UNIVERSITÄT LEIPZIG
MATHEMATISCHES INSTITUT
DR. JONAS HIRSCH
DR. DOMINIK INAUEN

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 7

Aufgabe 1

Sei U ein beschränktes, zusammenhängendes, C^2-reguläres Gebiet und $x_0 \in \partial U$. Zeigen Sie, dass U in x_0 die äußere Sphärenbedingung erfüllt. Folgern Sie, dass das Dirichlet Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ in } U \\ \quad u = g \text{ auf } \partial U \end{cases}$$

für jedes $g \in C(\partial U)$ eine eindeutige, klassische Lösung (also $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$) hat.

Solution: OBdA nehmen wir an, dass $x_0 = 0$ und dass

$$U \cap B_r = \{(x', x_n) \in B_r : x_n < f(x')\}$$

für ein $f \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $f(0) = 0$ und $Df(0) = 0$. Es gilt somit für alle $(y, x_n) \in U \cap B_r$

$$x_n < f(y) = \frac{1}{2} y^\intercal D^2 f(sy) y \leq \frac{1}{2} M |y|^2 ,$$

für ein $s \in [0, 1]$ und $M \geq \sup_{|y| \leq r} \|D^2 f(y)\|$. Sei $s < \frac{1}{M}$ und betrachte den Ball $B_s(se_n)$. Wir behaupten, dass $B_s(se_n) \cap (U \cap B_r) = \emptyset$. Sei dafür $(y, x_n) \in U \cap B_r$. Dann gilt

$$|(y, x_n) - se_n|^2 = |y|^2 + x_n^2 - 2sx_n + s^2 > x_n^2 + s^2 \geq s^2 ,$$

da $2sx_n < 2sf(y) < |y|^2$ aufgrund der Wahl von s. Damit gilt $B_s(se_n) \cap (U \cap B_r) = \emptyset$. Es ist außerdem $\partial U \cap B_r = \{(y, x_n) \in B_r : x_n = f(y)\}$. Mit derselben Abschätzung wie oben folgt somit

$$\bar{B}_s(se_n) \cap \big(\bar{U} \cap B_r\big) = \{0\} .$$

Aufgabe 2

Sei U ein beschränktes, zusammenhängendes, C^2-reguläres Gebiet. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } U \\ \quad u = g \text{ auf } \partial U \end{cases}$$

für alle $f \in C^1(\overline{U})$, $g \in C(\partial U)$ eine eindeutige klassische Lösung besitzt.

Solution: Wir erweitern f zu $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ und setzen $v = \Phi * f$, wobei Φ die Fundamentallösung ist. Dann ist $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $-\Delta v = f$ in $\mathbb{R}^n$. Nach Aufgabe 1 gibt es eine Eindeutige Lösung $\tilde{u} \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ zum Dirichlet Problem

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = 0 \text{ in } U \\ \quad \tilde{u} = \tilde{g} \text{ auf } \partial U \end{cases}$$

mit $\tilde{g} := g - v|_{\partial U} \in C(\partial U)$. Wir schließen den Beweis, indem wir $u = \tilde{u} + v|_{\bar{U}}$ setzen.

Aufgabe 3*

Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fixiert, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ eine Funktion mit

$$-\Delta u + b \cdot Du = 0 \quad \text{in } U\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass u das starke Maximumsprinzip erfüllt, d.h. falls U zusätzlich zusammenhängend ist und $x_0 \in U$ existiert mit $x_0 = \max_{\bar{U}} u$, dann ist u konstant. Zeigen Sie dafür zuerst, dass nichtnegative Lösungen von (1) die Harnack-Ungleichung erfüllen, d.h. dass es für jedes $V \Subset U$ eine Konstante $C \equiv C(U, V, n, b) > 0$ gibt, sodass

$$\sup_V u \le C \inf_V u \tag{2}$$

für alle nichtnegativen Lösungen u von (1).

Hinweis: Betrachten Sie, für eine nichtnegative Lösung u und ein $x_0 \in U$, die Funktion $g(t) := \fint_{\partial B_t(x_0)} u \, dS$ und zeigen Sie, dass es eine nur von b abhängige Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $0 < r < s < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$

$$e^{-Cs} g(s) \le g(r) \le e^{Cs} g(s). \tag{3}$$

Schließen Sie daraus, dass für alle $0 < r < s < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$

$$e^{-Cs} \fint_{B_s(x_0)} u \, dx \le \fint_{B_r(x_0)} u \, dx \le e^{Cs} \fint_{B_s(x_0)} u \, dx \tag{4}$$

und folgern Sie damit die Harnack-Ungleichung.

