

Übungsblatt 4

- 1) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$

a)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

2 Punkte

b)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

2 Punkte

- 2) a) Beweisen Sie: wenn $k, n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 4k^2 + 2k$, dann

$$\binom{n}{2k} \geq n^k.$$

Zeigen Sie hiermit, oder anders, dass es für jedes $K \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $2^n > n^K$ wenn $n \geq N$. (*Hinweis: Die Behauptungen aus Aufgabe 1 können hier als bewiesen betrachtet werden.*)

Gilt eine die analoge Aussage, wenn die Basis 2 durch ein beliebiges $a > 1$ ersetzt wird? Begründen Sie Ihre Behauptung. 6* Punkte

- b) Zeigen Sie: für alle $a, b > 0$ gilt die Ungleichung (mit Gleichheit gdw. $a = b$)

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[2019]{\frac{a^{2019} + b^{2019}}{2}}.$$

(*Hinweis: der Fall, dass $a + b = 2$ könnte zunächst einfacher sein.*) 4 Punkte

- 3) a) Zeigen Sie: Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und $y \notin \mathbb{Q}$ dann ist $x + y \notin \mathbb{Q}$.

b) Beweisen Sie: $\forall x < y$ reell gibt es $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$.

c) Beweisen Sie, dass die Menge $\{2^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ keine obere Schranke hat.

5 Punkte

- 4) a) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = 1 - i$ und $w = 2 + 3i$. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ dar

$$z + w, z - w, zw, z/w, w/z, \bar{z}\bar{w}.$$

- b) Finden Sie die komplexen Zahlen w , so dass $w^2 = -3 - 4i$. Nutzen Sie dies, um mittels quadratischer Ergänzung die Gleichung $z^2 - (1 + 4i)z - (3 - 3i) = 0$ zu lösen.

3+5 Punkte