UNIVERSITÄT LEIPZIG

Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“
WiSe 2018/2019
Nachtermin

Allgemeine Hinweise

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Nutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Weder elektronische Rechenmaschinen noch Aufzeichungen sind als Hilfsmittel zugelassen.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie insgesamt 120 Minuten Zeit.
- Sämtliche Lösungswege sind in fachlich korrekter Form zu dokumentieren.

Daten

- Name, Vorname:
- Matrikelnummer:

Bewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							

Note:

VIEL ERFOLG.

Aufgabe 1 - Rechnen in verschiedenen Stellenwertsystemen

Lösen Sie die Teilaufgaben a) bis c) schriftlich und ohne in das Dezimalsystem umzurechnen.

a) $(12302)_4 - (3213)_4$ (2)

b) $(432)_5 \cdot (34)_5$ (3)

c) Ermitteln Sie den Rest, den die Zahl $(122130)_6$ bei der Division durch $(32)_6$ lässt. (3)

d) Im Stellenwertsystem zur Basis b mit $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ hat Kurt die folgende Rechenaufgabe korrekt gelöst:

$$(344)_b = (22)_b \cdot (14)_b + (3)_b.$$

Bestimmen Sie den Wert für b. (2)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 2 - Beweis durch vollständige Induktion

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beweises durch vollständige Induktion, dass der Term

$$3^{n-1} \cdot 2^{2n-1} + 5^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von 7 liefert.

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 3 - modulare Arithmetik

In der folgenden Aufgabe sollen die Reste, welche verschiedene Potenzen von 3457 bei der Division durch 11 lassen, untersucht werden.

a) Zeigen Sie, dass

$$3457^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

gilt. (3)

b) Untersuchen Sie, welchen Rest die Zahl

$$3457^{3457}$$

bei der Division durch 11 lässt. (2)

c) Begründen Sie, dass

$$2 \cdot 3457^{29} + 3457^{16}$$

ein Vielfaches von 11 ist. (3)

d) Bestimmen Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass n ein Vielfaches von 6 ist und 3457^n bei der Division durch 11 den Rest 5 lässt. (2)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 4 - Abbildungen

Durch

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}\ ,\ n \mapsto \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left((-1)^n \cdot (2n+1)\right)$$

ist eine Abbildung definiert. Hierbei ist $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Wertetabelle von f. (2)

n	0	1	2	3	4	
$f(n)$						-42

Nun soll bewiesen werden, dass f eine bijektive Abbildung ist. Dafür wird zunächst mit Hilfe einer Fallunterscheidung gezeigt, dass f surjektiv ist.

b) Sei $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \leq 0$ beliebig ausgewählt. Begründen Sie, dass $-2z \in \mathbb{N}_0$ gilt und zeigen Sie, dass $f(-2z) = z$ gilt. (2)

c) Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \mathbb{Z}$ mit $z > 0$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n) = z$ gibt. (3)

Abschließend muss noch gezeigt werden, dass f injektiv ist.

d) Beweisen Sie, dass f injektiv ist. (3)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 5 - algebraische Strukturen

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Für alle $a, b \in M$ sei

$$a \circ b = ggT(12, a + b - 1).$$

a) Geben Sie die Verknüpfungstafel für $\circ$ an. Begründen Sie mit Hilfe der Tafel, dass $\circ$ eine innere Verknüpfung in M ist und dass $\circ$ eine kommutative Verknüpfung ist. (4)

b) Begründen Sie, dass 2 das inverse Element von 4 bezüglich $\circ$ ist. (2)

c) Zeigen Sie, dass $(M, \circ)$ keine Gruppe ist. (2)

d) Geben Sie die Lösung der Gleichung $x \circ 4 = 3$ in M an. Geben Sie Werte für $a, b \in M$ an, so dass die Gleichung $a \circ x = b$ in M keine Lösung hat. (2)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 6 - der euklidische Algorithmus

Im Rahmen einer Mathematikolypmiade soll Kurt nachweisen, dass der Bruch

$$\frac{28n+5}{7n+3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht weiter gekürzt werden kann. Um diese Aufgabe zu lösen, sucht Kurt zunächst $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass

$$(28n+5)x + (7n+3)y = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

a) Erklären Sie, dass dieser Ansatz im Sinne der Aufgabenstellung sinnvoll ist. Zeigen Sie, dass bei diesem Ansatz das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x + y &= 0 \\ 5x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

zu lösen ist. Lösen Sie dieses Gleichungssystem und begründen Sie, dass dadurch die ursprüngliche Aufgabe NICHT gelöst wurde. (4)

Nun möchte Kurt die ursprüngliche Aufgabe mit Hilfe des euklidischen Algorithmus lösen. Dafür will er zunächst den Fall $n = 1$ untersuchen.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, dass im Falle $n = 1$ die beiden Zahlen teilerfremd sind. Stellen Sie mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus die Zahl 1 als Linearkombination der beiden Zahlen dar. (2)

Für den Fall $n > 1$ will Kurt den euklidischen Algorithmus mit Hilfe der gegeben Terme ausführen. Er notiert folgende erste Zeile:

$$(28n+5) = 3 \cdot (7n+3) + (7n-4).$$

c) Bei der Division mit Rest in der Menge der natürlichen Zahlen müssen die auftretenden Reste größergleich Null und kleiner als der Divisor sein. Zeigen Sie, dass dies in der von Kurt notierten Zeile der Fall ist. Setzen Sie den euklidischen Algorithmus bis zu seinem Ende fort und begründen Sie, dass damit die ursprüngliche Aufgabe gelöst ist. (4)

erreichbare Punktanzahl: 10