UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Klausur zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“
WiSe 2018/2019
Ersttermin

Allgemeine Hinweise

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Nutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Weder elektronische Rechenmaschinen noch Aufzeichungen sind als Hilfsmittel zugelassen.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie insgesamt 120 Minuten Zeit.
- Sämtliche Lösungswege sind in fachlich korrekter Form zu dokumentieren.

Daten

- Name, Vorname:
- Matrikelnummer:

Bewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							

Note: ______________

VIEL ERFOLG.

Aufgabe 1 - Rechnen in verschiedenen Stellenwertsystemen

Lösen Sie die Teilaufgaben a) bis c) schriftlich und ohne in das Dezimalsystem umzurechnen.

a) $(25341)_7 - (6456)_7$ (2)

b) $(342)_5 \cdot (43)_5$ (3)

c) Ermitteln Sie den Rest, den die Zahl $(321042)_6$ bei der Division durch $(45)_6$ lässt. (3)

d) Im Stellenwertsystem zur Basis b mit $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ hat Kurt die folgende Rechenaufgabe korrekt gelöst:

$$(33)_b \cdot (11)_b = (403)_b.$$

Bestimmen Sie den Wert für b. (2)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 2 - Beweis durch vollständige Induktion

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beweises durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 3 - lineare Kongruenzen

In der methodisch geordneten Aufgabensammlung aus dem Jahr 1880 befindet sich folgende Aufgabe:

> Die Zahl 444 ist in zwei Teile zu zerlegen, so dass der erste um 4 vermehrt durch 11 und der zweite um 7 vermindert durch 17 teilbar ist.

Um diese Aufgabe zu lösen, stellt Kurt folgende Gleichung auf:

$$444 = (11x - 4) + (17y + 7)$$

wobei $x, y \in \mathbb{Z}$ gelten soll.

a) Begründen Sie, dass die von Kurt aufgestellte Gleichung einen sinnvollen Ansatz zur Lösung der ursprünglichen Aufgabe darstellt.
Zeigen Sie, dass diese Gleichung in die lineare Kongruenz

$$441 \equiv 17y \pmod{11}$$

umgeformt werden kann.
Weisen Sie nach, dass diese Kongruenz lösbar ist. (3)

b) Ermitteln Sie alle $y \in \mathbb{Z}$, welche diese Kongruenz erfüllen.
Bestimmen Sie alle Paare von natürlichen Zahlen, welche die ursprüngliche Aufgabe lösen. (7)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 4 - Abbildungen

Durch

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ (a, b) \mapsto (a + b, a - b)$$

ist eine Abbildung definiert.

a) Geben Sie $f((5, 13))$ und $f((-3, -41))$an. (2)

b) Ermitteln Sie $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f((a, b)) = (3, -17)$. (2)

c) Kurt möchte prüfen, ob f surjektiv ist und er sucht ein $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$f((a, b)) = (0, 3).$$

Zeigen Sie, dass es kein $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f((a, b)) = (0, 3)$ gibt. Erklären Sie, was dies für die Surjektivität von f bedeutet. (3)

d) Beweisen Sie, dass f injektiv ist. (3)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 5 - Relationen

Durch

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : 5a + 2b = 7k\}$$

ist auf der Menge $\mathbb{N}$ eine Relation definiert.

a) Entscheiden Sie, ob $(9, 2) \in R$ gilt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (1)

b) Bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $(n, 2n + 1) \in R$ gilt. (2)

c) Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. (6)

d) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die in der Äquivalenzklasse $[100]_R$ liegt. (1)

erreichbare Punktanzahl: 10

Aufgabe 6 - der euklidische Algorithmus

Es soll untersucht werden, ob die Zahlen $5n + 2$ und $5n - 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind.

a) Zunächst wird der Fall $n = 7$ betrachtet.
Zeigen Sie mit Hilfe des euklidischen Alogrithmus, dass die beiden dadurch entstehenden Zahlen teilerfremd sind. Stellen Sie mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus die Zahl 1 als Linearkombination der beiden Zahlen dar. (3)

b) Kurt hat weitere Fälle untersucht und dabei folgende korrekte Rechnungen dokumentiert:

$n = 4:$	$\mathrm{ggT}(22, 17) = 1$	denn	$22 \cdot 7 + 17 \cdot (-9) = 1$
$n = 5:$	$\mathrm{ggT}(27, 22) = 1$	denn	$27 \cdot 9 + 22 \cdot (-11) = 1$
$n = 6:$	$\mathrm{ggT}(32, 27) = 1$	denn	$32 \cdot 11 + 27 \cdot (-13) = 1$

Stellen Sie mit Hilfe dieser Rechnungen eine Linearkombination von $5n + 2$ und $5n - 3$ auf, die den Wert 1 hat. Weisen Sie nach, dass die von Ihnen aufgestellte Linearkombination die geforderte Eigenschaft hat. (2)

c) Kurt will nun den euklidischen Algorithmus mit den Termen $5n + 2$ und $5n - 3$ durchführen. Dafür notiert er folgende erste Zeile:

$$5n + 2 = 1 \cdot (5n - 3) + 5.$$

Setzen Sie den euklidischen Algorithmus bis zum Ende fort. Begründen Sie mit Hilfe Ihrer Rechnung, dass $5n + 2$ und $5n - 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind. (3)

d) Begründen Sie ohne Verweis auf die Linearkombination oder den euklidischen Algorithmus, dass $5n + 2$ und $5n - 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind. (2)

erreichbare Punktanzahl: 10