Solution: Wir zeigen zuerst die Ungleichungen (3). Sei also $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ eine nichtnegative Lösung von (1), $x_0 \in u$ und $g(t) = \fint_{\partial B_t(x_0)} u \, dS$. Der Notation zu liebe schreiben wir B_t anstatt $B_t(x_0)$. Wir berechnen

$$g'(t) = \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{\partial B_t} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{B_t} \Delta u \, dy = \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{B_t} b \cdot Du \, dy = \fint_{\partial B_t} ub \cdot \nu \, dS\,,$$

da $b \cdot Du = \operatorname{div}(ub)$. Da $u \ge 0$, können wir letztes Integral folgendermaßen abschätzen

$$-|b| g(t) \le g'(t) \le |b| g(t)\,.$$

Sei nun $0 < r < s < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ und definiere

$$\gamma(t) = e^{-|b|(t-r)} g(t)\,.$$

Da

$$\gamma'(t) = -|b| e^{-|b|(t-r)} g(t) + e^{-|b|(t-r)} g'(t) \le 0\,,$$

ist γ monoton fallend und deshalb

$$e^{-|b|s} g(s) \le e^{-|b|(s-r)} g(s) = \gamma(s) \le \gamma(r) = g(r)\,.$$

Wenden wir dasselbe Argument auf $\gamma(t) = e^{|b|(t-r)} g(t)$ an und benützen $g'(t) \ge -|b| g(t)$, so folgt die Behauptung (3) mit $C = |b|$.

Für $0 < r < s < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ schreiben wir

$$\fint_{B_r} u \, dy = \frac{1}{n\omega_n r^n} \int_0^r \left(\int_{\partial B_\rho} u \, dS \right) d\rho = \frac{1}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1} g(\rho) \, d\rho = \frac{1}{s^n} \int_0^s t^{n-1} g\left(\frac{r}{s} t\right) dt\,.$$

Nun gilt nach (3) $g\left(\frac{r}{s} t\right) \le e^{Ct} g(t)$. Somit haben wir

$$\fint_{B_r} u \, dy \le \frac{1}{s^n} e^{Cs} \int_0^s t^{n-1} g(t) \, dt = e^{Cs} \fint_{B_s} u \, dy\,.$$

Die Ungleichung (4) folgt dann aus $g\left(\frac{r}{s}t\right) \geq e^{-Ct} g(t)$ und $e^{-Ct} \geq C^{-Cs}$ für $t \in [0, r]$.

Sei nun $V \Subset U$ und $x_1, x_2 \in V$ mit $|x_1 - x_2| \leq r := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(V, \partial U)$ und u eine nichtnegative Lösung von (1). Insbesondere gilt $B_r(x_1) \subset B_{2r}(x_2) \subset U$ und mit (4) folgt

$$u(x_1) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x_0)} u\, dy \leq e^{Cr} \fint_{B_r(x_0)} u\, dy \leq 2^n e^{Cr} \fint_{B_{2r}(x_1)} u\, dy \leq 2^n e^{3Cr} \fint_{B_s(x_1)} u\, dy$$

für alle $0 < s < 2r$. Mit dem Limes $s \to 0$ folgt sodann

$$u(x_1) \leq 2^n e^{3Cr} u(x_2) \leq 2^n e^{3C \mathrm{diam(U)}} u(x_2)\,.$$

Vertauschen von x_1 und x_2 im Argument ergibt

$$\left(2^n e^{3C \mathrm{diam(U)}}\right)^{-1} u(x_2) \leq u(x_1) \leq 2^n e^{3C \mathrm{diam(U)}} u(x_2)\,,$$

woraus die Harnack-Ungleichung wie in der Vorlesung folgt.

Sei nun schlussendlich $u \in C^2 \cap C^0(\bar{U})$ eine Funktion, welche die Gleichung (1) löst und sei $x_0 \in U$ mit $u(x_0) = M := \max_{\bar{U}} u$. Dann ist $v := M - u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ eine nichtnegative Lösung von (1). Es gibt also zu jedem $V \Subset U$ mit $x_0 \in V$ eine Konstante $C > 0$ mit

$$0 \leq \sup_V v \leq C \inf_V v \leq C v(x_0) = 0\,.$$

Mit $V \uparrow U$ folgt dann $u \equiv M$ auf U.