Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 11 Lösungen

Aufgabe 1

(i) Definiere das Bessel-Potential durch

$$B(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\, dt \tag{1}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $B \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widehat{B}(\xi) = \frac{1}{1+4\pi^2|\xi|^2}\,. \tag{2}$$

(ii) Finden Sie eine formale Lösung für

$$-\Delta u + u = f \text{ in } \mathbb{R}^n\,. \tag{3}$$

Hinweis: Fouriertransformieren Sie die PDE und nutzen Sie Teil (i).

(iii)* Zeigen Sie, dass die formale Lösung aus (ii) für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine klassische Lösung ist.

Solution:

(i) Wir erinnern uns an die Definition $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$ und, dass $\hat{G}(y) = G(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und deshalb

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x)\, dx = \hat{G}(0) = G(0) = 1\,.$$

Definiere

$$f(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-t-\frac{x|^2}{4t}} = \frac{e^{-t}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} G\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}}\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0\,.$$

Dann ist $f(x,t) \geq 0$ und somit folgt mit dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} B(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n \times]0,\infty[} f(x,t)\, d(x,t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\, dx\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} G(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}})\, dx\, dt = \int_0^\infty e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} G(x)\, dx\, dt = 1\,.
\end{aligned}$$

Also ist $B \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Da ausserdem $|f(x,t)e^{-2\pi i x\cdot\xi}| \in L^1(\mathbb{R}^n \times]0,\infty[)$ können wir Fubini anwenden und finden

$$\begin{aligned}
\hat{B}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} B(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} G(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}}) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx\, dt = \int_0^\infty e^{-t}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \widehat{G(\frac{\cdot}{\sqrt{4\pi t}})}(\xi)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} \hat{G}(\sqrt{4\pi t}\xi)\, dt = \int_0^\infty e^{-t(1+4\pi^2|\xi|^2)}\, dt = \frac{1}{1+4\pi^2|\xi|^2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Sei u eine Lösung von (3). Dann nehmen wir die Fouriertransformierte der Gleichung und finden

$$4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\,,$$

also

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2|\xi|^2} = \hat{f}(\xi)\hat{B}(\xi)\,.$$

Formal folgt dann mit Lemma 3.19, dass

$$u = B * f\,.$$

(iii) Sei nun $f \in \mathcal{S}$ und $u = B * f$. Dann ist $u \in C^\infty \cap L^1$ mit $D^\alpha u = B * D^\alpha f$. Also gilt mit Lemma 3.19

$$\widehat{D^\alpha u} = \widehat{B * D^\alpha f} = \hat{B}\widehat{D^\alpha f} = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{B}\hat{f}\,.$$

Betrachte nun

$$k(x) = -\Delta u + u - f = B * (-\Delta f + f) - f \in L^{\mathbb{R}^n}\,.$$

Dann folgt wieder mit Hilfe von Lemma 3.19 und Teil (i), dass

$$\hat{k} = \hat{B}(1+4\pi^2|\xi|^2)\hat{f} - \hat{f} = \hat{f} - \hat{f} = 0\,.$$

Somit folgt (da $k, \hat{k} \in L^1$)

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{k}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi = 0\,.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass keine nicht-triviale integrierbare Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ existiert, so dass f und $\hat{f}$ kompakten Träger haben.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zuerst für $n = 1$, indem Sie zeigen, dass die Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\cdot z}\,dx$ holomorph ist, falls f kompakten Träger hat. Folgern Sie nun die Aussage.

Solution: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit kompakten Träger, und $R > 0$ mit $\mathrm{spt}(f) \subset B_R(0)$. Die Funktion $z \mapsto f(x)e^{-2\pi i x z}$ ist holomorph für jedes $x \in \mathbb{R}$ und

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-2\pi i x z}|\,dx \le e^{2\pi R|\mathrm{Im}(z)|}\|f\|_{L^1}$$

ist lokal beschränkt. Damit ist $F(z)$ ebenfalls holomorph. Es gilt nun aber $F(\xi + i\cdot 0) = \hat{f}(\xi)$. Falls also $\hat{f}$ auch kompakten Träger hat, so hat die holomorphe Funktion F einen Häufungspunkt von Nullstellen in $\mathbb{C}$ und ist deshalb $F \equiv 0$, womit auch $\hat{f} \equiv 0$ und deshalb $f \equiv 0$. Die allgemeine Aussage folgt jetzt mit Hilfe des eindimensionalen Falls und Fubini.

Aufgabe 3* (Temperierte Distributionen)

Wir definieren eine *temperierte Distribution* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch die folgenden Eigenschaften:

(a) $f \mapsto T(f)$ ist eine lineare Abbildung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also $T(af + bg) = a\,T(f) + b\,T(g)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

(b) $T(f_k) \to T(f)$ wenn $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hierbei gilt $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $\lim_{k\to\infty} \left\|x^\beta D^\alpha(f_k - f)\right\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes α, β.

(i) Zeigen Sie die folgenden Inklusionen:

(a) $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \le p \le \infty$.

