

Überblick über ausgewählte Themen der speziellen Relativitätstheorie

Oskar Godon

16. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Minkowski-Raum	2
2	Transformationen zwischen Inertialsystemen	5
2.1	Galilei-Transformation	5
2.2	Lorentz-Transformation	6
2.3	Spezielle Lorentz-Transformation	8
3	Anhang	10
3.1	Hyperbolische Funktionen	10
	Abbildungsverzeichnis	13
	Quellenverzeichnis	13

1 Minkowski-Raum

Das Folgende Kapitel fasst ausgewählte Teile aus Das (1993) zusammen

Definition 1.1 (Minkowski-Raum). Der *Minkowski-Raum* $(\mathbf{V}_4, g)$ ist ein vierdimensionaler Vektorraum mit $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto x^0 y^0 - \sum_{k=1}^3 x^k y^k$. Ein physikalisches Ereignis $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ ist dabei ein Vektor im Minkowski-Raum.

Dabei ergibt sich g durch die Überlegung, dass das Aussenden eines Lichtsignals als Ereignis (ct_1, x_1, x_1, x_1) und das Empfangen als Ereignis (ct_2, x_2, x_2, x_2) den Abstand

$$ct_2 - ct_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

haben sollte, und damit das verallgemeinerte Abstandsquadrat

$$s_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

Konvention (Einsteinsche-Summen-Konvention) Wann immer ein Index doppelt auftaucht, so ist implizit die Summe mitgemeint. Weiterhin laufen griechische Indizes immer zwischen 0 und 3 römische zwischen 1 und 3. So ist zum Beispiel

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

aber

$$\eta_{ij} x^i x^j \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \eta_{ij} x^i x^j.$$

Lemma 1.2. Das obige g ist eine symmetrische nichtausgeartete Bilinearform vom Index $(1,3,0)$.

Beweis:

Um die Nichtausgeartetheit nachzurechnen genügt es, aufgrund der Symmetrie für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ zu finden, sodass $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$. Sei zunächst $\mathbf{x} = (0, x^1, x^2, x^3)$ dann ist $g(\mathbf{x}, (0, 1, 1, 1)) \neq 0$. Für $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit $x^0 \neq 0$ gilt $g(\mathbf{x}, (1, 0, 0, 0)) \neq 0$. Der Index von 3 ist klar, da die Darstellungsmatrix von g gleich $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ und damit ist die Signatur $\sigma(g) = (1, 3, 0)$. $\square$

Die Bilinearform g lässt sich auch auffassen als Wirkung des metrischen $(0,2)$ -Tensors $\eta_{\mu\nu}$, so ist $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$. Überdies lässt sich nun das Quadrat eines Vektors definieren.

Definition 1.3. Das *Quadrat eines Vektors* in $\mathbf{V}_4$ ist definiert durch

$$\mathbf{x}^2 := \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = g(x^\mu e_\mu, x^\nu e_\nu) = g(e_\mu, e_\nu) x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$$

Definition 1.4. Wir sagen $\sigma(\mathbf{v}) = \sqrt{|\mathbf{v}^2|}$ ist die *Norm-/Separationszahl* von $\mathbf{v}$, wobei wir beachten müssen, dass dies keine Norm im eigentlichen Sinne definiert.

Definition 1.5. Zwei Vektoren in $\mathbf{V}_4$ sind *orthogonal*, falls gilt $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Definition 1.6. Wir sagen $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist eine Orthonormalbasis, falls diese eine Basis für $\mathbf{V}_4$ bilden, orthogonal sind und deren Separationszahl jeweils 1 ist.

Definition 1.7. Das Wegelement ds definieren wir als

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned}$$

Definition 1.8. Wir können drei Arten von Vektoren in $\mathbf{V}_4$ charakterisieren.

