Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 3

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 06.11.2018, 09:15 Uhr (als vor Beginn der Vorlesung) im Hörsaal 5 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgende Implikation mithilfe einer Kontraposition. Notieren Sie zunächst Voraussetzung und Behauptung der gegebenen Implikation sowie die daraus resultierende Kontraposition.

Seien a und b natürliche Zahlen. Wenn der Bruch

$$\frac{a-b}{a+b}$$

nicht gekürzt werden kann, dann kann auch

$$\frac{a}{b}$$

nicht gekürzt werden. (5P)

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgende Aussage mithilfe eines Widerspruchsbeweises. Notieren Sie zunächst Voraussetzung und Behauptung der gegebenen Implikation sowie die zu falsifizierende Konjunktion.

Wenn a und b natürliche Zahlen sind, dann gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

(5P)

Aufgabe 3

Beweisen Sie mithilfe einer Fallunterscheidung die folgende Aussage.
Sei S die Menge aller Quadratzahlen, d.h.

$$S = \{k^2 | k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gibt es keine Zahl $s \in S$, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt. (5P)

bitte wenden

Aufgabe 4

Zeigen Sie mithilfe eines Beweises durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (5P)