Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 10

Aufgabe 1

Verallgemeinern Sie das Resultat von Blatt 9 Aufgabe 4 Teil 2: Sei $a > 0$, $l \in \mathbb{N}$ und sei $u \in C_1^2(\mathbb{T}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{T}^n \times [0,T))$[a] eine Lösung von

$$u_t = \Delta u + a u^{2l} \text{ in } \mathbb{T}^n \times (0,T)$$

mit $\int_{\mathbb{T}^n} u(x,0)\,dx > 0$. Zeigen Sie, dass $T < \infty$. *Hinweis:* Leiten Sie eine Differentialgleichung für $\tilde{e}(t) = \int_{\mathbb{T}^n} u\,dx$ her, wobei $\int_{\mathbb{T}^n} = \int_{[0,1]^n}$.

Aufgabe 2*

Sei $u \in C_1^2(\mathbb{T}^n \times (0,\infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem n-dimensionalen (flachen) Torus d.h.

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{T}^n \times (0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} |u - \fint_{\mathbb{T}} u\,dy| = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} |\partial_t^l D^k u| = 0 \text{ für alle } l + k \geq 1\,.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(i)* Zeigen Sie mittels Induktion über die Dimension eine Poincaré-Ungleichung auf dem Torus, d.h. zeigen Sie, dass eine Konstante $C = C(n) > 0$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{T}^n} |u - \fint_{\mathbb{T}^n} u|^2\,dx \leq C \int_{\mathbb{T}^n} |Du|^2\,dx$$

für alle $u \in C^1(\mathbb{T}^n)$. *Hinweis:* Es kann hilfreich sein, den Zwischenwertsatz in der folgenden Form zu benutzen: Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\bar{x} \in [0,1]$ mit $f(\bar{x}) = \fint_{\mathbb{T}} f\,dx$.

(ii) Folgen Sie dem Beweis von Theorem 3.17, um die Aussage zu beweisen.

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Identitäten für die Fouriertransformation.

1. Sei $A \in GL(n)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\widehat{f(A\cdot)}(\xi) = \frac{1}{|\det A|}\hat{f}(A^{-t}\xi)\,,$$

wobei $A^{-t} = (A^t)^{-1}$.

2. Zeigen Sie, dass für eine strikt positiv definite, symmetrische Matrix A

$$\widehat{e^{-\pi\langle A\cdot,\cdot\rangle}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{-\pi\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle}\,,$$

gilt, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

[a] Hierbei ist $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der n-dimensionale Torus und $C_l^k(\mathbb{T}^n \times (0,T))$ ist analog zum eindimensionalen Fall definiert (siehe Aufgabe 3 Blatt 9).

Aufgabe 4*

1. Beweisen Sie, dass für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$$
Hinweis: Nutzen Sie die Dichtheit von $S(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2.* Beweisen Sie die allgemeine Version von Theorem 3.21 als Konsequenz von Theorem 3.21*.