Vorlesung

„Grundwissen Geometrie"

Universität Leipzig

Wintersemester 2018/19

§0 Einführung

Geometrie:

Benutzung dieses Wortes bereits in der Antike; es bedeutet Erdmessung; die Entstehung und Entwicklung der Geometrie beruht auf praktischen Bedürfnissen.

Die Orientierung im Raum und das Verstehen der uns umgebenden physikalischen Welt gehören zu den Grundbedürfnissen der menschlichen Gesellschaft.

Bestimmungen von Entfernungen sowie von Flächen- und Rauminhalten wurden bereits im 2. Jahrtausend v. Chr. durchgeführt.

Geometrische Erkenntnisse sind unter anderem wichtig bei Kanalbauten - zum Zwecke einer notwendigen künstlichen Bewässerung.

Geometrie im Schulunterricht:

Schüler sollen sich - unter anderem - ein gutes Anschauungsvermögen aneignen, sie werden im Zusammenhang mit der Beschreibung anschaulich geometrischer Sachverhalte erst langsam an mathematische Denkweisen herangeführt.
Von einer gewissen Stufe an werden Beweise gegeben.

Nachteil einer zu anschaulichen Vorgehensweise:

Gewisse anschaulich plausible Vermutungen erweisen sich bei exakten Untersuchungen als falsch.

Geometrie als Wissenschaft:

Rein deduktive Theorie;
systematischer Aufbau der Geometrie:
Angabe eines Axiomensystems;
die zu beweisenden Sätze werden aus den Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen streng logisch hergeleitet.
Die Anschauung spielt nur beim Suchen nach Beweisen eine Rolle, hat aber keinerlei Beweiskraft.

Zusammenhang zur Realität:

Bei der Auswahl der Axiome geht man von der Anschauung aus.

Analytische Geometrie:

In der Ebene bzw. im Raum werden geometrische Sachverhalte mit Hilfe eines Koordinatensystems und der Vektorrechnung gewonnen.

Synthetische Geometrie:

Es wird ein Axiomensystem zugrunde gelegt, das keinen Gebrauch von Koordinaten macht. Die Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems wird allerdings durch Angabe eines Modells, nämlich durch das Studium der Vektorräume $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ - also durch Angabe eines Koordinatensystems - nachgewiesen. Dementsprechend wird zwar nicht in unserem Aufbau der Theorie, wohl aber in Beispielen mit Koordinaten gerechnet. In diesen Beispielen werden unsere Axiome nicht gefordert, sondern verifiziert.

Bemerkung:

In der heutigen Forschung bestehen Wechselbeziehungen zwischen den verschiedenen Aspekten der Geometrie.

Notwendige Vorkenntnisse:

Gruppen, Körper, reelle Zahlen - bezeichnet mit $\mathbb{R}$.

Literatur

Johannes Böhm, Walter Börner, Eike Hertel,
Otto Krötenheerdt, Werner Mögling, Ludwig Stammler:
Axiomatischer Aufbau der Euklidischen Geometrie,
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1988

§ 1 Inzidenz und Parallelität

Bemerkung 1.1:

Die Geometrie der Euklidischen Ebene basiert auf 11 Axiomen (A 1) - (A 11), die aber erst nach und nach angegeben werden.

Definition 1.2:

Sei E eine Menge und $G \subseteq \mathcal{P}(E)$ mit $G \neq \emptyset$. Dann heißt das Paar (E, G) - oder kurz die Menge E - eine Ebene mit Punktmenge E und G als dem System seiner Geraden, falls folgende Axiome erfüllt sind:

(A 1) Zu $A, B \in E$ mit $A \neq B$ gibt es genau eine Gerade $g = AB = g(A, B) \in G$ mit $A, B \in g$.

(A 2) Jede Gerade $g \in G$ enthält mindestens 2 Punkte.

(A 3) Es ist $E \notin G$; das heißt, die Menge E ist keine Gerade.

Bemerkungen 1.3:

Für Punkte A, B einer Ebene (E, G) mit $A \neq B$ wird $g(A, B)$ auch die Verbindungsgerade von A und B genannt; sie ist nach Axiom (A 1) eindeutig bestimmt.

Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, so sagen wir auch, dass P und g inzidieren.

Die Axiome (A1), (A2), (A3) werden auch Inzidenz-Axiome genannt.

Satz 1.4:

Zwei verschiedene Geraden g_1, g_2 einer Ebene (E, G) besitzen höchstens einen Schnittpunkt.

Beweis:

Wir nehmen an, $A, B \in E$ seien zwei Punkte des Durchschnitts $g_1 \cap g_2$ mit $A \neq B$. Nach Axiom (A1) müßte dann sowohl g_1 als auch g_2 die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade von A und B sein; das widerspricht aber der Voraussetzung $g_1 \neq g_2$. $\square$

Definition 1.5:

Zwei Geraden g, h einer Ebene (E, G) heißen parallel, wenn sie entweder gleich oder disjunkt sind; Schreibweise:

(1.1) $$g \parallel h \;:\Leftrightarrow\; g = h \;\vee\; g \cap h = \emptyset.$$

Warnung:

Im dreidimensionalen Raum gibt es natürlich - windschiefe - Geraden, die disjunkt, aber nicht parallel sind.

Definition 1.6, Das Parallelen-Axiom (A4):

Eine Ebene (E, G) erfüllt das Parallelen-Axiom, wenn gilt:

(A4) Ist $g \in G$ und $P \in E$, so gibt es genau ein $h \in G$ mit $P \in h$ und $g \parallel h$.

<u>Satz 1.7:</u>

Sei (E, G) eine Ebene, die das Parallelen-Axiom erfüllt. Dann ist die Parallelität - das heißt, die in Definition 1.5 definierte Relation $\parallel$ - eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden.

<u>Beweis:</u>

Nach Definition ist $\parallel$ reflexiv.

Es ist ebenfalls trivial, dass $\parallel$ symmetrisch ist.

Seien nun $g, h, k \in G$ mit $g \parallel h$ und $h \parallel k$.

Zu zeigen ist: $g \parallel k$.

Wären g und k nicht parallel, so gäbe es einen Punkt $P \in E$ mit $P \in g \cap k$. Nach Voraussetzung sind g und k Parallelen zu h. Nach dem Axiom (A4) gibt es aber nur eine Parallele zu h, die P enthält. Folglich ist $g = k$, im Widerspruch zu der Annahme, g und k seien nicht parallel. $\square$

<u>Definition 1.8:</u>

Ist (E, G) eine Ebene, die das Parallelen-Axiom erfüllt, so heißen die durch $\parallel$ auf G gegebenen Äquivalenzklassen auch <u>Parallelenklassen</u>.

Bemerkungen 1.9:

i) Eine Ebene (E, G), die die Axiome (A1), (A2), (A3), (A4) erfüllt, heißt auch eine Affine Ebene.

ii) Demgegenüber schneiden sich in einer Projektiven Ebene je zwei verschiedene Geraden in -genau- einem Punkt.

iii) Dagegen gilt in der Hyperbolischen Ebene (H, G_H):
Ist g eine Gerade in G_H und P ein Punkt in $H \setminus g$, so gibt es unendlich viele Geraden in G_H, die P enthalten und g nicht schneiden.

Projektive Ebenen und die Hyperbolische Ebene werden hier nicht behandelt.