1. $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_4$ heißt *raumartig (spacelike)*, falls gilt: $\mathbf{v}^2 < 0$
2. $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_4$ heißt *zeitartig (timelike)*, falls gilt: $\mathbf{v}^2 > 0$
3. $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_4$ heißt *Null-Vektor* oder *lichtartig (lightlike)*, falls gilt: $\mathbf{v}^2 = 0$

Beispiel 1.9. Sei $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbf{V}_4$, dann ist $\mathbf{e}_0$ zeitartig, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sind raumartig, und $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$ ist lichtartig. Um die Aussage zu überprüfen, muss man nun einfach das Vektorquadrat ausrechnen.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0^2 &= \eta_{00} = 1 > 0 \\ \mathbf{e}_1^2 &= \eta_{11} = -1 < 0 \\ (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)^2 &= \mathbf{e}_0^2 + \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 - 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Satz 1.10 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_3 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_4 : v^0 = 0\}$, dann gilt:

$$|v^i w^i| \leq \sqrt{v^i v^i w^j w^j}$$

Mit Gleichheit genau dann wenn $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear unabhängig sind.

Der Beweis ist klar, da es sich hier im Endeffekt einfach um die Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus der linearen Algebra handelt. $\square$

Lemma 1.11. Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_4$ zeitartig, dann gilt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \neq 0$. In anderen Worten: Zwei zeitartige Vektoren können nicht orthogonal sein.

Beweis: Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ zwei zeitartige Vektoren, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^2 = (u^0)^2 - u^j u^j > 0 &\iff (u^0)^2 > |u^j u^j| \\ \mathbf{v}^2 = (v^0)^2 - v^i v^i > 0 &\iff (v^0)^2 > |v^i v^i| \end{aligned}$$

zusammen ergibt sich dann

$$\sqrt{|v^i v^i u^j u^j|} < |u^0 v^0|.$$

Die CS Ungleichung 1.10 liefert uns dann aber

$$|v^i u^j| < \sqrt{|v^i v^i u^j u^j|} < |u^0 v^0|$$

und damit direkt den Widerspruch, denn angenommen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind orthogonal, dann gilt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$$

also

$$|v^i u^j| = |u^0 v^0|.$$

□

Bemerkung 1.12. Ein raumartiger Vektor kann sehr wohl orthogonal sein zu einem Null-Vektor, zum Beispiel $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_3$.

Definition 1.13. Wir sagen $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_4$ ist *zukunftsgerichtet* (*future-pointing*), falls $v^0 > 0$, analog heißen sie *vergangenheitsgerichtet* (*past-pointing*) falls $v^0 < 0$.

Korollar 1.14. Für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_4$ zukunftsgerichtet, zeitartig gilt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0$$

Beweis:

$$v^i w^i \leq |v^i w^i| \stackrel{\text{CS}}{\leq} \sqrt{v^i v^i w^j w^j} \stackrel{1.11}{\leq} |v^0 w^0| = v^0 w^0$$

und damit dann

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^0 w^0 - \underbrace{v^i w^i}_{< v^0 w^0} > 0.$$

□

Lemma 1.15. Zwei Null-Vektoren sind orthogonal genau dann, wenn sie linear abhängig sind.

Beweis: Seien zunächst $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_4$ zwei Null-Vektoren die linear abhängig sind, dann gilt: $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\lambda \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}^2 = 0$.

Seien nun $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_4$ zwei nicht null Null-Vektoren, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^2 &= v^0 v^0 - v^i v^i = 0 \\ \mathbf{w}^2 &= w^0 w^0 - w^i w^i = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= w^0 v^0 - w^j v^j = 0.\end{aligned}$$

Da $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq 0$ muss $w^0 \neq 0, v^0 \neq 0$, wir rechnen weiter

$$(w^j v^j)^2 = (w^0 v^0)^2 = w^0 w^0 \cdot v^0 v^0 = w^j w^j \cdot v^i v^i.$$

Wurzelziehen auf beiden Seiten liefert $|w^j v^j| = \sqrt{w^j w^j v^i v^i}$. Die CS-Ungleichung sagt aber, dass dies nur möglich ist, wenn die “Raum-Komponenten“ linear abhängig sind, es gilt also $v^j = \lambda w^j$. Mithilfe der 3. Gleichung und $w^0 \neq 0$ erhalten wir noch

$$v^0 = \frac{v^i w^i}{w^0} = \frac{\lambda w^i w^i}{w^0} = \frac{\lambda w^0 w^0}{w^0} = \lambda w^0.$$

□

2 Transformationen zwischen Inertialsystemen

Das folgende Kapitel fasst ausgewählte Teile aus Fließbach (2006) zusammen.

Definition 2.1 (Inertialsystem IS). Ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper gleichförmig geradlinig bewegt, heißt Inertialsystem.

