7. Übungsblatt zu der Vorlesung "Grundwissen Geometrie"

Leipzig, den 17.1.2020

Abgabe: Postfach in A 514 bis Montag, 3.2.2020, 13:00

Es sei $(E, \mathcal{G})$ weiterhin eine Ebene, die die Axiome (A1) – (A11) erfüllt.

Für die zu untersuchenden Dreiecke beachte man Konvention 7.13.

25.) Für eine Strecke $s = \overline{XY}$ in E mit $X \neq Y$ ist die *Mittelsenkrechte* m zu s bekanntlich diejenige Lotgerade zu $g(X, Y)$, die durch den Mittelpunkt der Strecke s geht.

i) Zeigen Sie: Durch die Geradenspiegelung an m werden X und Y vertauscht.

ii) Beweisen Sie: $m = \{Z \in E : l(\overline{XZ}) = l(\overline{YZ})\}$.

iii) Zeigen Sie, dass sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines Dreiecks in einem Punkt M schneiden. Dieser Schnittpunkt heißt das *Umkreiszentrum* des *Umkreises* durch die drei Eckpunkte des Dreiecks.

Warnung: Der Kongruenzsatz *SSS* hat sich erst mittels Aufgabe 25.) ergeben und ist daher nicht zu verwenden!

(6 Punkte)

26i) Beweisen Sie den *Sinussatz für Dreiecke*; das ist folgende Formel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}.$$

ii) Zeigen Sie: Ist $a \leq b \leq c$, so gilt auch $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Hinweise: Betrachten Sie in i) die Höhe h_c . Im Falle $\beta = 90^\circ$ ist i) trivial. Unterscheiden Sie getrennt die beiden Fälle $\alpha < 90^\circ \wedge \beta < 90^\circ$ sowie andererseits $\beta > 90^\circ$.

In ii) kann i) benutzt werden, wobei dann aber wiederum der Fall, dass das Dreieck stumpfwinklig ist, gesondert zu behandeln ist.

(8 Punkte)

27.) Konstruieren Sie Dreiecke mit folgenden Daten:

i) $a = 5\text{cm}$, $\beta = 20^\circ$, $b = 4\text{cm}$.

ii) $h_a = 6\text{cm}$, $w_\alpha = 7\text{cm}$, $\alpha = 80^\circ$.

iii) $a = 8\text{cm}$, $s_a = 6\text{cm}$, $h_a = 5\text{cm}$.

Dabei ist jeweils auch eine Konstruktionsbeschreibung durchzuführen. Falls es in einer Teilaufgabe zwei nicht kongruente Lösungen gibt, sind beide aufzuführen.

(4 + 3 + 3 Punkte)

28i) Konstruieren Sie – bei erlaubter Benutzung eines Winkelmessers – ein regelmäßiges Fünfeck der Seitenlänge 3cm , in dem also alle Innenwinkel die Größe 108° haben.

ii) Zeigen Sie: Haben in einem regelmäßigen Fünfeck alle Seiten die Länge a , so haben alle Diagonalen die Länge $\Phi \cdot a$, wobei $\Phi := \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5})$ der *Goldene Schnitt* ist.

Hinweis: Wenden Sie die Strahlensätze an. Φ ist die – eindeutig bestimmte – positive Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

(6 Punkte)