(c) Sei μ ein signiertes Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit endlicher Masse, so ist $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Definiere nun die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$ durch

$$\hat{T}(f) := T(\hat{f}), \tag{4}$$

und analog die inverse Fouriertransformation. Zeigen Sie:

(a) $\widehat{\ },\check{\ }$ sind lineare Operatoren von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(b) $\check{\hat{T}} = T$ für alle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(c) $\widehat{1} = \delta_0$ und $\widehat{\delta_0} = 1$.

Solution: (i) Es gilt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. wenn T linear auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, dann ist T insbesondere linear auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Falls nun $\{f_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dann gibt es per Definition eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{spt}(f_k) \subset K$ für alle k und

$$\lim_{k\to 0} \|D^\alpha (f_k - f)\|_{L^\infty} = 0,$$

für alle Multiindizes α. Falls nun $R > 0$ so gross ist, dass $K \subset B_R$, dann finden wir

$$\lim_{k\to\infty} \|x^\beta D^\alpha (f_k - f)\|_\infty \le R^{|\beta|} \lim_{k\to\infty} \|D^\alpha (f_k - f)\|_\infty = 0,$$

also $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und deshalb

$$T(f_k) \to T(f) \text{ für } k \to \infty.$$

Somit ist $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und Inklusion (a) ist gezeigt.

Für die Inklusion (b) wird die Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit der Distribution $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ mit $T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} fg\, dx$ identifiziert. Dies ist trivialerweise eine lineare Funktion, jedoch müssen wir zeigen, dass sie wohldefiniert ist. Dafür bemerken wir, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ stetig für alle $1 \le q \le \infty$. Dann folgt für q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mit der Höderungleichung, dass

$$|T_f(g)| \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \le C\|f\|_{L^p},$$

und T_f ist wohldefiniert. Aus der stetigen Einbettung folgt dann auch $g_k \to g$ in L^q falls $g_k \to g$ in $\mathcal{S}$, und deshalb mit derselben Abschätzung $T_f(g_k) \to T_f(g)$. Wir müssen also bloß zeigen, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$. Sei dafür $1 \le q \le \infty$ fixiert und $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |g|^q\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-\frac{n}{2}-1}(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}|g|^q\, dx \\ &\le \|(1+|\cdot|^2)^{\lceil \frac{\frac{n}{2}+1}{q}\rceil} g\|_{L^\infty}^q \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-\frac{n}{2}-1}\, dx \le C \sum_{|\alpha|\le\lceil (n+2)/q\rceil} \|x^\alpha g\|_{L^\infty} \le C.\end{aligned}$$

Fr̈ ein signiertes Maßμ mit $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ gilt, dass

$$T_\mu(g) := \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\mu,$$

wohldefiniert ist mit $|T_\mu(g)| \le \mu(\mathbb{R}^n)\|g\|_{L^\infty}$. Aus dieser Abschätzung folgt die Konvergenzeigenschaft (b) (die Linearität von T_μ ist klar).

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $T, T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$(\widehat{aT + bT'})(f) = (aT + bT')(\hat{f}) = aT(\hat{f}) + bT'(\hat{f}) = a\hat{T}(f) + b\hat{T}'(f),$$

also ist $\hat{\ }$ linear, analog für $\check{\ }$. Wir müssen noch zeigen, dass $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Für die Linearität seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\hat{T}(af + bg) = T(a\hat{f} + b\hat{g}) = aT(\hat{f}) + bT(\hat{g}) = a\hat{T}(f) + b\hat{T}(g).$$

Falls nun $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\hat{f}_k \to \hat{f}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, da nach Lemma 3.19

$$(2\pi i\xi)^\beta D^\alpha \hat{f}_k = D^\beta g_k \, (\widehat{(-2\pi i\cdot)^\alpha f_k})\,,$$

mit $g_k = (-2\pi i\cdot)^\alpha f_k$. Da $D^\beta g_k \to D^\beta g = D^\beta(-2\pi i\cdot)^\alpha f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per Annahme, folgt

$$\|(2\pi i\xi)^\beta D^\alpha(\hat{f}_k - \hat{f})\|_{L^\infty} = \|D^\beta \widehat{(g_k - g)}\|_{L^\infty} \le \|D^\beta(g_k - g)\|_{L^1} \to 0\,,$$

mit Hilfe der stetigen Inklusion $\mathcal{S} \hookrightarrow L^1$ aus (ib). Also gilt

$$\hat{T}(f_k - f) = T(\hat{f}_k - \hat{f}) \to 0\,.$$

(b) Es gilt $\check{\hat{T}}(f) = \hat{T}(\check{f}) = T(\hat{\check{f}}) = T(f)$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also $\check{\hat{T}} = T$ in $\mathcal{S}'$.
(c) Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\hat{1}(f) = 1(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\,dx = f(0) = \delta_0(f)\,.$$

Außerdem gilt

$$\hat{\delta}_0 f = \delta_0(\hat{f}) = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = 1(f)\,.$$