Mathematisches Institut der Universität Leipzig
Dr. Tobias Ried
tobias.ried@mis.mpg.de

Wintersemester 2019/2020
19. Dezember 2019

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker 3

Blatt 10

Aufgabe 1 (Komplexer Logarithmus und komplexe Potenz) [4 Punkte]

(a) Zeigen Sie (durch geeignete Wahl eines Integrationsweges), dass für $z \in \mathbb{C}_-$

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + \mathrm{i} \arg z.$$

Hinweis: Polardarstellung von z.

(b) Die komplexe Potenz wird definiert über den Hauptzweig des Logarithmus. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}_-$ ist

$$z^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

(i) Für welche $z, w \in \mathbb{C}_-$ ist die Gleichung

$$\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \operatorname{Log} zw$$

gültig? Geben Sie ein Beispiel an, für das $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w \neq \operatorname{Log} zw$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, und $z \in \mathbb{C}_-$ erfüllt ist.

(iii) Welche Bedingungen muss man an $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}_-$, stellen, damit

$$(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$$

gilt? Geben Sie ein Beispiel an, für das $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$.

Aufgabe 2 (Gauß-Integral) [4 Punkte]

Seien $\alpha = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $\beta = b_1 + \mathrm{i}b_2 \in \mathbb{C}$, derart, dass $\operatorname{Re} \alpha^2 = a_1^2 - a_2^2 > 0$ ist. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Hinweis: Fassen Sie das Integral als Limes eines geeigneten komplexen Wegintegrals auf und verwenden Sie den Integralsatz von Cauchy für einen rechteckigen Weg in der komplexen Ebene.

Aufgabe 3 (Cauchy-Integralformel) **[4 Punkte]**

(a) Berechnen Sie

$$\int_{|z-2|=r} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$$

für $r = 1, 3, 5$. Begründen Sie die einzelnen Schritte.

HINWEIS: Partialbruchzerlegung an geeigneter Stelle.

(b) *Mittelwerteigenschaft:* Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in U$, $r > 0$ derart, dass $\overline{B_r(a)} \subseteq U$. Zeigen Sie, dass

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt.$$

Aufgabe 4 (Anwendungen des Identitätssatzes) **[6 Punkte]**

(a) Wie viele im Ursprung holomorphe Funktionen f gibt es, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-2}$,

(ii) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n\frac{1}{n}$,

(iii) $f(\pi n) = 0$,

(iv) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ (HINWEIS: Potenzreihenentwicklungssatz).

(b) Sei $f(z) = \operatorname{Log} z$ der Hauptzweig des Logarithmus und $g(z) = \operatorname{Log}(-z) + i\pi$. Zeigen Sie, dass f und g auf $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ übereinstimmen, aber dennoch $f \neq g$ gilt. Warum ist dies kein Widerspruch zum Identitätssatz?

Aufgabe 5 (Langsam wachsende ganze Funktionen*) **[4* Punkte]**

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $f(z) = O(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ (d.h. es existieren $C, R > 0$ so, dass $|f(z)| \leq C|z|^k$ für alle $|z| \geq R$). Dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens k.

HINWEIS: Beweis vom Satz von Liouville.

ALLGEMEINE HINWEISE ZUM ÜBUNGSBLATT:

- Die schriftlich bearbeiteten Ubungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem **09.01.2020**, abzugeben. Die Übungsblätter können auch als **Kleingruppe (2-3 Personen)** abgegeben werden.
- Für die mit ***** gekennzeichneten Aufgaben können Bonuspunkte erworben werden.
- Die **Prüfung zur Vorlesung** wird *voraussichtlich* am **Freitag, 21.02.2020, von 10:00 bis 12:00 Uhr** im Theoretischen Hörsaal stattfinden. Genauere Informationen werden noch bekannt gegeben.