

Abgabe des Blattes während der Vorlesung am Mittwoch, den 27.11.

Bedingter Erwartungswert: die folgende Absätze wurden in der Vorlesung erwähnt.

Sei $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der Raum aller integrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (bis auf fast sichere Gleichheit). Sei eine Teil- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Die Menge $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ist also der Raum aller integrierbaren und \mathcal{G} -messbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann existiert (*nach dem Satz von Radon-Nikodym, siehe Vorlesung*) genau eine Zufallsvariable Z im Raum $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, so dass für alle $B \in \mathcal{G}$ gilt:

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_B].$$

Man schreibt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ für diesen Z .

Der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ist auch der einzige $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, so dass für alle beschränkten und \mathcal{G} -messbaren Zufallsvariablen Y gilt:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[ZY].$$

Aufgabe 1: 2+2+2 Punkte

i) Seien $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0, 1]$ und $\mathbb{P} = \text{Leb}_{[0,1]}$ die Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Sei $n \geq 1$ fest. Sei \mathcal{G}_n die σ -Algebra, die von $\{[0, \frac{1}{n}], (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \dots, (\frac{n-1}{n}, 1]\}$ erzeugt ist. Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$.

ii) Seien $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ drei σ -Algebren. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1].$$

iii) Für zwei Zufallsvariablen X, Y in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ schreibt man $\mathbb{E}[X|Y] := \mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|X] = X;$$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X] \quad \text{falls } X \text{ und } Y \text{ unabhängig sind.}$$

Aufgabe 2: 2+3 Punkte

Seien (X, Y) Zufallsvariablen mit folgender Dichtefunktion bezüglich des Lebesgue-Maßes auf \mathbb{R}^2 :

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}.$$

i) Bestimmen Sie die Verteilung von Y .

ii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Funktion. Da $\mathbb{E}[f(X)|Y]$ per Definition $\sigma(Y)$ -messbar ist, existiert eine messbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{E}[f(X)|Y] = g(Y)$. Bestimmen Sie diese Funktion g .

Aufgabe 3: 2+3 Punkte

Seien X und Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{Z}_+ . Für alle $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\mathbb{P}[X = k | X + Y = n] = \frac{1}{n+1}.$$

i) Sei $p_k := \mathbb{P}[X = k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass für alle $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$p_k p_{n-k} = p_0 p_n.$$

ii) Bestimmen Sie alle möglichen Verteilungen von X .

Aufgabe 4: 5 Punkte

Seien X und Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{Z}_+ . Für alle $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\mathbb{P}[X = k | X + Y = n] = \binom{n}{k} 2^{-n}.$$

Bestimmen Sie alle möglichen Verteilungen von X .