

Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“ WiSe 2017/2018 Nachtermin

Allgemeine Hinweise

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Nutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Weder elektronische Rechenmaschinen noch Aufzeichnungen sind als Hilfsmittel zugelassen.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie insgesamt 120 Minuten Zeit.
- Sämtliche Lösungswege sind in fachlich korrekter Form zu dokumentieren.

Daten

- Name, Vorname:
- Matrikelnummer:

Bewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							

Note: _____

VIEL ERFOLG.

Aufgabe 1 - Rechnen in verschiedenen Stellenwertsystemen

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben a) bis c) schriftlich, ohne in das Dezimalsystem umzurechnen.

a) $(43021)_5 - (3414)_5$ (2)

b) $(312)_4 \cdot (23)_4$ (3)

c) Ermitteln Sie den Rest, den die Zahl $(34231)_6$ bei der Division durch $(53)_6$ lässt. (3)

d) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{N}$, für die gilt: $(122)_b = (26)_{10}$. (2)

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 2 - Beweis durch vollständige Induktion

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beweises durch vollständige Induktion, dass der Term

$$5^{(2n+1)} + 13^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von 6 liefert.

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 3 - Relationen

Durch

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : a \cdot b = k^2\}$$

ist auf der Menge $\mathbb{N}$ eine Relation definiert.

a) Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. (6)

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr (W) oder falsch (F) sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (2)

A1: $(1, 25) \in R$

A2: $(6, 15) \in R$

c) Geben Sie drei weitere Elemente der Äquivalenzklasse $[12]_R$ an. (2)

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 4 - lineare Kongruenzen

In einer Matheolympiade wird die folgende Aufgabe gestellt:

Auf einer Wiese stehen sehr viele Kinder. Stellen sich diese in Reihen zu jeweils 19 Personen auf, dann bleiben am Ende zwei Kinder übrig. Stellen sich die Kinder in Reihen zu jeweils 11 Personen auf, dann fehlen am Ende drei Kinder, um die letzte Reihe zu vervollständigen.

Ermittle, wie viele Kinder auf der Wiese stehen. Gib alle Möglichkeiten an.

- a) Begründen Sie, dass die Lösung der ursprünglichen Aufgabe mit Hilfe der linearen Kongruenz

$$11x \equiv 5 \pmod{19}$$

bestimmt werden kann. (2)

- b) Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, welche diese Kongruenz erfüllen.
Bestimmen Sie anschließend die kleinste Anzahl der Kinder, welche die oben gestellten Bedingungen erfüllt.

Untersuchen Sie zudem, ob es eine Anzahl von Kindern gibt, die zusätzlich zu den oben gestellten Bedingungen die folgende erfüllt: Stellen sich die Kinder in Reihen zu jeweils zehn Personen auf, bleibt am Ende niemand übrig. (8)

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 5 - algebraische Strukturen

Gegeben sei die Menge $\mathbb{Z}$. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ sei

$$a \oplus b = a + b - 2.$$

Nun soll untersucht werden, ob $(\mathbb{Z}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

- a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\oplus$ kommutativ ist. (2)
- b) Weisen Sie nach, dass 2 das neutrale Element in $\mathbb{Z}$ bezüglich $\oplus$ ist. (2)
- c) Geben Sie das inverse Element von 5 bezüglich $\oplus$ an. Geben Sie zudem das inverse Element von -3 bezüglich $\oplus$ an. Zeigen Sie nun, dass jede Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ein inverses Element bezüglich $\oplus$ hat. (4)
- d) Weisen Sie nach, dass die Verknüpfung $\oplus$ assoziativ ist. (2)

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 6 - der euklidische Algorithmus

Kurt hat die Primfaktorzerlegungen der Zahlen 62 und 41 betrachtet und dabei festgestellt, dass diese teilerfremd sind.

- a) Stellen Sie mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus die Zahl 1 als Linearkombination von 62 und 41 dar. (3)
- b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei teilerfremde Zahlen. Sei $c \in \mathbb{Z}$ eine beliebige Zahl. Zeigen Sie, dass es stets ganze Zahlen k und l gibt, so dass $ak + bl = c$ gilt. (3)

Wird in den Termen $15n + 2$ und $10n + 1$ für n die Zahl 4 eingesetzt, dann entstehen die Zahlen 62 und 41.

- c) Zeigen Sie, dass $15n + 2$ und $10n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind. (4)

erreichbare Punktzahl: 10