Abgabe des Blattes während der Vorlesung am Mittwoch, den 4.12.

Aufgabe 1: 3+1+1+3+2 Punkte

Diese Aufgabe ist die Folge der Aufgabe 1, Serie 5. Wir betrachten immer noch das folgende statistische Modell:

$$(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n), \mathbb{P}_N^{\otimes n} : N \in \mathbb{N}),$$

wobei $\mathbb{P}_N$ die Gleichverteilung auf $\{1, \dots, N\}$ ist und $S(X) := \max(X_1, \dots, X_n)$.

i) Wir möchten beweisen, dass S eine vollständige Statistik ist. Sei $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $\mathbb{E}_N[h^2(S)] < +\infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{E}_N[h(S)] = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.

   Beweisen Sie:

$$\mathbb{E}_N[h(S)] = \sum_{m=1}^{N} h(m) \frac{m^n - (m-1)^n}{N^n}.$$

   Daraus die Vollständigkeit von S schließen.

ii) Wie in Aufg. 1 Serie 5 heißt $T(X) := 2\ \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 1$ und $T' := \mathbb{E}_N[T|\sigma(S)]$. Was kann man über T' sagen, wenn man weiß, dass S vollständig ist? *(man kann alle Eigenschaften der Schätzern T, T', S frei benutzen, die in Serie 5 bewiesen wurden)*

iii) Sei jetzt $U := u \circ S$ ein erwartungstreuer Schätzer für N, mit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ einer messbaren Funktion. Was kann man nach Vorlesung über den Schätzer U sagen?

iv) Bestimmen Sie die Funktion u.

v) Da T' $\sigma(S)$-messbar ist, existiert eine messbare Funktion $t_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sodass $T' = t_n \circ S$. Die Funktion t_n für jeden $n \in \mathbb{N}$ bestimmen. Im Fall $n = 2$ nachprüfen, dass es kohärent mit der Formel von Aufgabe 1.vi) Serie 5 ist.

Aufgabe 2: 2+2+2 Punkte

Bayes-Schätzung des Erwartungswerts einer Normalverteilung bei bekannter Varianz.

Gegeben sei das folgende Modell

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathcal{N}_{\theta,1}, \theta \in \Theta)),$$

wobei $\mathcal{N}_{\theta,1}$ die Normalverteilung mit Erwartungswert θ und Varianz 1 ist. Sei $\rho(\theta, x)$ die Likelihood-Funktion, das heißt $\mathcal{N}_{\theta,1}(\mathrm{d}x) = \rho(\theta, x)\mathrm{d}x$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ liegt.

Gegeben sei auch die folgende *a priori* Verteilung ν für den Parameter θ:

$$\nu[\theta = \theta_1] = p, \quad \nu[\theta = \theta_2] = 1 - p,$$

wobei $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 \in \mathbb{R}$ und $p \in [0, 1]$ drei feste Zahlen sind.

i) Gegeben sei die Beobachtung $x \in \mathbb{R}^n$. Die *a posteriori* Verteilung ν_x für den Parameter θ gegeben die Beobachtung x bestimmen.

ii) Den Bayes-Schätzer $\widehat{T}$ für die Kenngröße θ bestimmen.

iii) Sei nun $\theta_1 = -1$, $\theta_2 = 1$ und $p = \frac{1}{3}$. Sei $n = 5$. Man beobachtet die folgende Stichprobe x^{B}:

0.3	0.9	1.3	−2.1	0.8

Die *a posteriori* Verteilung $\nu_{x^{\mathrm{B}}}$ und den Bayes-Schätzer $\widehat{T}(x^{\mathrm{B}})$ bei dieser Realisierung x^{B} bestimmen. *(Berechnungen bitte gut erklären!)*