Wintersemester 2019/20
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Dr. André Uschmajew
Dr. Max Pfeffer

6. Übungsblatt
Optimierung I

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in der Übung am 5.12.2019.

Übungsaufgaben

1. **Polarkegel.**
   Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Zeigen Sie:
   (a) Der Polarkegel K° ist abgeschlossen und konvex.
   (b) Es gilt
   $$(K^\circ)^\circ = K$$
   genau dann, wenn K abgeschlossen und konvex ist.

2. **KKT-Bedingungen.**
   Betrachten Sie für einen festen Parameter t das Optimierungsproblem
   $$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \left(x_1 - \frac{3}{4}\right)^2 + (x_2 - t)^4 \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 - x_2 - 1 \\ -x_1 + x_2 - 1 \\ -x_1 - x_2 - 1 \end{pmatrix} \leq 0.$$
   (a) Für welche Werte von t, wenn es welche gibt, erfüllt $x = (1, 0)^\mathsf{T}$ die KKT-Bedingungen.
   (b) Zeigen Sie, dass für $t = 1$ in der Lösung nur die erste Nebenbedingung aktiv ist, und finden Sie die Lösung.

3. **Augmented-Lagrange-Funktion.**
   Für das gleichungsrestringierte Optimierungsproblem
   $$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad h(x) = 0 \tag{$\star$}$$
   mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist die Augmented-Lagrange-Funktion definiert gemäß
   $$L_\alpha(x, \mu) := L(x, \mu) + \frac{\alpha}{2}\|h(x)\|^2 = f(x) + \mu^\mathsf{T} h(x) + \frac{\alpha}{2}\|h(x)\|^2,$$
   wobei $\alpha > 0$.

   Sei (x^*, μ^*) ein reguläres KKT-Paar von $(\star)$, in dem die hinreichenden Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung gelten. Zeigen Sie: Es gibt ein $\alpha^* > 0$, sodass für alle $\alpha \geq \alpha^*$ der Punkt x^* ein isoliertes lokales Minimum von $L_\alpha(\cdot, \mu^*)$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, in dem die hinreichenden Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung für $L_\alpha(\cdot, \mu^*)$ gelten.

Hausaufgaben

1. **Geometrisches und arithmetisches Mittel.** (7 Punkte)

   (a) Berechnen Sie die globale Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ des Optimierungsproblems

   $$\min \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{u.d.N.} \quad \prod_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x \geq 0.$$

   Zeigen Sie zunächst, dass $x^* > 0$ gelten muss und dass in x^* die KKT-Bedingungen erfüllt sind. Verwenden Sie diese dann, um x^* zu berechnen.

   (b) Verwenden Sie (a), um die folgende Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel nachzuweisen:

   $$\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x > 0.$$

2. **Slater-Bedingung.** (5 Punkte)

   Gegeben ist das (konvexe) Optimierungsproblem

   $$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0$$

   mit konvexen und stetig differenzierbaren Funktionen $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$. Die *Slater-Bedingung* lautet: Es gibt ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(y) < 0$ für alle i. Zeigen Sie, dass die Slater-Bedingung für jeden zulässigen Punkt des Optimierungsproblems die Guignard Constraint Qualification (GCQ) impliziert. Sie ist also selbst eine Constraint Qualification.

3. **Eigenwertprobleme.** (8 Punkte)

   Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und

   $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} x^\mathsf{T} A x.$$

   Die Funktione f soll unter der Gleichungsnebenbedingung $\|x\| = 1$ minimiert werden.

   (a) Wählen Sie eine geeignete Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für die Nebenbedingung, sodass $\nabla_x L(x, \mu) = Ax - \mu x$ für die zugehörige Lagrange-Funktion $L(x, \mu)$ gilt. Verifizieren Sie, dass dann sämtliche zulässige Punkte regulär sind.

   (b) Folgern Sie aus (a), dass nur (normierte) Eigenpaare von A KKT-Punkte sind. Seien alle Eigenwerte $\mu_1 > \ldots > \mu_n$ von A verschieden. Zeigen Sie, dass die notwendigen Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung nur vom normierten Eigenvektor $\pm x_n$ zum kleinsten Eigenwert μ_n erfüllt werden. Warum gilt die Constraint Qualification (CQ2)?

   (c) Aus (b) folgt, dass die anderen normierten Eigenvektoren $\pm x_1, \ldots, \pm x_{n-1}$ keine lokalen Minima auf der Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ sind. Zeigen Sie dies direkt.