2.1 Galilei-Transformation

Nach Galilei gilt, dass alle Naturgesetze in IS die gleiche Form haben.

Intuitiv würde man einen Wechsel von IS nach IS' durch die Galilei-Transformation beschreiben, welche definiert ist durch:

Definition 2.2 (Galilei-Transformation). Sei $\lambda = \pm 1, t_0 \in \mathbb{R}$ und $R \in O(3), \mathbf{v}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ dann definieren wir die Galilei-Transformation durch

$$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda t - t_0 \\ R\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

Physikalisch ist diese Definition intuitiv, da eine Rotation, gleichförmige geradlinige Relativbewegung oder Translation sowie Zeitumkehr/-verschiebung zwischen IS und IS' keinen Einfluss auf die physikalischen Gesetze haben sollte.

Mathematisch können wir mit unserer Definition 2.1 auch nachrechnen, dass T zwischen IS und IS' transformiert. Sei dazu

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0.$$

Dann gilt:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 (R\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{a})}{d(\lambda t - t_0)^2} = \lambda \frac{d^2}{dt^2} (R\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{a}) = \lambda R \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = 0.$$

Nun stellt man aber einfach fest, dass die Galilei-Transformation nicht die Lichtgeschwindigkeit konstant lässt, was ein Widerspruch zum Galileischen Äquivalenzprinzip ist. Dementsprechend muss man eine Transformation finden, die mit der Konstanz verträglich ist. Dies führt uns zur Lorentz-Transformation.

2.2 Lorentz-Transformation

Wir machen den Ansatz

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} + \mathbf{a} \text{ bzw. } x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Dies ist sinnvoll, da, wie wir bereits bei der Galilei-Transformation gesehen haben, eine Multiplikation mit Matrizen zwischen Inertialsystemen transformiert. Die Verschiebung um $\mathbf{v}t$ müssen wir hier nicht explizit hinschreiben, da diese implizit mit in unserer Raumkoordinate enthalten ist.

Wobei $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ eine Matrix ist und $\mathbf{a} = (a^\mu) \in \mathbb{R}^4$ eine Raum-Zeittranslation. Ist $\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$ so spricht man von einer homogenen Lorentz-Transformation.

Lemma 2.3. Das Wegelement ds bleibt unter unserem Ansatz invariant, Λ ist gegeben durch $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ und $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$.

Beweis:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} d(\Lambda x + \mathbf{a})^\mu d(\Lambda x + \mathbf{a})^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho dx^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma \\ &\stackrel{!}{=} \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma = ds^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \iff \Lambda^T\eta\Lambda = \eta$$

gelten muss. Insbesondere erhält man für $\rho = \sigma = 0$, dass

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma &= \eta_{00} \\ \Lambda^0{}_0 - \underbrace{\sum_{\mu=0}^3 (\Lambda^\mu{}_0)^2}_{\geq 0} &= 1 \\ \implies |\Lambda^0{}_0| &\geq 1. \end{aligned}$$

□

Korollar 2.4. Lorentz-Transformationen haben die Determinante 1 und lassen das Minkowski-Pseudoskalarprodukt invariant.

Beweis: Wegen $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$ und $\det(\eta) \neq 0$ ist $\det(\Lambda) = \pm 1$.

$$g(\Lambda\mathbf{v}, \Lambda\mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \underbrace{\Lambda^T\eta\Lambda}_{\eta} \mathbf{w} = \mathbf{v}^T\eta\mathbf{w} = g(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

□

Wir nennen ein Λ mit den obigen Eigenschaften eine Lorentz-Transformation.

Ist $\det(\Lambda) = +1$ so spricht man von einer eigentlichen Transformation. Ist $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, bleibt also die Zeitrichtung invariant, so spricht man von einer orthochronen Transformation.

Die Matrizen der Lorentz-Transformation bilden eine Gruppe, die Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$. Möchte man nun noch die Translation mit einbeziehen, so kann man das semidirekte Produkt von $\mathcal{L}$ mit der Gruppe aller Translationen auf $\mathbf{V}_4$ bilden durch $(\Lambda, \mathbf{a}) \cdot (\Lambda', \mathbf{a}') := (\Lambda \cdot \Lambda', \mathbf{a} + \Lambda(\mathbf{a}'))$ und erhält die Poincaré-Gruppe.

