Mathematisches Institut der Universität Leipzig
Dr. Tobias Ried
tobias.ried@mis.mpg.de

Wintersemester 2019/2020
16. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker 3

Blatt 12

Aufgabe 1 (Residuen) **[4 Punkte]**

Bestimmen und charakterisieren Sie alle isolierten Singularitäten der Funktionen

(a) $f_n(z) = (z^2+1)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$,

(b) $g_n(z) = \frac{1}{z^n - c}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $h_n(z) = z^n e^{\frac{1}{z}}$, $n \in \mathbb{Z}$,

(d) $H(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)}$,

und berechnen Sie die Residuen bei den Singularitäten.

Hinweis zu (d): Betrachten Sie ein Wegintegral um den Ursprung und entwickeln Sie $\frac{1}{1-z}$, um das Ergebnis aus (c) verwenden zu können.

Aufgabe 2 (Berechnung von reellen Integralen) **[6 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+e^z}.$$

(a) Ermitteln und charakterisieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

(b) Berechnen Sie die zu den Singularitäten gehörigen Residuen.

(c) Berechnen Sie für $R > 0$ das Integral

$$\int_{C_R} f(z)\, dz,$$

wobei C_R die positiv orientierte Berandung des Rechtecks mit den Ecken $-R, R, R + i2\pi, -R + i2\pi$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}\, dx = \pi.$$

Aufgabe 3 (Satz von Casorati–Weierstraß) **[5 Punkte]**

Zeigen Sie den Satz von Casorati–Weierstraß (Satz 10.31 in der Vorlesung):
Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer *wesentliche Singularität* in $z_0 \in U$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$ das Bild

$$f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

der punktierten Kreisscheibe um z_0 *dicht in* $\mathbb{C}$, d.h. für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ so, dass $f(z_n) \to \alpha$.

Hinweis: Widerspruchsbeweis: nehmen Sie an, es gibt ein $\delta > 0$ und $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $B_\delta(w_0) \cap f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) = \emptyset$, und betrachten Sie die Funktion $h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$.

Aufgabe 4 ([W*] Satz von Stokes) **[5 Punkte]**

Gegeben sei $S_+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ (so orientiert, dass das Normalenfeld vom Ursprung weg zeigt), und das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + 4 \\ \tanh z + 2x \\ \cosh(x^2 + z^2) + \mathrm{e}^{4y^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von $\mathrm{rot} F$ durch S_+ mit Hilfe des Satzes von Stokes einmal als Linienintegral und als möglichst einfaches Flächenintegral.

Allgemeine Hinweise zum Übungsblatt:

- Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem **23.01.2020**, abzugeben. Die Übungsblätter können auch als **Kleingruppe (2-3 Personen)** abgegeben werden.
- Für die mit **[W*]** gekennzeichnete Aufgabe können *Bonuspunkte* erworben werden. Sie bezieht sich als Wiederholungsaufgabe auf ein früheres Thema der Vorlesung.
- Die **Prüfung zur Vorlesung** wird am **Freitag, 21.02.2020, von 10:00 bis 12:00 Uhr** im Theoretischen Hörsaal stattfinden. Genauere Informationen werden noch bekannt gegeben.