Abgabe des Blattes während der Vorlesung am Mittwoch, den 11.12.

Neu: Sprechstunde bei Victor Marx (A328) jeden Freitag, 15:30 Uhr bis 17:00 Uhr. **Anstatt der Vorlesung am Dienstag, den 10. Dezember, sollen alle Studenten bitte in den Vortrag von Mikhail Belkin gehen (siehe Ankündigung).**

Aufgabe 1: 8 Punkte

i) Sei das folgende statistische Modell $(\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n), \mathbb{P}_\nu^{\otimes n}, \nu \in [0,1])$, wobei $\mathbb{P}_\nu$ die Bernoulli-Verteilung mit Parameter ν ist. Man möchte Konfidenzbereichen für die Schätzung von ν zum Niveau $\alpha = 0.05$ definieren. Wir benutzen den Schätzer $T(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Sei $n = 20$. Wir beobachten die folgende Stichprobe:

0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1

Mit der Methode der Tschebyschev-Abschätzung ein Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.05$ definieren. Erwartet werden eine Formel für dieses Intervall mit einer Rechtfertigung dafür, dass es ein angemessenes Konfidenzintervall ist, und auch die numerische Berechnung dieses Intervall in diesem konkreten Fall. Kommentieren Sie auch das Ergebnis dieser numerischen Berechnung.

ii) Nach $n = 100$ Wiederholungen beobachtet man 67 Mal die Zahl 0 und 33 Mal die Zahl 1. Das Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.05$ neu berechnen.

iii) Gleiche Frage mit $n = 1000$ und 692 Mal die Zahl 0 und 308 Mal die Zahl 1. Vergleichen Sie und kommentieren Sie diese drei numerische Ergebnisse.

iv) Man betrachtet den gleichen Fall wie in iii). Jetzt ein Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.01$ berechnen. Kommentieren Sie das Ergebnis.

v) Man betrachtet noch den gleichen Fall wie in iii). Jetzt die Methode des Zentralen Grenzwertsatzes anwenden, um ein Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.05$ und zum Niveau $\alpha = 0.01$ zu berechnen. *Abbildung 1 ist dafür zur Verfügung.* Erwartet wird neben der numerischen Berechnung auch eine Rechtfertigung für das erhaltene Intervall. Kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2: 3 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen, gleich verteilt auf $[0, \theta]$ mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Sei $X_{(n)} := \max(X_1, \dots, X_n)$ und sei $c > 1$ fest. Zu welchem Niveau α ist $[X_{(n)}, cX_{(n)}]$ ein Konfidenzintervall für den Parameter θ?

Aufgabe 3: 2+2+2+2 Punkte

Sei $(X_n)_{n\geqslant 0}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt und für alle $n \geqslant 0$, für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = a+1 | X_n = a] = \frac{1}{2}; \qquad \mathbb{P}[X_{n+1} = a-1 | X_n = a] = \frac{1}{2}.$$

i) Die Verteilungen von X_1, X_2 und X_3 bestimmen.

ii) Man möchte $\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n]$ (auch $\mathbb{E}[X_{n+1}|\sigma(X_n)]$ genannt) berechnen. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_n=a\}}] = a\,\mathbb{P}[X_n = a].$$

iii) Beweisen Sie, dass für alle $A \in \sigma(X_n)$ gilt:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_A].$$

iv) $\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n]$ bestimmen.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Abbildung 1: Tabelle der Verteilung von $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$. Die Tabelle liest man so: $\phi(0.06) = 0.5239$, $\phi(2.83) = 0.9977$.