Übungsblatt 13

1) Untersuchen Sie, in welchen Punkten des Definitionsbereiches die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw $g_i : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und bestimmen Sie die Ableitung, falls sie existiert

$$f_1(x) = \sin((\exp(\cos(x^2)))^3), f_2(x) = 5^{\cos(e^x)}, f_3(x) = \log(\sqrt{1 + e^x(\cos(x))^2}),$$

$$f_4(x) = ((\sin(x/(x^2+1))^2)^{1/3}, g_1(x) = x^x, g_2(x) = x^{(x^x)}.$$

6 Punkte

2) a) Beweisen Sie rigoros die Gültigkeit der l'Hospitalschen Regel bei Unendlich: wenn $\ell_f = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ und $\ell_g = \lim_{x\to+\infty} g(x)$, wobei $(\ell_f, \ell_g) \in \{(0,0), (\pm\infty, \pm\infty)\}$, sowie f, g auf $(K, +\infty)$ differenzierbar, dann

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty] \text{ , falls die rechte Seite existiert.}$$

Sie können hierbei die Gültigkeit der l'Hospitalschen Regel bei $a \in \mathbb{R}$, siehe Satz 4.21, voraussetzen. 2 Punkte

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist genau dann wenn $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) \geq 0$ und für alle reellen $a < b$ gibt es $c \in (a, b)$ so dass $f'(c) > 0$. 4* Punkte

3) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\to1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}, \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin(x)} \right), \lim_{x\to0} \frac{\arctan(x^3) - x^3}{\sin(x^3) - x^3}.$$

(Die l'Hospitalsche Regel ist oft nützlich, aber ohne weiteres Nachdenken nicht immer das Schnellste.) 5 Punkte

4) a) Seien α, β, γ die Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks. Zeigen Sie

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

[Wie lautet die Jensensche Ungleichung für konkave Funktionen?]

b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = |x|$. Ist f konvex auf $\mathbb{R}$? (Begründen Sie Ihre Aussage). Finden Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ das Subdifferential, d.h. die Menge

$$SD(f, x) = \{l \in \mathbb{R} \, : \, \forall y \in \mathbb{R} \text{ gilt } f(y) \geq f(x) + l(y - x)\}.$$

c) Zeigen Sie: wenn f auf $\mathbb{R}$ konvex ist, dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$. Wenn überdies f in a differenzierbar ist, dann $SD(f, a) = \{f'(a)\}$. 2+2+3* Punkte

5) a) Zeigen Sie, dass $\sin(x) \geq 2x/\pi$ für alle $x \in [0, \pi/2]$ gilt.

b) Benutzen Sie die Taylorsche Formel, um einen Bruch zu finden, der $\sin(\frac{1}{10})$ mit einer Genauigkeit von 10^{-7} annähert.

c) Finden Sie das Taylorsche Polynom vom Grad 5 der Funktion $\cos(x^2) - (\cos(x))^2$ für den Entwicklungspunkt $a = 0$! Gibt es neben der Taylorschen Formel noch andere (und schnellere) Methoden? 1+2+2 Punkte

---

Abgabe: am 30.1.2020, 17.10 Uhr Hörsaal 9

Die (Übungsschein-)Klausur findet am 6.2.2020 von 17-19 Uhr statt.