Die eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen bilden eine Untergruppe der $\mathcal{L}$, die $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

2.3 Spezielle Lorentz-Transformation

Wir möchten nun die spezielle Lorentz-Transformation, den Lorentz-Boost herleiten. Dieser wird verwendet, um zwei zueinander relative Bezugssysteme ineinander umzurechnen und ist ein Element von $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Dazu betrachten wir erstmal allgemeine Eigenschaften einer Matrix in $\mathcal{L}$. Seien dazu $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ und

$$\Lambda = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\Lambda^T \eta \Lambda = (g(v^\mu, v^\nu))_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} \eta.$$

Es muss also $\mathbf{v}_0^2 = 1$ und $\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_3^2 = -1$ und $\mathbf{v}_i$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}_j$ für $i \neq j$.

Betrachten wir nun erstmal nur solche Matrizen, die keine räumliche Rotation oder Translation mit einbeziehen, da sich diese nicht zur Galilei-Transformation unterscheiden. Sei also $x^2 = x'^2$, $x^3 = x'^3$. IS' bewegt sich relativ zu IS mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Damit hat Λ also die Form

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Unsere Vorüberlegungen ergeben nun

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 = 1, \quad -(\Lambda^1{}_1)^2 + (\Lambda^0{}_1)^2 = -1, \quad \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 = 0.$$

Die Form der obigen Gleichungen lässt natürlich direkt auf den hyperbolischen Pythagoras schließen, da der $\sinh$ surjektiv auf $\mathbb{R}$ ist. Wir können o. E. sagen $\Lambda^1{}_0 = -\sinh(\psi)$ und $\Lambda^0{}_1 = -\sinh(\varphi)$. Es folgt direkt $\Lambda^0{}_0 = \pm \cosh(\psi)$ und $\Lambda^1{}_1 = \pm \cosh(\varphi)$. Da wir eine eigentlich Transformation wollen ($\det \Lambda = +1$), können wir die negativen Vorzeichen ausschließen.

Die Orthogonalitätsbedingung liefert

$$-\cosh \psi \sinh \varphi + \sinh \psi \cosh \varphi = 0 \iff \tanh \psi = \tanh \varphi \iff \psi = \varphi.$$

Es ist also

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi) & -\sinh(\psi) \\ -\sinh(\psi) & \cosh(\psi) \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun die folgende Grafik:

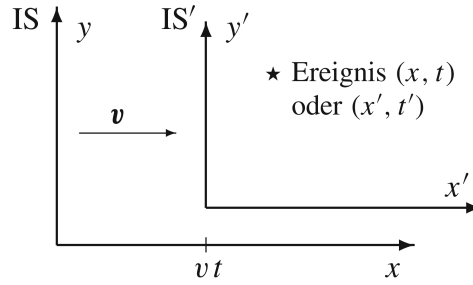


Abbildung 1: Relativbewegung von IS zu IS' (s. Fließbach; 2006, S. 9).

Hieraus ergibt sich, dass für den Beobachter in IS der Koordinatenursprung von IS' an $x^1 = vt$ ist. Da unsere Lorentz-Matrix ja genau die Koordinaten bzgl. IS' angeben soll, muss gelten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 ct + \Lambda^0_1 x^1 \\ \Lambda^1_0 ct + \Lambda^1_1 x^1 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich IS' muss aber gelten

$$0 = x'^1$$

was uns zu

$$\begin{aligned} 0 = x'^1 &= \Lambda^1_0 ct + \Lambda^1_1 x^1 = \Lambda^1_0 ct + \Lambda^1_1 vt \\ 0 &= -ct \sinh \psi + vt \cosh \psi \\ \tanh \psi &= \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c} \end{aligned}$$

führt.

Dadurch können wir nun die Lorentz-Transformation als Funktion der Geschwindigkeit ausdrücken. Mithilfe von Lemma 3.2 erhalten wir dann:

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Lambda^0_1 = \Lambda^1_0 = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Definition 2.5 (Rapidität). Wir nennen $\psi = \operatorname{arctanh} \frac{v}{c}$ aus der obigen Rechnung die *Rapidität*.

