Probeklausur Analysis
für Grundschullehramt

In der echten Klausur gelten die folgenden Bedingungen: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es können maximal 20 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist ab 9 Punkten bestanden. Ab 18 Punkten gibt es eine 1,0.
Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1 (1+1 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden Folgengrenzwerte (Rechenweg mit angeben).

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n} \qquad\qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n}$$

Aufgabe 2 (1+1 Punkte)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren (begründen Sie ihre Antworten).

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} k3^{-k} \qquad\qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$$

Aufgabe 3 (1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (der Definitionsbereich ist jeweils ganz $\mathbb{R}$). Geben Sie Ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie das Ergebnis noch so weit wie möglich.

$$(a)\ f(x) := x^3\cos(x) \qquad\qquad (b)\ g(x) := \frac{e^{x^2}}{x^2+1}$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := e^x(x^2+2x-7) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f. Geben Sie Ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie die Ergebnisse noch so weit wie möglich.
(b) Untersuchen Sie f auf lokale Extrema. Begründen Sie Ihre Antworten. Bestimmen Sie ggf. auch die Funktionswerte an den Extremstellen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 6 (1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte (Rechenweg/Begründung mit angeben).

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x)$

Aufgabe 7 (1+1+1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale (Rechenweg mit angeben).

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x/2)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$