Aufgabe 1 a) Geben Sie eine Definition für die Kompaktheit eines metrischen Raumes (X, d) an.

b) Man betrachte die Menge

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit der euklidischem Metrik in $\mathbb{R}^2$, wobei

$$M_1 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, M_2 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right) . \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Ist M kompakt? *Hinweis*: Wann ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ kompakt?

Aufgabe 2 a) Geben Sie Definition des Infimums einer Teilmenge einer geordneten Menge an.

b) Berechnen Sie $\inf \{\Phi(z) \mid z \in M\}$, wobei

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x^2}, x > 0 \right\}, \quad \Phi(x, y) = y.$$

Wird das Infimum in M angenommen?

c) Ist die in b) definierte Menge M abgeschlossen?

d) Sei $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Gibt es eine auf ganz S stetige Funktion, die ihr Infimum nicht annimmt? Begründen Sie Ihre Aussage!

Hinweis: Skizzieren Sie eventuell die Menge M.

Aufgabe 3 a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ und $p \in X$. Geben Sie eine Definition dafür an, dass p ein Häufungspunkt von M ist.

b) Sei $(Y, \hat{d})$ eine weiterer metrischer Raum, $p \in M \subset X$ und $\Phi : M \mapsto Y$ eine Abbildung. Geben Sie eine Definition für die Stetigkeit von Φ im Punkt p an.

c) Sei $f : M \mapsto \mathbb{R}$ mit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

In welchen Häufungspunkten von $M \subset \mathbb{R}^2$ hat f keinen Grenzwert? (Begründung!)

Aufgabe 4 Berechnen Sie

$$\int_0^2 f \, d\alpha, \quad \text{wobei} \quad f(x) = x, \; \alpha(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - \frac{1}{x^2} & \text{für} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 5 Ist die Funktion

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ 2-(x-2)^2 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 6 Die Folgen $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{(\hat{a}_n, \hat{b}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ seien für beliebige $(a_0, b_0), (\hat{a}_0, \hat{b}_0) \in \mathbb{R}^2, a_0 > 0, b_0 > 0, \hat{a}_0 > 0, \hat{b}_0 > 0$ induktiv definiert durch

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n}{b_n}, a_n\right) \quad \text{bzw} \quad (\hat{a}_{n+1}, \hat{b}_{n+1}) = \left(\frac{\hat{a}_n}{1+\hat{b}_n}, \hat{a}_n\right).$$

a) Welche Häufungspunkte hat die Folge $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$?

b) Welche Häufungspunkte hat die Folge $\{(\hat{a}_n, \hat{b}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die allgemeine Form mehrerer Folgenglieder.

Aufgabe 7 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^{2n}}$ im gewöhnlichen Sinne und für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert sie absolut?