Bei der Multiplikation von zwei Matrizen eines Lorentz-Boosts erhält man mithilfe von Lemma 3.2

$$\begin{pmatrix} \cosh(\psi_1) & -\sinh(\psi_1) \\ -\sinh(\psi_1) & \cosh(\psi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\psi_2) & -\sinh(\psi_2) \\ -\sinh(\psi_2) & \cosh(\psi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi_1 + \psi_2) & -\sinh(\psi_1 + \psi_2) \\ -\sinh(\psi_1 + \psi_2) & \cosh(\psi_1 + \psi_2) \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir also für die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = c \tanh \psi$ auch wieder mithilfe von Lemma 3.2

$$v = c \cdot \tanh(\psi_1 + \psi_2) = c \cdot \frac{\tanh \psi_1 + \tanh \psi_2}{1 + \tanh \psi_1 \tanh \psi_2} = c \cdot \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

3 Anhang

3.1 Hyperbolische Funktionen

Bevor wir mit der Lorentz-Transformation beginnen, führen wir noch grundlegende Eigenschaften von hyperbolischen Funktionen ein.

Definition 3.1. Wir nennen

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow [1, \infty), \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh : \mathbb{R} &\rightarrow (-1, 1), \quad x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}$$

hyperbolische Funktionen.

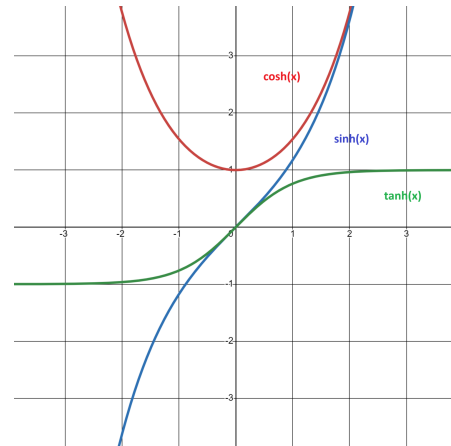


Abbildung 2: Hyperbolische Funktionen
(eigene Darstellung)

Lemma 3.2. Für hyperbolische Funktionen gelten die folgenden Eigenschaften:

- | | |
|--|--|
| i) $\cosh x - \sinh x = 1$ | vi) $\cosh(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| ii) $\sinh x = -i \sin(ix)$ | vii) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ |
| iii) $\cosh x = \cos(ix)$ | viii) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ |
| iv) $\operatorname{arctanh} x = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ | ix) $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$ |
| v) $\sinh(\operatorname{arctanh} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | |

Beweis:

i) Die Eigenschaft folgt direkt durch Einsetzen der Definition:

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

ii)

$$-i \sin(ix) = -i \cdot \frac{1}{2i} (e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}) = \sinh x$$

iii) Analog (ii)

iv)

$$\begin{aligned} y = \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \\ \iff \frac{2}{1-y} = e^{2x} + 1 &\iff \frac{1+y}{1-y} = e^{2x} \iff x = \log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \\ \implies \operatorname{arctanh}(y) &= \log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \end{aligned}$$

v) Da $\frac{1+x}{1-x}$ für $-1 < x < 1$ immer positiv ist, können wir die Beträge ignorieren und rechnen:

$$\begin{aligned} \sinh(\operatorname{arctanh}(x)) &= \sinh\left(\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right) \\ &= \frac{\exp\left(\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right) - \exp\left(-\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} - \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

vi) Analog zu (iii)

vii)

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &\stackrel{(ii)}{=} -i \sin(ix+iy) \\ &= -i \sin(ix) \cos(iy) - i \sin(iy) \cos(ix) \\ &\stackrel{(ii)+(iii)}{=} \sinh(x) \cosh(y) + \sinh(y) \cosh(x) \end{aligned}$$

viii) Analog (vii)

ix)

$$\begin{aligned}\tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} \\ &= \frac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} \\ &= \frac{1}{\cosh x \cosh y} \frac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{1 + \tanh x \tanh y} \\ &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

□

Abbildungsverzeichnis

1	Relativbewegung von IS zu IS'	9
2	Hyperbolische Funktionen	10

Quellenverzeichnis

[Das 1993] DAS, Anadijiban: *The Special Theory of Relativity*. First Edition. New York : Springer-Verlag, 1993. – ISBN 0-387-94042-1

[Fließbach 2006] FLIESSBACH, Torsten: *Allgemeine Relativitätstheorie/ Torsten Fließbach*. 5. Aufl. Heidelberg : Spektrum, 2006. – ISBN 9783827416858