Analysis 1 für Informatiker

Für $f(x)=x^3$ ist $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \ldots = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$

$$= 3x^2+3xh+h^2 \xrightarrow[(h\to 0)]{} 3x^2.$$

Für z.B. $x=5$: $h=$ 1 0,1 0,01 0,001 0,0001

$f^h(5)=$ 91 76,51 75,1501 75,015001 75,00150001

is numerical "evidence" for $f^h(5)\approx 75+15h$ and $f^h(5)\to 75$ as $h\to 0$.

$\rightarrow$ Dies als Motivation für Grenzwertbegriff, zunächst für Zahlenfolgen.

Übungen zum Thema Folgen:

www.poenitz-net.de/Mathematik/5.Analysis/5.7.A.Folgen.pdf

Beweis. Wir betrachten die Teilmenge $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. Würden wir die entsprechende Teilmenge von $\mathbb{R}$ betrachten, so wäre $\sqrt{2}$ sowohl Maximum als auch Supremum dieser Menge. Da $\sqrt{2}$ wegen Lemma 4.1.4 jedoch keine rationale Zahl ist, besitzt M kein Supremum. Denn angenommen $r \in \mathbb{Q}$ wäre Supremum von M. Ist $r < \sqrt{2}$, dann gibt es nach Lemma 4.1.5 ein $r' \in M$ mit $r' > r$, so dass r keine obere Schranke ist. Folglich ist $r > \sqrt{2}$. Dann gibt es aber wiederum nach Lemma 4.1.5 ein $r'' \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2} < r'' < r$. Folglich ist r'' eine obere Schranke und r kann folglich nicht die kleinste obere Schranke sein. □

Im Gegensatz dazu ist der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vollständig, was eine ausgezeichnete Eigenschaft von $\mathbb{R}$ darstellt. Wir geben den folgenden Satz ohne Beweis an.

Satz 4.1.7. *Der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist der einzige vollständige angeordnete Körper.*

4.1.2 Folgen

Definition 4.1.8 (Folgen). Es sei M eine beliebige Menge. Eine Folge in M ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$ mit

$$n \mapsto a_n = \varphi(n) \in M \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir bezeichnen eine solche Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach nur mit (a_n).

Manchmal beginnen Folgen nicht bei $n = 1$ sondern bei $n = 0$ oder einer anderen Zahl $n \in \mathbb{Z}$. Dann haben wir also streng genommen eine Abbildung von $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ nach M. Wir schreiben die Folge dann als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beziehungsweise $(a_n)_{n\geq n_0}$.

Beispiele.

(i) Ist $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so sprechen wir von der *konstanten Folge* (a_n).

(ii) Für $i \in \mathbb{C}$ ist $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge: $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots$

(iii) $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

(iv) $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \ldots$

(v) Die Folge der Fibonacci-Zahlen (siehe auch Kapitel 2, Abschnitt 2.1.3) ist rekursiv definiert durch $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$, also: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

(vi) Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$, also: 1, 1.5, 1.416666..., 1.414215..., 1.414213..., ...Aufgrund der angegebenen Folgenglieder liegt der Verdacht nahe, dass sich diese Folge dem Wert $\sqrt{2}$ annähert.

Definition 4.1.9 (Konvergenz von Folgen). Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen (oder reellen) Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$. Die Folge *konvergiert gegen den Grenzwert* $a \in \mathbb{C}$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : \quad |a_n - a| \; < \; \varepsilon \; .$$

Die Folge (a_n) heißt *konvergent* (man sagt dann auch, dass die Folge *konvergiert*), falls es einen Grenzwert gibt, gegen den sie konvergiert. Falls die Folge (a_n) nicht konvergiert, dann *divergiert* sie und heißt *divergent.*

Bemerkung.

(i) Eine Folge, die gegen den Grenzwert 0 konvergiert, heißt auch *Nullfolge.*

(ii) Eine Folge komplexer Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach Definition genau dann eine Nullfolge, wenn die relle Folge $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(iii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen den Grenzwert a, wenn die Folge $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(iv) Konvergiert die Folge (a_n) gegen den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, so schreiben wir auch

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty \; .$$

(v) Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{C}$ nennen wir die Menge $\{x \in \mathbb{C} \mid |a - x| < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{C}$ auch *ε-Umgebung* von a (analog in $\mathbb{R}$). Konvergiert eine Folge (a_n) gegen den Grenzwert a, so bedeutet das also, dass in jeder ε-Umgebung (mit $\varepsilon > 0$) von a *fast alle* Folgenglieder von (a_n) liegen. Dabei bedeutet „fast alle“ genau gesagt „alle außer endlich vielen“.

Beispiele.

(i) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert 0, denn: Wähle zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ die Zahl $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, so dass für $n \geq n_0$ gilt:

$$a_n \; \leq \; a_{n_0} \; = \; \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \; \leq \; \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \; = \; \varepsilon \; .$$

(ii) Man kann leicht zeigen, dass die Folge $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert 1 konvergiert.

(iii) Die komplexe Folge $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.