

14. Übungsblatt zu “Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 27.1.2020

53.) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mittels der Substitutionsregel:

i)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan(x) dx,$

ii)  $\int_3^9 \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx.$

54.) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

i)  $\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \cos(\pi \cdot x) dx,$

ii)  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx.$

55.) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral  $\int_0^{\infty} e^{-(x^\alpha)} dx$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  existiert.

*Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es reicht, Stammbrüche der Gestalt  $\alpha = \frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  zu betrachten.*

56.) Definiere für  $x > 0$  die Funktion  $f_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  durch

$$f_x(t) := e^{-t} \cdot t^{x-1}.$$

i) Zeigen Sie, dass es zu jedem  $x > 0$  reelle Zahlen  $S_x, T_x > 0$  gibt, so dass für alle  $a \in ]0, 1[$  und alle  $b \in \mathbb{R}$  mit  $b > 1$  gilt:

$$\int_a^1 f_x(t) dt \leq S_x, \int_1^b f_x(t) dt \leq T_x.$$

ii) Folgern Sie aus i): Die Funktion  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$$

ist eine wohldefinierte Funktion; sie heißt die **Gamma-Funktion**.

iii) Zeigen Sie – durch partielle Integration, dass für alle  $x > 0$  gilt:  $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ .

iv) Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ .