \{y \geq 0 : y^k \leq a\}$ nichtleer *($0 \in M$)* und nach oben beschränkt *(durch $\max(1, a)$)*.
Nach dem Supremumsaxiom existiert $s = \sup M > 0$. Wie für $\sqrt{2}$ (mit dem binomischen Lehrsatz statt $(s \pm \frac{1}{n})^2$) zeigt man:

- $s^k < a$ ist unmöglich: dann läge noch $s + \frac{1}{n}$ in $M$ für großes $n$;
- $s^k > a$ ist unmöglich: dann wäre schon $s - \frac{1}{n}$ eine obere Schranke von $M$.

Also $s^k = a$. □

- In $\mathbb{Q}$ ist dieser Satz falsch ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Die Existenz von Wurzeln ist eine echte Konsequenz der *Vollständigkeit*.
- Für $a, b \geq 0$ folgt aus der Eindeutigkeit: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, denn $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = ab$ und $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$.
- Achtung: $\sqrt{x^2} = |x|$, nicht $x$! *(Später: Wurzelfunktion und Stetigkeit, Proposition 4.3.15.)*

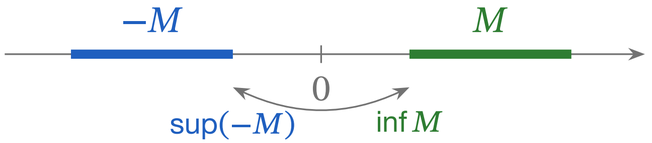
# 2.5 Infimum · Maximum und Supremum

**Proposition 2.5.6.**

(a) Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum $\inf(M)$.

(b) Hat $M \subset \mathbb{R}$ ein Maximum, so hat $M$ auch ein Supremum, und es gilt $\max(M) = \sup(M)$.

*Beweis.* (a) Spiegle $M$ am Nullpunkt: $-M := \{-m : m \in M\}$.
Es gilt: $t$ ist untere Schranke von $M \iff -t$ ist obere Schranke von $-M$ *(Lemma 2.3.3 (d))*.
Also ist $-M$ nichtleer und nach oben beschränkt, besitzt also ein Supremum, und




$$\inf(M) = -\sup(-M).$$

(b) Sei $s = \max(M)$. Dann ist $s$ obere Schranke. Ist $t$ irgendeine obere Schranke, so ist $t \geq s$, da $s \in M$.
Also ist $s$ die kleinste obere Schranke. □

**Fazit:** In $\mathbb{R}$ hat *jede* nichtleere beschränkte Menge ein Supremum und ein Infimum – ein Maximum oder Minimum dagegen nicht unbedingt *(Beispiel* $(0, 1)$*)*.

# 2.5 Archimedisches Prinzip

**Satz 2.5.7 (Archimedisches Prinzip).** $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, d. h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

*Beweis.* Angenommen, $\mathbb{N}$ wäre beschränkt. Nach dem Supremumsaxiom gibt es dann $s = \sup \mathbb{N}$, und $s \geq 1 > 0$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist auch $2n \in \mathbb{N}$, also $2n \leq s$, d. h. $n \leq \frac{s}{2}$. Also ist $\frac{s}{2}$ ebenfalls obere Schranke von $\mathbb{N}$.
Da $s$ die *kleinste* ist: $s \leq \frac{s}{2}$, also $2s \leq s$, also $s \leq 0$. Widerspruch zu $s > 0$. □

**Lemma 2.5.9.** Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

*Beweis.* Nach Archimedes gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Nach Lemma 2.3.3 (h) folgt $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

**Folgerung (Beispiel 2.5.3).** $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$ und $\sup\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

*Denn $0$ ist untere Schranke, und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 2.5.9 ein $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$ (Kriterium von vorhin).*

**Proposition 2.5.8 (Gauß-Klammer).** Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k + 1$. Man schreibt $k = [x]$.
*Beispiele:* $[3{,}7] = 3$, $[-1{,}2] = -2$, $[5] = 5$. *(Achtung: nicht mit der Äquivalenzklasse $[x]$ verwechseln; oft schreibt man $\lfloor x \rfloor$.)*

*Physik: Es gibt keine „unendlich großen“ oder „unendlich kleinen“ reellen Zahlen – mit genügend vielen Schritten der Länge $\varepsilon > 0$ überschreitet man jede Strecke.*

