

Klausur zur Vorlesung
„Grundlagen der Mathematik“
WiSe 2017/2018
Ersttermin

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Allgemeine Hinweise

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Nutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Weder elektronische Rechenmaschinen noch Aufzeichnungen sind als Hilfsmittel zugelassen.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie insgesamt 120 Minuten Zeit.
- Sämtliche Lösungswege sind in fachlich korrekter Form zu dokumentieren.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
---------	---	---	---	---	---	---	--------

Punkte							
--------	--	--	--	--	--	--	--

Note: _____

VIEL ERFOLG.

Aufgabe 1 - Rechnen in verschiedenen Stellenwertsystemen

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben a) bis c) schriftlich, ohne in das Dezimalsystem umzurechnen.

a) $(4302)_5 + (13243)_5$ (2)

b) $(324)_6 \cdot (51)_6$ (3)

c) Ermitteln Sie den Rest, den die Zahl $(34063)_7$ bei der Division durch $(24)_7$ lässt. (3)

d) Zeigen Sie, dass $(132)_4$ keine Primzahl ist. Beweisen Sie, dass für alle $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 4$ gilt: $(132)_b$ ist keine Primzahl. (2)

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 2 - Beweis durch vollständige Induktion

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beweises durch vollständige Induktion, dass der Term

$$22^n + 13^{(2n-1)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von 7 liefert.

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 3 - lineare Kongruenzen

In der METHODISCH GEORDNETEN AUFGABENSAMMLUNG aus dem Jahre 1880 befindet sich folgende Aufgabe:

Multipliziert man eine ganze Zahl mit 71 und eine zweite ganze Zahl mit 21, so ist das erste Produkt um 10 größer als das zweite. Wie heißen diese Zahlen?

a) Begründen Sie, dass die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der linearen Kongruenz

$$71x \equiv 10 \pmod{21}$$

bestimmt werden kann. (1)

b) Weisen Sie nach, dass diese Kongruenz lösbar ist. Ermitteln Sie anschließend alle $x \in \mathbb{Z}$, welche diese Kongruenz erfüllen. Geben Sie die drei größten negativen ganzen Zahlen an, welche die Kongruenz erfüllen. (6)

c) Untersuchen Sie, ob es unter den ersten 50 natürlichen Zahlen zwei gibt, welche die ursprüngliche Aufgabe lösen. (3)

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 4 - algebraische Strukturen

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Für alle $a, b \in M$ sei $a \circ b = c$ wobei c der Rest ist, den $3 \cdot (a + b)$ bei der Division durch 5 lässt.

- Geben Sie die Verknüpfungstafel für $\circ$ an. Begründen Sie, dass $\circ$ eine innere Verknüpfung in M ist und dass $\circ$ eine kommutative Verknüpfung ist. Begründen Sie außerdem, dass $(M, \circ)$ keine Gruppe ist. (5)
- Untersuchen Sie, ob die Verknüpfung $\circ$ für $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ und $a_3 = 4$ assoziativ ist. (2)
- Geben Sie den Wert $x \in M$ an, der die Gleichung $3 \circ x = 1$ löst. Nun seien $a, b \in M$ beliebig. Begründen Sie, dass die Gleichung $a \circ x = b$ in M stets eindeutig lösbar ist. (3)

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 5 - Abbildungen

Durch

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, (a, b) \mapsto a \cdot b - 1$$

ist eine Abbildung beschrieben. Hierbei ist $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Geben Sie $f((5, 7))$ an. Geben Sie ein Paar $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, so dass $f((a, b)) = 99$ gilt. (2)
- Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist. (2)
- Weisen Sie nach, dass f surjektiv ist. (3)
- Beweisen Sie die folgende Aussage. (3)

Seien A, B und C drei beliebige Mengen und $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Abbildungen. Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ eine surjektive Abbildung. Hierbei ist $g \circ f$ die Hintereinanderausführung von g und f , d.h. es gilt: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

erreichbare Punktzahl: 10

Aufgabe 6 - modulare Arithmetik

Die Zahl

$$2018^{2018}$$

ist im Dezimalsystem eine 6670-stellige Zahl.

- Untersuchen Sie, welchen Rest diese Zahl bei der Division durch 13 lässt. (5)
- Begründen Sie, dass folgende Aussage wahr ist. (5)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2018^{(n)} + 2018^{(n+1)} + 2018^{(n+2)}$ ein Vielfaches von 13.

erreichbare Punktzahl: 10