# 2.5 Gauß-Klammer · Dezimalnäherungen

**Zurück zu den Dezimalzahlen.** Mit der Gauß-Klammer bekommt man zu jedem $x \in \mathbb{R}$ Dezimalnäherungen:

$$d_k := \frac{[10^k x]}{10^k} \in \mathbb{Q} \qquad \text{erfüllt} \qquad d_k \le x < d_k + 10^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

*Beweis.* Nach Prop. 2.5.8 ist $[10^k x] \le 10^k x < [10^k x] + 1$. Division durch $10^k > 0$. □

**Beispiel $x = \sqrt{2}$.**

| $k$ | $d_k$ | Probe |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $1^2 \le 2 < 2^2$ |
| 1 | 1,4 | $1{,}96 \le 2 < 2{,}25$ |
| 2 | 1,41 | $1{,}9881 \le 2 < 2{,}0164$ |
| 3 | 1,414 | $1{,}999396 \le 2 < 2{,}002225$ |

- Die $d_k$ sind die abgebrochenen Dezimalentwicklungen: $1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$
- Fehler $< 10^{-k}$: Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch endliche Dezimalbrüche annähern *(noch ein Beweis der Dichtheit!)*.
- Bei $x = 1$ liefert das Verfahren $1{,}000\ldots$ – nie $0{,}999\ldots$

*Was „$x = 1{,}41421356\ldots$ mit unendlich vielen Stellen“ genau bedeutet, nämlich dass die Folge $(d_k)$ gegen $x$* konvergiert*, ist das Thema von Kapitel 3. Die Schulvorstellung der reellen Zahlen wird also nachträglich gerechtfertigt.*

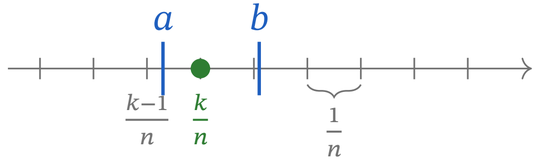
# 2.5 Dichtheit der rationalen Zahlen

**Definition 2.5.10.** Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}$ heißt *dicht* in $\mathbb{R}$, wenn für alle $a < b$ in $\mathbb{R}$ gilt: $(a, b) \cap T \neq \emptyset$.

**Satz 2.5.11.** $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$: Zwischen je zwei reellen Zahlen $a < b$ liegt eine rationale Zahl.

*Beweis.* Wegen $b - a > 0$ gibt es nach Lemma 2.5.9 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < b - a$, also $bn - an > 1$.
Setze $k := [an] + 1 \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$an < k \leq an + 1 < bn, \quad \text{also} \quad a < \frac{k}{n} < b. \qquad \square$$




*Raster mit Maschenweite $1/n < b - a$: Ein Rasterpunkt muss in $(a, b)$ fallen.*

- Wiederholt man das Argument mit $(a, \frac{k}{n})$ usw., so sieht man: In jedem Intervall $(a, b)$ liegen *unendlich viele* rationale Zahlen.
- *Physik/Numerik: Jeder Messwert und jede Gleitkommazahl im Computer ist rational. Die Dichtheit garantiert, dass sich jede reelle Größe beliebig genau durch solche Zahlen annähern lässt, z. B. $\pi \approx 3{,}14159 = 314159/100000$.*

# Zusammenfassung · Mittwoch

**Das sollten Sie nach heute können:**

- Mit Ungleichungen sicher rechnen und Lösungsmengen bestimmen *(Fallunterscheidung; Vorsicht bei negativen Faktoren!)*; Bernoulli-Ungleichung.
- Beträge als Abstände lesen; Dreiecksungleichung und umgekehrte Dreiecksungleichung anwenden.
- Schranken, Maximum/Minimum und Supremum/Infimum bestimmen – und auseinanderhalten.
- Das $\varepsilon$-Kriterium für das Supremum benutzen; einfache Rechenregeln für sup und inf beweisen.
- Erklären, was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet *(Supremumsaxiom)*; Existenz von Wurzeln, Archimedes, Dichtheit von $\mathbb{Q}$.

**Zum Mitdenken:**

(1) Bestimmen Sie sup, inf, max, min von $M = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (soweit vorhanden) mit Begründung.

(2) Zeigen Sie: $\max(a,b) = \frac{1}{2}\big(a + b + |a - b|\big)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Was ist die analoge Formel für $\min(a,b)$?

(3) Zeigen Sie, dass auch die *irrationalen* Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen. *(Tipp: Satz 2.5.11 für $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$.)*

*Nächstes Mal: Kapitel 3 – Folgen und Konvergenz.*